REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volume 13, Issue 1, 24th February, 2024, Pages 59 – 86

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14137

Potential Conflicts Identified in Chilean Primary Education Mathematics Textbooks for the Study of Algebra

Luis R. Pino-Fan [1], Jesús Guadalupe Lugo-Armenta [1], Graciela Rubí Acevedo Cardelas [1], José García [2], Cristina N. Peña [1], & Yesenia Uicab Campos [3]

1) *University of Los Lagos, Chile*
2) *Centro Universitario de la Costa Sur*, *University of Guadalajara*, México
3) *University of Barcelona*, Spain

Abstract

Several investigations have shown that the mathematics textbook continues to be the main work tool for teachers and, among other things, constitutes the referent of school mathematical knowledge that they must teach to students. However, it has also been manifested that the texts can be a source of conflicts in both students and teachers, due to the treatment they give to mathematical notions. In this article we have been interested in how textbooks develop the study of algebra in primary education and, in particular, if these ways of presenting algebraic notions could cause conflicts. To carry out our study, we used some theoretical-methodological tools of the Ontosemiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction, such as the notion of conflict and the ontosemiotic configuration, which allowed a systematic analysis of the mathematics textbooks in terms of the problems, definition of concepts, properties, procedures, arguments and representations. As a main result, categories of potential conflicts for the study of algebra are identified and discussed, which could lead to errors or misconceptions of algebraic notions by students or teachers.

Keywords

Potential conflicts, algebra, ontosemiotic approach, textbooks, primary education.

To cite this article: Pino-Fan, L.R., Lugo-Armenta, J., Acevedo, G.R., García, J., Peña, C.N. & Uicab-Campos, Y. (2024). Potential conflicts identified in Chilean primary education mathematics textbooks for the study of algebra. *Journal of Research in Mathematics Education, 13* (1), pp. 59-86 http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14137

Corresponding author(s): Yesenia Uicab-Campos
Contact address: yesenia.uicab@gmail.com

REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Journal of Research in Mathematics Education
Volumen 13, Número 1, 24 de febrero de 2024, Páginas 59 – 86

http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14137

Conflictos Potenciales Identificados en los Libros de Texto de Matemáticas de Educación Básica de Chile para el Estudio del Álgebra

Luis R. Pino-Fan [1], Jesús Guadalupe Lugo-Armenta [1], Graciela Rubí Acevedo Cardelas [1], José García [2], Cristina N. Peña [1], & Yesenia Uicab-Campos [3]

1) *Universidad de Los Lagos*, Chile
2) *Centro Universitario de la Costa Sur, Universidad de Guadalajara*, México
3) *Universidad de Barcelona*, España

Resumen

Diversas investigaciones han evidenciado que el libro de texto de matemáticas sigue siendo la principal herramienta de trabajo para los profesores y, entre otras cosas, constituye el referente del conocimiento matemático escolar que deben enseñar a los estudiantes. Sin embargo, también se ha puesto de manifiesto que los textos pueden ser fuente de conflictos tanto en estudiantes como en profesores, debido al tratamiento que dan a los conceptos matemáticos. En este artículo nos hemos interesado por cómo los libros de texto desarrollan el estudio del álgebra en la educación básica y, en particular, si estas formas de presentar las nociones algebraicas pudieran causar conflictos. Para llevar a cabo nuestro estudio, utilizamos algunas herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, tales como la noción de conflicto y la configuración ontosemiótica, lo cual permitió un análisis sistemático de los textos en términos de los problemas, definiciones de los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y representaciones. Como resultado principal, se identifican y discuten categorías de conflictos potenciales para el estudio del álgebra, los cuales podrían inducir a errores o concepciones erróneas de las nociones algebraicas por parte de los estudiantes o profesores.

Palabras clave

Conflictos potenciales, álgebra, enfoque ontosemiótico, libros de texto, educación básica.

Cómo citar este artículo: Pino-Fan, L.R., Lugo-Armenta, J., Acevedo, G.R., García, J., Peña, C.N. & Uicab-Campos, Y. (2024). Conflictos Potenciales Identificados en los Libros de Texto de Matemáticas de Educación Básica de Chile para el Estudio del Álgebra. *Journal of Research in Mathematics Education, 13* (1), pp. 59-86 http://dx.doi.org/10.17583/redimat.14137

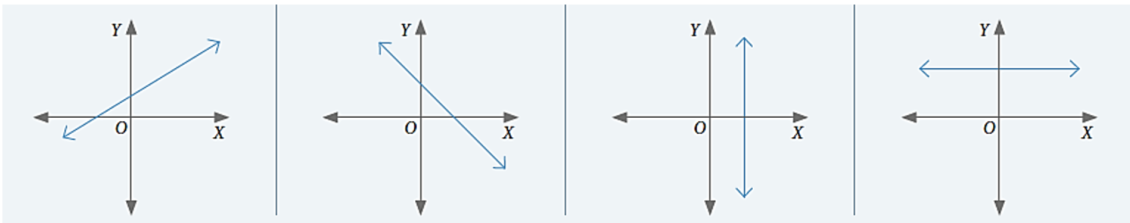
Correspondencia Autores(s): Yesenia Uicab-Campos
Dirección de contacto: yesenia.uicab@gmail.com

En el proceso de enseñanza de la matemática el libro de texto sigue siendo la herramienta principalmente utilizada por el profesorado, el cual constituye un referente curricular y una influencia del conocimiento matemático que se lleva a cabo en las clases de matemáticas (Font y Godino, 2006; Howson, 1995; Nicholls, 2005; Palacios y Jiménez, 2002; Pino-Fan, et al., 2013; Remillard, 2005; Rezat, 2006; Romero, 2011). A continuación, La Figura 1 muestra un problema y la respuesta de un estudiante de Enseñanza Media en Chile (15 años):

Figura 1

Actividad de gráficas y la función afín

¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función afín? Justifica tu respuesta.



Respuesta: "*...todas. Porque todas las rectas son funciones afines*".

Fuente. Adaptado de Fresno, Torres y Ávila (2020).

El error en la respuesta anterior podría tener un origen muy diverso dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo, en la gestión que hace el profesorado para el desarrollo de los aprendizajes. Sin embargo, ¿Cómo es el tratamiento del contenido matemático en el libro de texto escolar? ¿Qué conflictos potenciales presentan los libros de texto que podrían desencadenar errores en la actividad matemática? Si analizamos con detenimiento los libros de texto de matemáticas que proporciona el Ministerio de Educación de Chile, en el bloque de álgebra, cuando se estudia ecuaciones lineales, es posible encontrar afirmaciones como las siguientes (Fresno, et al., 2020, p. 68):

- Su representación [de la ecuación] en el plano cartesiano corresponde a una recta donde $-\frac{a}{b}$ es la pendiente y $\frac{c}{b}$ el coeficiente de posición.
- La ecuación de la forma general $ax + by + c = 0$, se puede expresar de la forma principal $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n es el coeficiente de posición. Gráficamente, la pendiente m se asocia con la inclinación de la recta respecto del eje X.
- Es posible representarla [la ecuación] utilizando una función afín ($f\colon A \rightarrow B$), tal que $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Lo anterior, muestra el cierre de una sección del libro de texto (Fresno, et al., 2020). Este contenido podría generar un *conflicto* pues se podría pensar que las ecuaciones lineales se representan por rectas y que tales representaciones son las de funciones afines. ¿Y qué pasa con la familia de rectas cuya representación gráfica son paralelas al eje de las ordenadas o de las abscisas? en el libro de texto no se hace tal distinción. Diversos estudios han dado cuenta sobre el análisis de los libros de texto de matemáticas (e.g., Demosthenous y Stylianides, 2014), los cuales hacen énfasis en: 1) el texto como un medio entre los significados implementados por este y los significados declarados por el currículo (Valverde et al., 2002); 2) propuestas metodológicas o guías para el análisis de textos (Castillo, et al., 2022; González y Sierra, 2004); 3) el desarrollo del pensamiento algebraico a través de tipo de los problemas o tareas propuestos por el texto (Aké y Godino, 2018; López, et al., 2015; Valencia y Valenzuela, 2017).

En el contexto chileno, el Ministerio de Educación (MINEDUC) promueve en el currículo de matemática para la enseñanza básica cinco ejes temáticos, los cuales se desarrollan en los libros de texto. Uno de ellos es *Álgebra y Patrones*, que se estudia desde 1° al 6° grado, correspondiente a la relación de cantidades y desarrollo de patrones numéricos cuyas representaciones son de forma pictórica o simbólica. Este eje se considera como la base sólida para el desarrollo del pensamiento algebraico que deberán adquirir los estudiantes en niveles superiores (MINEDUC, 2012). De 7° a 8° grado (12 – 13 años), se aborda el eje curricular de álgebra y funciones cuyo énfasis se pone en que los alumnos reconozcan modelos y desarrollen la habilidad de comunicación por medio de expresiones algebraicas; en este eje es fundamental el uso del lenguaje algebraico para el desarrollo del pensamiento algebraico (MINEDUC, 2015).

