

Estudio analítico y numérico de probetas agrietadas sometidas a tensión

Analytical and numerical study of cracked specimens under tension load

^{1*}Jesús Manuel Germán-Carcaño, ¹Guillermo Urriolagoitia-Sosa, ¹Beatriz Romero-Ángeles, ¹Daniel Maya-Anaya, ¹Arturo Sánchez-Cervantes, ¹Martín Iván Correa-Corona, ¹Guillermo Manuel Urriolagoitia-Calderón

¹Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Ciudad de México, México. Correos electrónicos: german_17jun@hotmail.com; guiurri@hotmail.com; romerobeatriz97@hotmail.com; danmaa02@gmail.com; arturc4@hotmail.com; ingeniería.ivan.95@gmail