Así, para el desarrollo del pensamiento matemático, y en concreto el algebraico, los libros de textos adquieren relevancia al ser fuente principal de problemas y al proporcionar sugerencias para el tratamiento de las nociones matemáticas que se estudian en clases. Por ello, es indispensable conocer si el tratamiento que realizan sobre las nociones matemáticas o el tipo de problemas que se proponen, podrían originar conflictos en los aprendizajes de los estudiantes, los cuales llevarían a errores en sus prácticas matemáticas. A propósito, existen pocos trabajos de investigación preocupados por analizar los conflictos potenciales que introducen los libros de texto y que conllevan a errores durante el proceso de instrucción del álgebra. Sin embargo, se han hecho esfuerzos por identificar inconsistencias en los libros de texto que causan errores en otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, en la estadística y en el cálculo (e.g., Contreras y García, 2011; Gea, et al., 2015; Salcedo, et al., 2018).

Así, el objetivo de este artículo es identificar y caracterizar conflictos potenciales presentes en los libros de texto de matemáticas de 5º (10 años) a 8º (13 años) grados de Educación Básica que proporciona el Ministerio de Educación de Chile, cuando desarrollan el estudio del álgebra.

Marco Teórico

En este trabajo estamos interesados en los *conflictos semióticos potenciales*, en algunos estudios denominados ‘posibles conflictos semióticos’ (e.g., Gea, et al., 2015), que tienen lugar en los libros de texto debido al tratamiento que realizan para el estudio de las nociones algebraicas en educación básica. La idea de *conflicto semiótico* fue introducida por Godino (2002, p. 250) para referirse a “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas”. Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Sin embargo, cuando analizamos libros de texto y el tratamiento que realizan para presentar el estudio de los contenidos matemáticos, este desajuste entre los significados puede o no darse. Si el tratamiento que hace el texto de los contenidos matemáticos admite otras prácticas (o interpretaciones) además de las prácticas que pretende introducir (significados pretendidos), y tales otras interpretaciones pueden obstaculizar la correcta comprensión o el aprendizaje de los contenidos, entonces estamos ante un *posible conflicto semiótico*. En este estudio nos enfocaremos en los conflictos semióticos potenciales de tipo epistémico.

En concordancia con lo anterior, en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), el *significado* de un objeto matemático es entendido como el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas (Godino, et al., 2007; 2019). Además, se considera *práctica matemática* a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser personales (relativas al significado personal) o compartidas en el seno de una institución (prácticas institucionales, relativas al significado institucional). En las prácticas (operativas y discursivas) intervienen o emergen los siguientes objetos matemáticos primarios: conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, lenguajes (simbólico, algebraico, pictórico, gráfico, etc.), argumentos y procedimientos. Estos objetos matemáticos primarios se articulan conformando la *configuración ontosemiótica* epistémica (si corresponde a prácticas institucionales) o cognitiva (si corresponde a prácticas personales).

Así, la noción de *configuración ontosemiótica epistémica* ha demostrado ser una herramienta teórico-metodológica importante y útil para analizar de manera detallada y estructurada significados pretendidos por los libros de texto (e.g., Godino y Font, 2006; Pino-Fan, et al., 2013; Pino-Fan, et al., 2019), así como los significados de referencia de las nociones matemáticas (Cajaraville, et al., 2010; Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021a; 2021b; Godino et al., 2011; Gordillo y Pino-Fan, 2016; Pino-Fan, et al., 2011; Ramírez, et al., 2020) y en este estudio nos permitirá analizar el significados de los objetos algebraicos presentados para la educación básica en Chile, identificando los conflictos semióticos potenciales.

Errores y Dificultades en el Estudio del Álgebra

Como hemos señalado, en esta investigación pretendemos identificar y caracterizar los conflictos potenciales presentes en los libros de texto cuando presentan el estudio del álgebra. El análisis de conflictos potenciales evoca, naturalmente, a una reflexión sobre el tipo de errores algebraicos que éstos podrían generar; es decir, ¿por qué es importante el estudio de los conflictos potenciales? Nuestro posicionamiento es que el estudio de los conflictos potenciales puede proporcionar orientaciones, o ayudar a la toma de decisiones por parte de los profesores, para prevenir o tratar errores en los que podrían incurrir los estudiantes cuando interpretan y utilizan las nociones algebraicas (y conocimientos previos) presentados en los libros de texto. Entonces, estudios como el que presentamos proporcionan directrices que ayudan a prever conflictos y errores en las clases de álgebra.

Al respecto, diversos estudios han propuesto tipologías de errores asociadas a dificultades (Astolfi, 1999; Ábrate, et al., 2006; Mosvshovitz-Hadar, et al., 1987; Radatz, 1980; Socas, 1997). En la Tabla 1, presentamos una clasificación de errores algebraicos más relevantes según su origen.

Tabla 1

Clasificación de errores según su origen

Origen del error	Descripción del error
Dificultad de lenguaje	*Errores sobre mal uso de los símbolos y conceptos*, debido a una falta de comprensión semántica del lenguaje matemático (Radatz, 1980). *Errores al efectuar una interpretación incorrecta del lenguaje*, al hacer un pasaje de un lenguaje simbólico a otro lenguaje
Dificultad en la compresión del problema (oral o escrita)	*Errores causados por la interpretación* que posibilita el planteamiento de un problema o por las respuestas que se infieren de tal problema (Astofi, 1999).
Dificultades para obtener información espacial	*Errores que provienen de la producción de representaciones* figurales o icónicas que conllevan a interpretaciones incorrectas (Radatz, 1980; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).
Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	*Errores provenientes por la deficiencia de procedimientos, principios, teoremas, símbolos, conceptos o reglas matemáticas* (Radatz, 1980; Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).
Dificultad asociada al sentido de las matemáticas	*Errores que se producen entre la "lógica escolar" y la "lógica social"* en el contexto de los problemas de matemáticas (Socas, 1997).
Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas	Errores que se producen por la deformación de un principio, regla o definición identificable (Mosvshovitz-Hadar Zaslavsky e Inbar, 1987).

Fuente. Elaborado por los autores

Aunque esta clasificación se ha utilizado para identificar errores en cualquier área de la matemática, en este trabajo se utilizan en el contexto del álgebra de los libros de texto de educación básica de Chile, en particular los de 5° (10 años) a 8° (13 años). En concreto, estos errores los hemos asociado, según su origen, a los conflictos potenciales identificados en los libros de texto. Cabe señalar que, estos errores están latentes cuando el libro de texto es utilizado en las clases de matemáticas.

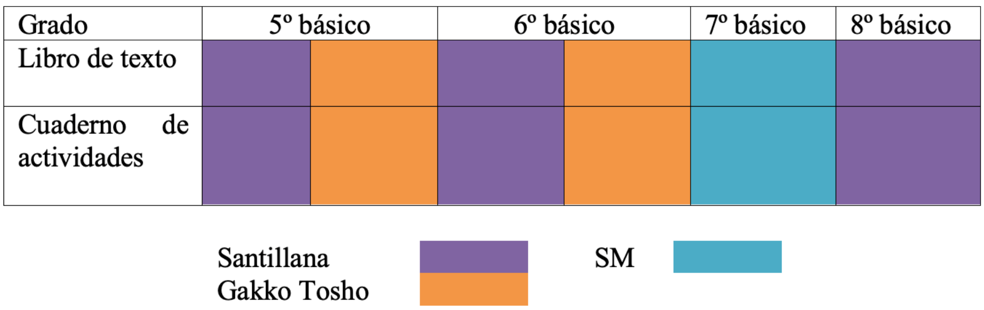
Metodología

La metodología de esta investigación se enmarca en el paradigma cualitativo (Cohen, Manion y Morrison, 2018), debido a que se realiza un análisis de contenido de los textos escolares de matemáticas para el estudiante con la finalidad de identificar, describir y caracterizar los conflictos potenciales presentes en los textos escolares de matemáticas de educación básica de Chile cuando desarrollan el estudio del álgebra mediante la noción de configuración ontosemiótica.

Para el análisis de los conflictos potenciales se seleccionaron los textos escolares de matemáticas (texto del estudiante y cuaderno de actividades) del 5º al 8º grado de nivel básico que provee el Ministerio de Educación de Chile, que se encuentran vigentes en el ciclo escolar 2022 y que contemplan nociones de Álgebra. En particular, se analizaron los textos de quinto, sexto, séptimo y octavo básico (10-13 años) de las diferentes editoriales (Figura 2).

Figura 2

Textos analizados por grado y editorial



Fuente. Elaboración propia de la investigación.

Se analizó cómo se presentan las nociones algebraicas (i.e., las explicaciones, los ejemplos, las definiciones de las ideas matemáticas, los cuadros de “recuerda”, etc.) y todas y cada una de las actividades o tareas de los libros de texto y de los cuadernos de actividades (ejemplos, problemas, ejercicios, actividades, etc.) mediante la herramienta de configuración ontosemiótica, identificando los conflictos potenciales en las definiciones, lenguajes, proposiciones, tipos de situaciones-problema, procedimientos y argumentos.

En la primera fase del análisis, los seis autores de este artículo identificaron individualmente los conflictos potenciales en los libros de texto y cuadernos de actividades seleccionados, mientras que, en una segunda fase, de forma grupal, se contrastaron y consensuaron los conflictos potenciales identificados, logrando así una etapa de triangulación. Por último, en una tercera fase se clasificaron por tipos de conflictos potenciales y se realizó el vínculo, cuando fue posible, con el tipo de error que podría producir.

Análisis y Resultados

A continuación, presentamos los análisis realizados a los libros de matemáticas de 5° al 8° grado básico, de las editoriales comentadas en la Figura 2, a partir de las prácticas algebraicas y de los elementos que componen la configuración ontosemiótica epistémica, para la identificación de conflictos semióticos potenciales y sus vínculos con los errores a los que podrían dar origen.

Conflictos potenciales identificados en los libros de 5º básico

Santillana

En este grado se comienza el estudio del álgebra con ecuaciones e inecuaciones. Una de las primeras nociones que se introduce es la de "expresión", la cual se define a través del siguiente ejemplo: $x + x + x = 24$. Definir una noción de esta forma puede llevar a los estudiantes a pensar que una expresión forzosamente debe incluir varios términos e incluso una igualdad. En esta misma definición, se ve involucrada la noción de igualdad, situación que resulta contradictoria con la definición de "ecuación", como una "igualdad entre dos expresiones" (ver Figura 3). Esta *inconsistencia o ambigüedad entre definiciones*, constituye un conflicto potencial asociado al posible error del tipo "aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas", ya que no hay una correspondencia entre lo que se plantea como expresión y lo que se define como igualdad.

Figura 3

Expresión y ecuación algebraica

3 Planteas la expresión: $x + x + x = 24$.

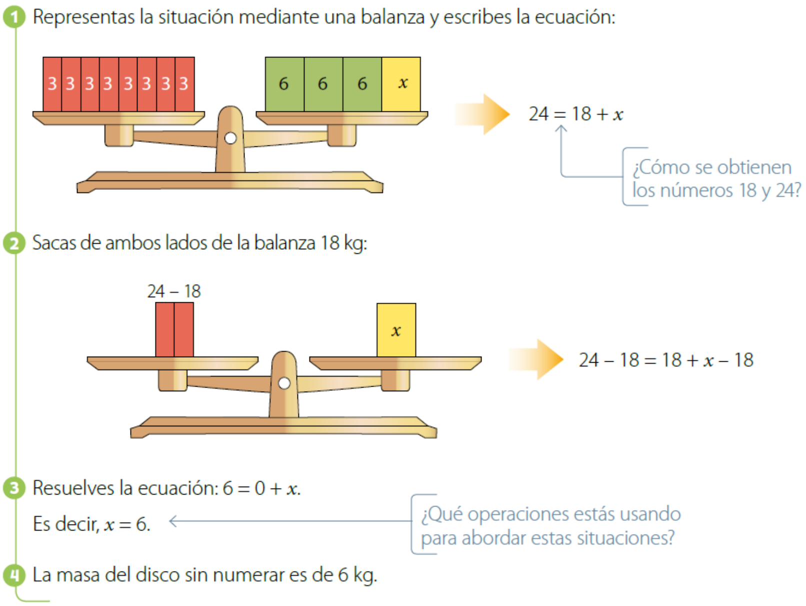
La **igualdad** entre dos expresiones con al menos una **incógnita** se llama **ecuación**.

Fuente. Extraído de Alvarado, Carrero y Caroca (2021).

Al establecer el procedimiento para resolver ecuaciones se recurre a la metáfora de la balanza, un ejemplo de ello se muestra en la Figura 4. En algunos de los pasos se solicita al estudiante que reflexione sobre la forma en la que se obtuvieron ciertas cantidades e identifiquen las operaciones realizadas. Sin embargo, en este tipo de actividades hay una *ausencia de argumentos*, los cuales podrían permitir que el estudiante reconozca porqué se realizan esos pasos y porqué se debe "sacar" o "agregar" cierta cantidad. Esta situación podría llevar a que los estudiantes consideren que el álgebra sólo es un conjunto de reglas o algoritmos que se deben seguir. El conflicto potencial radica en la ausencia de argumentos que podría desencadenar en errores que tienen su origen en un "aprendizaje deficiente", al restringir los conocimientos en solo un algoritmo, sin considerar las propiedades que justifican el procedimiento.

Figura 4

Actividad con la metáfora de balanzas

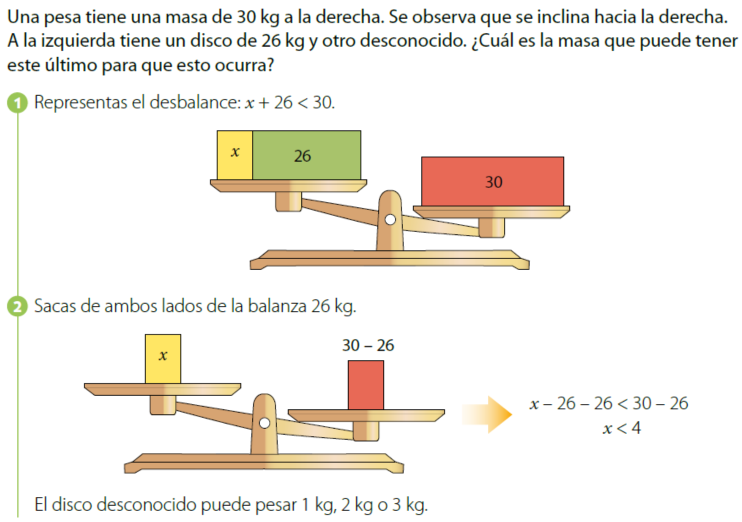


Fuente. Extraído de Alvarado, Carrero y Caroca (2021).

En la actividad presentada en la Figura 5, se utiliza un contexto de masas, en el cual las respuestas están dentro de los números naturales y, aunque los estudiantes no han estudiado formalmente los racionales, consideramos que dada la cercanía con el contexto es probable que consideren respuestas como 2,5 kg. En el libro de texto no se han incorporado actividades donde se contemple el uso de fracciones, es por ello, que consideramos que el uso de *contextos de uso acotados* puede causar conflictos al resolver las actividades e inducir a errores asociados a "la dificultad en la compresión del problema" o a la "dificultad asociada al sentido de las matemáticas", ya que es posible inferir respuestas que no han sido consideradas, aunque tengan sentido para el contexto del problema.

Figura 5

Actividad en contexto de masas



Fuente. Extraído de Alvarado, Carrero y Caroca (2021).

En el estudio de las inecuaciones, únicamente se plantean aquellas del tipo $x \pm a > b$, por lo que se establece como procedimiento de resolución la suma o resta de la misma cantidad en ambos miembros de la inecuación. Sin embargo, este *procedimiento acotado* es un conflicto semiótico potencial que puede representar un error por un "aprendizaje deficiente de hechos y destrezas o conceptos previos", al no considerarse la diversidad de procedimientos que permiten el alcance global del significado de las desigualdades.

Durante el estudio de las ecuaciones e inecuaciones el único contexto que se trabaja es el de las balanzas. Sin embargo, en la sección denominada "Practica en tu cuaderno", estos contextos no se presentan y se promueven contextos sobre descuentos y temperaturas. Estos *contextos de uso acotados* constituyen un conflicto, puesto que podría ocasionar que los estudiantes no logren transitar entre diferentes contextos de manera autónoma; o llevándolos también a interpretar que con las inecuaciones solo se resuelven problemas con balanzas. Lo anterior podría generar un error con origen en "aprendizajes deficientes de hechos, destrezas, y conceptos previos".

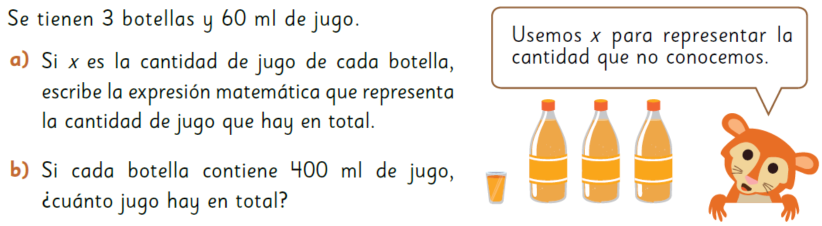
En el cuaderno de actividades se encuentran *situaciones no estudiadas previamente*, por ejemplo, tareas que tienen más de una cantidad desconocida, aquellas que solicitan crear situaciones-problema dada una ecuación y las que solicitan que los alumnos asignen variables y expresen qué representan las variables. Además, este último tipo de actividad conlleva a otro conflicto potencial *nociones no definidas previamente*, pues durante la lección, la noción de "variable" no fue introducida. Estos conflictos pueden generar errores respecto de un "aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos", así como sobre la "dificultad de la compresión del problema" al restringirse a un cierto tipo de problema.

Gakko Tosho

En el texto del estudiante de quinto grado de la Editorial Gakko Tosho, también se comienza el estudio del álgebra con ecuaciones e inecuaciones. Uno de los primeros elementos que se introduce es el uso de las literales para representar cantidades desconocidas. Dada una situación (ver Figura 6), se solicita representar con x la cantidad de jugo de cada botella, y también se explicita que se use la x para representar la cantidad que no conocemos. Sin embargo, la situación planteada tiene dos cantidades desconocidas, a saber, la cantidad de jugo en la botella y la cantidad de jugo que hay en total. Esta *ambigüedad en el planteamiento de la actividad* podría llevar a los estudiantes a preguntarse ¿qué cantidad de jugo representa la x?. Este conflicto potencial podría derivar en errores sobre la "dificultad en la compresión del problema", al hacer explícito que x es la cantidad de jugo que no conocemos y también x es la cantidad de jugo en cada botella. Además, este conflicto también podría desencadenar errores sobre la "dificultad del lenguaje", por la interpretación del problema y la representación de su solución.

Figura 6

Actividad de botellas y vaso de jugo


Se tienen 3 botellas y 60 ml de jugo.

a) Si x es la cantidad de jugo de cada botella, escribe la expresión matemática que representa la cantidad de jugo que hay en total.

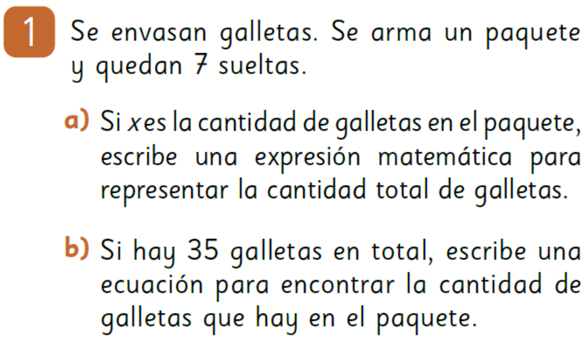
b) Si cada botella contiene 400 ml de jugo, ¿cuánto jugo hay en total?

Fuente. Extraído de Isoda (2021a)

Posteriormente, se presenta una actividad que solicita escribir una ecuación (Figura 7); sin embargo, se manifiesta un conflicto potencial sobre el *uso de nociones que no se han introducido previamente* debido a que la noción de "ecuación" aún no ha sido definida. Así, el tipo de error posible está asociado a la "deficiencia de hechos, destrezas y conocimientos previos" que no han sido considerados para el estudio de las ecuaciones.

Figura 7

Actividad sobre formular una ecuación


1 Se envasan galletas. Se arma un paquete y quedan 7 sueltas.

a) Si x es la cantidad de galletas en el paquete, escribe una expresión matemática para representar la cantidad total de galletas.

b) Si hay 35 galletas en total, escribe una ecuación para encontrar la cantidad de galletas que hay en el paquete.

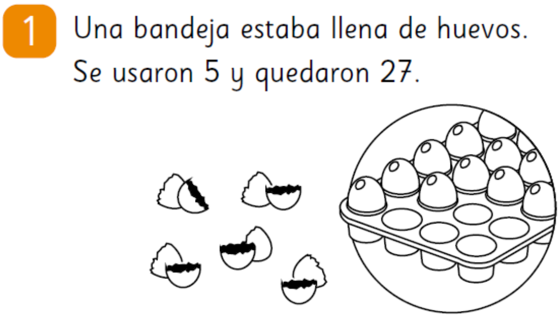
Fuente. Extraído de Isoda (2021a)

A lo largo del texto del estudiante podemos observar que la única literal que se propone utilizar es la x, y se declara explícitamente que es la letra que se usa para representar cantidades desconocidas. Esta declaración genera un conflicto potencial sobre el uso de una *representación acotada*, pues no se menciona que se puede utilizar cualquier otra letra para representar cantidades desconocidas. Esta x es utilizada en otros momentos como "el valor de x" o "el valor que hace verdadera la ecuación", pero nuevamente sin brindar o solicitar argumentos para comprender la razón de utilizar dicha estrategia. Este conflicto podría generar errores relacionados con la "dificultad del lenguaje", al no hacer énfasis en que cualquier letra representa una cantidad o valor desconocido. También se plantean actividades en las que los estudiantes deben inventar ecuaciones dada la solución y que contengan alguna operación, así como alguna que no tenga solución. Sin embargo, aunque hasta este grado no se ha tenido un estudio formal de los racionales, es posible que los alumnos planteen ecuaciones como $x + 5 = 3$, cuya solución no pertenece a los números naturales, lo cual atiende a un conflicto potencial que denominamos *uso de nociones que no se han introducido previamente*, que podría generar errores de "aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”, ya que se deja abierta la posibilidad de que el alumno plantee ecuaciones cuyas soluciones no forman parte de sus conocimientos previos.

Ha sido ampliamente reportada la importancia de recurrir a actividades en contextos cercanos a los estudiantes; sin embargo, se debe tener cuidado con el uso de estos contextos, pues el uso inadecuado podría llevar a un conflicto potencial. Tal es el caso de la actividad presentada en la Figura 8 que se extrajo del cuaderno de actividades, en la cual se pretende que los estudiantes identifiquen la capacidad de una bandeja de huevos si “se usaron 5 y quedaron 27”. Si bien, matemáticamente se puede llegar a una solución, los estudiantes podrían tener problemas con este *contexto contrario a la realidad*, pues podrían argumentar que la capacidad máxima de una bandeja de huevos es de 30 piezas. Este conflicto se asocia a errores sobre la lógica o sentido de las matemáticas, ya que desde el contexto social esta actividad carece de sentido.

Figura 8

Actividad con un contexto contrario a la realidad

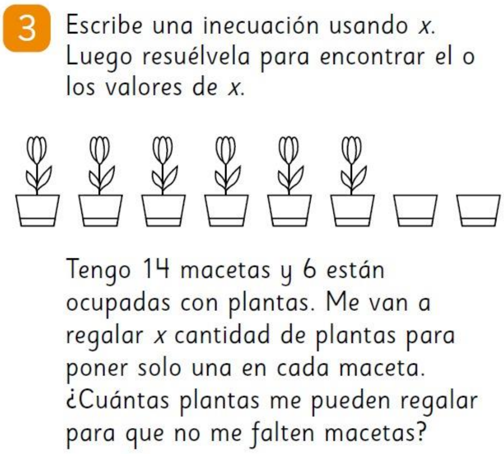


Fuente. Extraído de Isoda (2021b)

Continuando con las actividades sobre bandejas de huevos, también en el cuaderno de actividades, observamos un conflicto potencial por *ambigüedad en el planteamiento de la actividad*. Se presenta una actividad en la que una bandeja tiene capacidad para 20 huevos y se pide que se plantee una inecuación utilizando x para representar la cantidad de huevos que se pueden poner en la bandeja. En este caso la literal no se usa para representar una cantidad desconocida como se había explicitado previamente. Es posible que en realidad se refiera a la cantidad de huevos que se pueden agregar a la bandeja sin que sobrepase su capacidad, sin embargo, la redacción utilizada es ambigua y les podría generar conflicto a los estudiantes e inducir a errores relacionados con la “dificultad en la comprensión del problema”, lo que podría llevar a una mala interpretación o de generar respuestas incorrectas.

Figura 9

Actividad con representaciones incongruentes



Fuente. Extraído de Isoda (2021b)

El uso de representaciones icónicas para dar sentido a los problemas es un recurso utilizado con frecuencia en el texto del estudiante y en el cuaderno de actividades. Sin embargo, observamos una situación en la que esta representación no está en concordancia con el lenguaje verbal, dado que en el problema se habla de “14 macetas” pero solo se representan 8 (Figura 9). Este conflicto por *representación incongruente* podría generar que el estudiante se guie únicamente por las representaciones (en este caso icónicas, dejando de lado el planteamiento de la actividad). A lo largo del texto del estudiante y del cuaderno de actividades, identificamos que la incógnita únicamente se presenta en el lado izquierdo de las ecuaciones e inecuaciones, esta *representación acotada* podría a llevar al estudiante a considerar que siempre encontrará la incógnita en el lado izquierdo. La representación incongruente podría asociarse a errores relacionados con “dificultad para obtener información espacial”, ya que el alumno podría guiar su solución solo por la representación icónica y no considerar todo el problema. Mientras que el conflicto por representación acotada, al restringirse a una sola representación, podría generar errores de tipo “aprendizaje deficiente de hechos destrezas y conocimientos previos”.

Conflictos Potenciales Identificados en los Libros de 6º Básico

Santillana

En este texto fue posible observar *situaciones no estudiadas previamente* que pueden resultar complejas cognitivamente para los estudiantes, como aquellas donde se les solicita definir qué es un patrón, una secuencia, una ecuación, la solución de una ecuación, una balanza o lenguaje algebraico. Es probable que los alumnos brinden ejemplos de lo que consideran es un patrón o una secuencia, sin embargo, esto podría conllevar a una potencial definición errónea de la noción, provocando un “aprendizaje de definiciones deformadas” y de bajo nivel cognitivo.

En la Figura 10, se muestra un procedimiento para representar algebraicamente una situación, donde el primer paso es “identificar el término matemático”. En dicha situación se identifica a la "tercera parte" como dicho término; sin embargo, es posible que un estudiante identifique "disminuyó" como un término matemático asociado a la operación de sustracción. Este tipo de procedimientos donde se presentan pasos a seguir y se tiene una *ausencia de argumentos* que permitan discernir en el tipo de acciones a realizar, pueden llevar a los estudiantes a identificar al álgebra como un conjunto de reglas o pasos a seguir. El conflicto potencial radica en la ausencia de argumentos, lo que podría desencadenar en errores relativos a un "aprendizaje deficiente", donde no hay proposiciones que justifiquen el procedimiento. Pero, además, el mismo conflicto podría originar errores relacionados con la "dificultad en la comprensión del problema"

Figura 10

Actividad sobre procedimiento para representar algebraicamente la situación

NOTICIAS

- Instituto duplicó sus matrículas este año.
- Empresa disminuyó sus ganancias a la tercera parte este año.

¿Cómo expresas matemáticamente la segunda noticia?

1. Identifica el término matemático.
   Empresa disminuyó sus ganancias a la tercera parte.
2. Interpreta el término.
   La expresión «tercera parte» hace referencia a «dividir por 3».
3. Responde.
   Si las ganancias del año pasado fueron x, las de este año son $\frac{x}{3}$.

Fuente. Adaptado de Alvarado, Rojas, Soto y Villalobos (2021).

Por otra parte, también se identificaron algunas *imprecisiones en el lenguaje* que pueden llevar a conflictos. Por ejemplo (ver Figura 11), cuando se menciona que "x representa a los números naturales" puede entenderse que x representa el conjunto de los números naturales ($x = \mathbb{N}$) y no que dicha literal representa a algún número natural cualquiera. Se evidencia un abuso del lenguaje que llevar a errores relacionados con la "dificultad del lenguaje", estos errores podrían ser arrastrados en niveles de estudio superiores.

Figura 11

Actividad con imprecisiones en el lenguaje.

1. Considera que x representa los números naturales. Escribe la expresión algebraica que representa los:
   a. números impares.
   b. múltiplos de 3.
   c. números pares.
   d. múltiplos de 10.

Fuente. Extraído de Alvarado, Rojas, Soto y Villalobos (2021).

Si bien consideramos pertinente que se presenten situaciones que admiten varias respuestas, es importante que en el texto se muestren las posibles respuestas y no únicamente una de ellas. Un ejemplo de esto se encuentra en la actividad que se solicita representar con una expresión algebraica “el doble de un número disminuido en 2”, no obstante, el solucionario toma como correcta la expresión $2x-2$, dejando de lado la posible solución $2(x-1)$. Con la presentación de *respuestas acotadas* en los textos y sin una apropiada discusión en clase, los alumnos podrían desarrollar la idea de que en matemáticas solo hay una respuesta correcta, sin identificar o analizar posibles equivalencias. En este texto también se identifican *definiciones acotadas* que pueden ser motivo de conflicto. Tal es el caso de la definición de ecuación como “una igualdad en que hay términos desconocidos o incógnitas” que admite expresiones que no son ecuaciones, tales como $a=b$ o $P=\frac{b\cdot h}{2}$. Estos conflictos por definiciones acotadas pudieran provocar errores relacionados con la “dificultad del lenguaje” y, debido a un mal uso de símbolos y conceptos, con “aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”.

Por otra parte, consideramos que la metáfora de la balanza y el uso de representaciones icónicas para representar ecuaciones son adecuados, aunque como hemos señalado, pueden representar una fuente de conflictos. Tal es el caso presentado en la Figura 12, donde se busca que los alumnos distingan en qué momento la balanza está en equilibrio y cuándo no lo está. Sin embargo, en las situaciones en las que no hay equilibrio, se presenta la balanza con la misma inclinación, a pesar de que debería cambiar su inclinación. Dado que las balanzas son familiares para los estudiantes, consideramos que por la forma en que se están representando, que es un conflicto por *representación contraria a la realidad*, se podrían producir errores sobre la “lógica y sentido de las matemáticas”, ya que visualmente no corresponde a la inclinación congruente según el equilibrio, por no decir que no hay una correspondencia con la lógica social, ya que no es el único tipo de balanza que conoce el alumno. Por otro lado, estos conflictos derivados de la representación, podría originar errores asociados a “dificultad para obtener información espacial”.

Figura 12

Actividad con balanzas y su punto de equilibrio.

Fuente. Extraído de Alvarado, Rojas, Soto y Villalobos (2021).

En la sección de ejercitación se solicita resolver una ecuación con incógnita en ambos miembros de la ecuación, lo cual es un ejemplo de *situaciones no estudiadas previamente,* pues a lo largo de la lección únicamente se presentan ecuaciones con incógnita en un miembro. Esta situación ha sido estudiada por autores como Filloy y Rojano (1989), quienes concluyen que es necesaria la intervención didáctica para el paso de ecuaciones con incógnita en un miembro de la ecuación a aquellas con incógnita en ambos miembros.

Continuando con el cuaderno de actividades, observamos que se solicita resolver ecuaciones que involucran paréntesis, a pesar de que en la lección no fueron estudiadas; esto atiende al conflicto potencial *uso de nociones que no se han introducido previamente*, lo que podría ocasionar errores asociados a la “dificultad del lenguaje y deficiencia de procedimientos que no han sido estudiados”. En concordancia con lo que sucede en los textos de 5° básico, se identificó que la única literal que aparece es x.

Conflictos Potenciales Identificados en los Libros de 7º Básico

El texto del estudiante de séptimo básico es de la editorial SM y la sección sobre temas de álgebra comienza con el estudio de las ecuaciones que se realizó en los dos grados anteriores. Para ello, se plantea una actividad relacionada con rapidez y se tiene que resolver una ecuación en la que la incógnita está en el denominador, lo cual conlleva un conflicto potencial por *procedimiento que no se ha introducido previamente*, que podría generar errores asociados con un “aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”. Posteriormente, se presentan actividades planteadas con lenguaje común y se solicita que se representen algebraicamente. Para ello, la actividad inicial pregunta “¿Cómo generalizarías la expresión 10 años más que la edad de una persona?”. Dicha pregunta se puede responder de varias maneras, por ejemplo, generalizando los años “n años más que la edad de una persona” o se podría pensar que la oración ya está generalizada al pensar que “la edad de una persona” es una expresión que refiere a cualquier edad. Esto último podría identificarse como un conflicto potencial debido a la *ambigüedad en el planteamiento de la actividad*, pues los estudiantes podrían tener “dificultad en la comprensión del problema” al no distinguir entre representación algebraica y generalización, en el desarrollo del pensamiento algebraico la generalización va más allá de una representación algebraica.

Aunado a esto, más adelante se menciona que el lenguaje algebraico sirve para expresar situaciones que necesitan generalizarse (ver Figura 13). Estas *definiciones acotadas* podrían llevar a que los estudiantes no identifiquen que este lenguaje también puede ser empleado para referirnos a casos particulares, por ejemplo, $ax = b$ representan un tipo de ecuaciones lineales. Este conflicto potencial puede llevar a errores asociados con un “aprendizaje de definiciones deformadas”, donde no se percibe claridad sobre el proceso de generalización.

Figura 13

Ejemplo de definición acotada

Expresar situaciones en lenguaje algebraico implica representar, con símbolos, números y letras, situaciones que necesitan generalizarse. Por ejemplo:

El perímetro de un cuadrado se calcula multiplicando por 4 la medida de su lado.

Lo anterior expresado en lenguaje algebraico es $P = 4a$, siendo a la medida del lado del cuadrado.

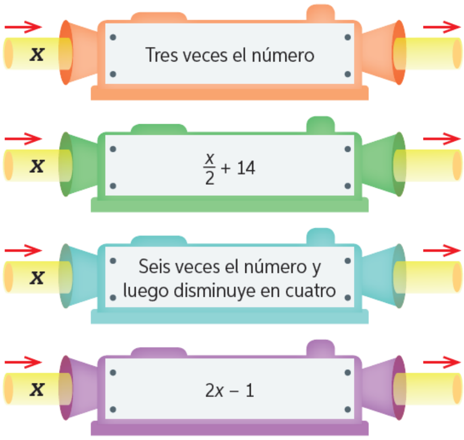
Fuente. Extraído de Iturra, Manosalva, Romero y Ramírez (2019)

El uso de representaciones icónicas puede ser útil para ayudar a los alumnos a comprender la situación dada, sin embargo, también puede ser una fuente de conflictos potenciales. Por ejemplo, en la Figura 14 se puede observar el *uso de la metáfora* de la máquina, si bien la representación puede ser útil para identificar cuál sería el resultado de que entre x a la máquina (inciso a), podría confundir al estudiante al pensar que debe realizar un procedimiento similar en el inciso b. Esta metáfora (Pino-Fan, Parra-Urrea y Castro, 2019) podría desencadenar errores relacionados con la “dificultad de interpretación correcta del lenguaje” al hacer un pasaje de un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico.

Figura 14

Actividad con uso de la metáfora de la máquina

Cada máquina realizó el proceso que se muestra.



a. Escribe una expresión algebraica para los procesos de las máquinas naranja y celeste.

b. Escribe en palabras el proceso que realizan las máquinas verde y morada.

Fuente. Extraído de Iturra, Manosalva, Romero y Ramírez (2019)

Al finalizar el estudio de la reducción de términos semejantes, se plantea una actividad a manera de “desafío” (ver Figura 15), dicha actividad implica realizar un *procedimiento que no se ha introducido previamente*, es por ello que los estudiantes podrían tener dificultades para multiplicar un polinomio por un monomio y podría llevarlos a identificar relaciones erróneas relacionadas con el “aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos”, en este caso el de la factorización.

Figura 15

Actividad a manera de desafío

Desafío En una prueba de álgebra, Raúl debe escribir una igualdad entre dos expresiones. Una de las respuestas que dio fue la siguiente:

$$3pq + 5pr - 2pz = (3q + 5r - 2z)p$$

a. Explica el razonamiento de Raúl. ¿Son iguales ambas expresiones?

b. Utiliza el procedimiento de Raúl para escribir una expresión equivalente a $5ab + 4ac - 7a$.

Fuente. Extraído de Iturra, Manosalva, Romero y Ramírez (2019)

En el cuaderno de actividades (Arce, 2019), encontramos que los estudiantes se enfrentan a situaciones en las que debe representar algebraicamente expresiones que involucran potencias, sin embargo, esto implica el conflicto potencial *uso de nociones que no se han introducido previamente*. En las situaciones propuestas también observamos *imprecisiones en el lenguaje* como conflictos potenciales. Por ejemplo, se propone una actividad en la que se debe determinar cuál es el ‘factor numérico’, aunque en el texto del estudiante se le denominó ‘coeficiente numérico’. Además, en la misma actividad, se pide determinar el grado del término, nuevamente aludiendo *uso de nociones que no se han introducido previamente*. Estos conflictos potenciales podrían generar errores relacionados con la “dificultad del lenguaje”, al no unificar los términos para referir a un mismo concepto.

Al estudiar la representación gráfica de una inecuación en el texto del estudiante, observamos *ausencia de argumentos*, dado que no se proporciona explicación sobre la representación de una inecuación que es mayor (menor) que y una mayor (menor) o igual que; sin embargo, sí se pide a los estudiantes que identifiquen y den argumentos sobre porqué es necesario representar gráficamente con un círculo o una circunferencia. Los errores asociados a la ausencia de argumentos podrían tener su origen en “dificultad del lenguaje”, al no diferenciar entre el mayor (menor) que, menor (mayor) que o mayor (menor) o igual que.

Conflictos Potenciales Identificados en los Libros de 8º Básico

El texto del estudiante de octavo básico es de la editorial Santillana. Se inicia con el estudio de la adición y sustracción de expresiones algebraicas, donde se establece un procedimiento para reducir una expresión algebraica. Se menciona que si se antecede un signo “+” se eliminen los paréntesis, mientras que si hay un signo “–” se debe multiplicar por -1. Sin embargo, identificamos una *ausencia de argumentos* al no indicar por qué se deben realizar estas acciones. El mismo conflicto potencial se presenta al establecer el procedimiento de resolución de ecuaciones que involucran fracciones (ver Figura 16) y al introducir el procedimiento de resolución de inecuaciones, dado que se menciona que al multiplicar por -1 ambos lados de la desigualdad, el sentido cambia, sin proporcionar argumentos de por qué debe realizarse y por qué cambia el sentido. Este conflicto potencial parece ser recurrente, independientemente de la editorial, pues fue identificado previamente en los textos del estudiante de quinto, sexto y séptimo básico. Los errores que pueden originarse están asociados a la “dificultad de lenguaje y deficiencia de procedimientos”.

Figura 16

Ejemplo de procedimiento de resolución de ecuaciones con fracciones

Resuelve la ecuación $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

1 $\frac{2x}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{5}{6} \cdot 6$ → Calculamos el mcm entre los denominadores, que en este caso es 6, y lo multiplicamos por cada término de la igualdad.

$4x - 3 = 5$

$4x - 3 + 3 = 5 + 3$ → Sumamos 3 en ambos lados de la igualdad.

$4x = 8$

$\frac{4}{4}x = \frac{8}{4}$ → Dividimos en 4 ambos lados de la igualdad.

$x = 2$

Fuente. Extraído de Torres y Caroca (2019a)

Durante el estudio de las ecuaciones, se proponen tareas de representación algebraica de situaciones en contexto extra-matemático, en particular, algunas relacionadas con edades. Si bien, la situación que se propone tiene solución matemática, no se identifica la pertinencia del contexto planteado y, por el contrario, podría parecer forzado, ya que la edad de una persona, en un momento dado, es un número fijo; por lo que, definirla como $n + 15$ evoca a variabilidad en n y no se hace explícito por qué se agregan 15. Este tipo de situación que se puede observar en la Figura 17 es un ejemplo de *contexto contrario a la realidad*. Este conflicto podría desencadenar errores asociados a dificultades por el "sentido de las matemáticas", pues no hay una restricción para el valor que representa "n" en el contexto social.

Figura 17

Ejemplo de actividad con contexto contrario a la realidad

La edad de Antonia se expresa como $(n + 15)$ años, donde n es un número natural, y su amigo Carlos tiene 3 años más que ella. Responde las siguientes preguntas utilizando una expresión algebraica.

a. ¿Cuántos años tiene Carlos?

b. ¿Qué edad tendrá Antonia en 5 años más?

c. ¿Cuántos años suman las edades actuales de Carlos y Antonia?

Fuente. Extraído de Torres y Caroca (2019a)

Además, en el cuaderno de actividades, se pide determinar una expresión equivalente a otra dada (ver Figura 18); sin embargo, la noción de "expresión equivalente" no ha sido estudiada durante la lección. Lo cual podría conllevar un conflicto potencial debido al *uso de nociones que no se han introducido previamente*. Asimismo, se plantean tareas en las que se involucra la resolución de una ecuación cuadrática, que tampoco fue parte del proceso de estudio de las ecuaciones o inecuaciones. Este mismo conflicto potencial se repite con una actividad sobre el estudio de funciones, donde se pide determinar el dominio y recorrido de una función, sin que estas nociones hayan sido estudiadas previamente. Este conflicto podría originar errores relacionados con la "deficiencia de hechos, destrezas y conocimientos previos", puesto que no hay un bagaje de conceptos, propiedades o procedimientos que garanticen claridad de los significados pretendidos por el libro de texto, a partir de los problemas propuestos.

Figura 18

Actividad sobre expresiones equivalentes

Marca la opción correcta. Justifica en cada caso.

6. Una expresión equivalente a $5x - 3x^2 - (5x - 3x^2)$ es:

A. 0 **C.** $10x$

B. $-6x^2$ **D.** $10x - 6x^2$

Fuente. Extraído de Torres y Caroca (2019b)

Síntesis de Conflictos Semióticos Potenciales Identificados y sus Vínculos con el Error

En este estudio hemos analizado las prácticas algebraicas que proponen los libros de texto de matemáticas de 5º, 6º, 7º y 8º de Educación Básica de Chile, para el estudio del álgebra. Con ese fin hemos logrado identificar que ciertos tratamientos que los libros hacen de cada uno de los objetos matemáticos que configuran las prácticas algebraicas (lenguajes, situaciones-problemas, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos, argumentos), pueden generar conflictos semióticos. Es decir, observamos que los conflictos semióticos potenciales (relacionados con la riqueza matemática) se pueden organizar de acuerdo con los objetos matemáticos primarios que propone el EOS. Además, se ha reflexionado sobre los errores que podrían generar los conflictos semióticos potenciales. La Tabla 2, presenta el resumen de los conflictos semióticos potenciales identificados y sus vínculos con los errores que podrían generar.

Tabla 2

Categorías de conflictos potenciales identificados

Objeto Matemático Primario	**Tipo de conflicto semiótico potencial**	**Descripción**	**Origen de los errores posibles asociados**
Situaciones-problema	Ambigüedad en el planteamiento de la actividad	Las indicaciones y los planteamientos no son claros o promueven diferentes interpretaciones, sin ser la intención de la actividad.	Dificultad en la compresión del problema. Dificultad de lenguaje.
	Contextos de uso acotados	Las actividades están enmarcadas en una acepción dejando de lado otros posibles usos de la noción.	Dificultad en la compresión del problema. Dificultad asociada al sentido de las matemáticas. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
	Situaciones no estudiadas previamente	Durante el proceso de estudio se propone un restringido campo de problemas y posteriormente se pide al estudiante que ese aprendizaje lo apliquen en contextos distintos.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Dificultad en la compresión del problema. Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas. Dificultad de lenguaje.
	Contexto contrario a la	Aquellas situaciones en las que el contexto es tan cercano a los	Dificultad asociada al sentido de las

Objeto Matemático Primario	Tipo de conflicto semiótico potencial	Descripción	Origen de los errores posibles asociados
	realidad	estudiantes que podría representar un conflicto sí se presentan inconsistencias en su planteamiento.	matemáticas.
Lenguajes	Representación incongruente	Se utilizan representaciones icónicas que no están en concordancia con lo que plantea la actividad.	Dificultad para obtener información espacial.
	Representación acotada	Únicamente se presentan situaciones en las que la literal empleada es la x o en que la incógnita se encuentra en lado izquierdo.	Dificultad para obtener información espacial. Dificultad de lenguaje. Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
	Imprecisiones en el lenguaje	Se utiliza un lenguaje matemático ambiguo.	Dificultad de lenguaje.
	Uso de la metáfora	Se presenta el uso de metáforas que no son las más adecuadas para la actividad que se promueve.	Dificultad de lenguaje.
	Representación contraria a la realidad	Se utilizan representaciones icónicas que no son congruentes con la realidad.	Dificultad asociada al sentido de las matemáticas. Dificultad para obtener información espacial.
Conceptos/ Definiciones	Ejemplar-tipo	En lugar de una definición "formal", ésta se plantea en ejemplos de la noción.	Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas. Dificultad de lenguaje.
	Inconsistencia entre definiciones	Se definen nociones que al entrar en contacto resultan contraponerse una a otra. Si bien, en matemáticas existen definiciones que son equivalentes, si no se hace explícita dicha equivalencia, es posible que el uso de los términos pueda representar una fuente de conflictos.	Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas.
	Uso de nociones que no se han introducido previamente	En las actividades planteadas se requiere el uso de nociones que tienen un uso específico dentro de la matemática y que no se han definido.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conocimientos previos. Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas. Dificultad de lenguaje.
	Definiciones acotadas	Definir una noción de manera restringida puede permitirnos un	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y

Objeto Matemático Primario	Tipo de conflicto semiótico potencial	Descripción	Origen de los errores posibles asociados
		primer acercamiento a la noción; sin embargo, no se trabaja en la construcción de una definición más robusta.	conceptos previos. Dificultad de lenguaje. Aprendizaje de teoremas o definiciones deformadas.
Procedimientos	Procedimiento acotado	Al presentar el procedimiento de un tipo de ecuación, se pueden establecer reglas que solo aplican para ese tipo y que, sin embargo, no apliquen para una generalidad de situaciones.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
	Procedimiento que no se ha introducido previamente	Se presentan actividades que requieren realizar procedimientos que hasta el momento no se han llevado a cabo en el proceso de estudio.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
	Respuestas acotadas	Algunas actividades admiten varias respuestas, sin embargo, en el texto no se hace explícito y se muestra únicamente una de las posibles respuestas.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Dificultad de lenguaje.
Argumentos	Ausencia de argumentos	Si la resolución de una tarea es dada en términos de "pasos a seguir", sin brindar argumentos de porqué se realizaron.	Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Dificultad de lenguaje. Dificultad en la comprensión del problema.

Fuente. Elaborado por los autores.

Reflexiones Finales

En esta investigación nos propusimos identificar y clasificar los conflictos semióticos potenciales de tipo epistémico presentes en los libros de texto de matemáticas de enseñanza básica de Chile, por la forma en que introducen el estudio del álgebra. Logramos identificar, describir y ejemplificar algunos de los principales posibles conflictos semióticos que pudieran ser fuente de errores y dificultades tanto para estudiantes como para profesores que se guíen principalmente de los libros para llevar a cabo procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra en ese nivel. Así, fue posible clasificar estos conflictos potenciales en términos de los objetos matemáticos primarios (Tabla 2), que formaban parte de las prácticas algebraicas de los libros: situaciones problema, lenguaje, definiciones, propiedades, procedimientos o argumentos.

Como se evidenció en la sección anterior (ver Tabla 2), identificamos conflictos originados principalmente por las imprecisiones en el lenguaje de las instrucciones de los ejemplos planteados (o problemas, tareas, ejercicios…), lo cual se relaciona con temas reportados en la literatura científica sobre de comprensión lectora del problema por parte de los estudiantes (Lugo-Armenta y Pino-Fan, 2021b; 2021c), lo que supone un desafío para los profesores, traducida en la atención que deben poner en el hecho de que los estudiantes efectivamente comprendan las instrucciones del problema o las explicaciones que se presentan en los libros, incorporando matices y complementando siempre que sea necesario.

Otro de los conflictos semióticos potenciales recurrentes, también referente al lenguaje, es el uso de metáforas, pues éstas se utilizan verbal o visualmente (íconos y figuras), para facilitar el acceso a las ideas matemáticas, aunque a veces, sin complemento por parte del profesorado (sólo basándose en lo presentado en el libro), lo que podría provocar interpretaciones erróneas sobre el significado de una noción; por ejemplo, el uso de la "máquina (Figura 14)" para representar funciones en donde la regla de correspondencia involucra la entrada de números o palabras, mientras que la salida sólo alude a números. Esta metáfora si bien es recurrente para ejemplificar la noción de función, este podría no ser significativo para el estudiante, pues su uso se restringe a que sólo tiene que hacer una interpretación de lenguaje común a lenguaje algebraico. Otro ejemplo es el uso de balanzas (Figura 12) cuando se estudian ecuaciones, muchas veces es necesario que el libro de texto sea complementado con las explicaciones o datos que se entregan a propósito de un problema, pues sin ellas el sentido o dirección de la balanza sería conflictivo.

Otro de los conflictos potenciales recurrentes, relacionado con las situaciones/problemas, fue el uso de contextos acotados. Siguiendo el ejemplo de la balanza, en uno de los libros analizados todos los ejemplos y problemas del bloque de álgebra relacionados con las ecuaciones, estaban dadas utilizando situaciones que involucraban el uso de balanzas (y las imágenes dadas para reforzar visualmente los ejemplos eran balanzas en "ciertas posiciones"). Esto podría llevar al estudiante a interpretar que ese contenido matemático "sirve" sólo para resolver problemas de balanzas. Sin embargo, algunas actividades al final del libro que se dejan para los estudiantes sobre este contenido, no involucran el uso de balanzas, por lo cual el profesor tendría la responsabilidad de complementar el tipo de situaciones y contextos de uso de las ecuaciones además de las que proporciona el libro.

En general, hemos logrado identificar y ejemplificar conflictos relacionados a definiciones y propiedades acotados o parciales; a la falta de argumentos de las demostraciones o procedimientos presentados, ambigüedades de las representaciones simbólicas, así como el uso de contextos alejados de la realidad en algunas tareas. Además, destacamos el hallazgo de varias actividades para las cuales se requería el uso de nociones que no se habían introducido de manera previa. Todos estos conflictos semióticos potenciales fueron discutidos y ejemplificados, proporcionando directrices a los profesores sobre aspectos que podría considerar para superar tales conflictos (complementando explicaciones, justificando procedimientos, proporcionando otros contextos de uso de las nociones matemáticas, etc.).

Desde nuestro punto de vista, este trabajo pretende hacer un llamado de atención, a la importancia que tiene el estudiar los conflictos que pueden generar el tipo de tratamiento que los libros de texto realizan de las nociones que pretenden enseñar. Esto en tanto que los libros de texto, como comentamos al inicio, aún siguen siendo la principal fuente de referencia de los profesores al momento de planificar y llevar a cabo su práctica de enseñanza (Love, y Pimm, 1996; Nicholls, 2005). Lo anterior permite ver que el análisis de los textos y la identificación de conflictos semióticos potenciales son una herramienta útil para docentes y autores de libros de texto. Por un lado, si los profesores tienen en cuenta estos posibles conflictos, pueden plantear actividades complementarias, de acuerdo con los requerimientos de sus alumnos. En el caso de los autores de libros de texto, podrían complementar las actividades, definiciones, etc., con el fin de reducir posibles conflictos, teniendo en cuenta las recomendaciones de la literatura. Aunado a esto, este tipo de trabajos resulta conveniente para los creadores de guías para los docentes que acompañan a los libros de texto, dado que podrían crear un "puente" entre lo planteado con el texto y la gestión que realizan los docentes de las actividades que ahí se plantean. Así, estudios como este sobre la identificación de conflictos semióticos potenciales son útiles al momento de tomar decisiones para la implementación de clases, puesto que permitiría considerar elementos fundamentales para complementar los significados pretendidos por los libros de texto y, así, agregar matices y precisiones matemáticas que ayuden a superar dificultades y errores frecuentes en los estudiantes.

Finalmente, debemos señalar la importancia de la herramienta teórico-metodológica *configuración ontosemiótica epistémica,* para el estudio de los significados y de los conflictos semióticos potenciales, a través de los elementos de la configuración (Godino y Font, 2006; Pino-Fan, et al., 2013). Por lo tanto, se abren amplias líneas de investigación relacionadas con la competencia de uso de dicha herramienta por parte de los profesores, para el análisis de los libros de texto y la identificación de posibles conflictos semióticos (Castillo, et al., 2022; Castro, et al., 2018; Pino-Fan, et al., 2018, 2022).

Financiamiento

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Aké, L. P., & Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, *30*(2), 171–201.

Alvarado, L., Carrero, M., & Caroca, M. (2021). *Texto del Estudiante Matemática 5° Básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Alvarado, J., Rojas, M., Soto, P., & Villalobos, N. (2021). *Texto del Estudiante Matemáticas 6° básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Arce, D. (2019). *Cuaderno de Actividades Matemáticas 7º Básico*. Santiago, Chile: SM

Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla: Díada Editora.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Cajaraville, J. A., & Gusmão, T. C. R. S. (2010). Significado referencial y personal de nociones algebraicas en educación Secundaria. El caso del número áureo. *Innovación Educativa*, *20*, 15–35. http://hdl.handle.net/10347/4995

Castillo, M. J., Burgos, M., & Godino, J. D. (2022). Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto. *Educación Matemática*, *34*(2), 39–71. https://doi.org/10.24844/EM3402.02

Castro, W. F., Pino-Fan, L. R., & Velásquez-Echavarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *14*(11), em1569. doi: https://doi.org/10.29333/ejmste/92017

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (6th Ed.). Nueva York: Routledge.

Contreras, A., & García M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *RELIME*, *14*(3), 277–310.

Demosthenous, E., & Stylianides, A. (2014). Algebra-Related Tasks in Primary School Textbooks. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle; S y Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*. (v. 2, p. 369-376). PME.

Filloy

, E. & Rojano, T. (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *8*(1), 67–98.

Fresno, C., Torres, C. & Ávila, J., (2020). *Texto del Estudiante Matemática 1° Medio*. Santiago, Chile: Santillana.

Gea, M. M., López-Martín, M. M., & Roa, R. (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (8), 29–49. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.113

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-Semiotic approach: Implications for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 171–201. https://www.jstor.org/stable/26742011

Godino, J. D., & Font, V. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: Su uso en la formación de profesores. *Educação Matematica Pesquisa*, *8*(1), pp. 67–98.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 247-265. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9278-x

González, M. T., & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389–408.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*, 535–558. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Howson G. (1995). *Mathematics Textbooks: a comparative study of grade 8 text*. Vancouver: Pacific Educational.

Isoda, M. (2021a). *Texto del Estudiante Matemática 5° Básico*. Santiago, Chile: Gakko Tosho Co, LTD.

Isoda, M. (2021b). *Cuaderno de Actividades Matemática 5° Básico*. Santiago, Chile: Gakko Tosho Co, LTD.

Isoda, M. (2021c). *Texto del Estudiante Matemática 6° Básico*. Santiago, Chile: Gakko Tosho Co, LTD.

Iturra, F., Manosalva, C., Romero, D., & Ramírez, M. (2019). *Texto del Estudiante de Matemática 7° Básico*. Santiago, Chile: SM.

López, E. M., Guerrero, A. C., Carrillo, J. & Contreras, L. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 73 – 94. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.122

Love, E., & Pimm, D. (1996). ‘This is so’: A text on texts. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409). Dordrecht: Kluwer.

Lugo-Armenta, J.G., Pino-Fan, L., & Ruiz, B. (2021a). Chi-square reference meanings: a historical-epistemological overview. *Revemop*, 3, 1-33. doi: 10.33532/revemop.e202108

Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. (2021b). Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student. *BOLEMA*, 35(71), 1776-1802. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25

Lugo-Armenta, J.G., & Pino-Fan, L. (2021c). Inferential statistical reasoning of math teachers: experiences in virtual contexts generated by the Covid-19 pandemic. *Education Sciences*, 11(7), 363. http://dx.doi.org/10.3390/educsci11070363

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2012). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2015). *Bases Curriculares Séptimo básico a Segundo Medio*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3–14.

Nicholls, J. (2005). The philosophical underpinnings of school textbook research. *Paradigm*, *3*(3), pp. 25–35.

Palacios, F., & Jiménez, J. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Análisis de libros de texto. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *20*(2), 369-386. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21826

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font, V. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Online First. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, *34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *11*(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*, *1*(1), 16–20.

Ramírez, R. A., Ibarra, S. E., & Pino-Fan, L. R. (2020). Prácticas evaluativas y significados evaluados por profesores del bachillerato mexicano sobre la noción de ecuación lineal. *Educación matemática*, *32*(2), 69–98. https://doi.org/10.24844/em3202.03

Remillard, J. T. (2005). Examining Key Concepts in Research on Teachers' Use of Mathematics Curricula. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rezat, S. (2006). The structures of German mathematics textbooks. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *38*(6), 482–487. https://doi.org/10.1007/BF02652785

Rojas, M., Tapia, M., & Núñez, M. (2021). *Cuaderno de Actividades Matemática 6° Básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Romero, L. A. (2011). "Enfrentar al enano nacionalista": una mirada a los libros de texto. *Reseñas de Enseñanza de la Historia*, (9), 289–289. http://170.210.83.53/index.php/resenas/article/view/3806

Salcedo, A., Molina-Portillo, E., Ramírez, T., & Contreras, J. M. (2018). Conflictos semióticos sobre estadística en libros de texto de matemáticas de primaria y bachillerato. *Revista de Pedagogía*, *39*(104), 223–244.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). Barcelona: Ice - Horsori.

Torres, C., & Caroca, M. (2019a). *Texto del Estudiante de Matemática 8° Básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Torres, C., & Caroca, M. (2019b). *Cuaderno de Actividades Matemática 8° Básico*. Santiago, Chile: Santillana.

Valencia, A., & Valenzuela, J. (2017). ¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto. *Educación Matemática*, *29*(3), 51–78. https://doi.org/10.24844/em2903.02

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Nueva York: Springer Science & Business Media.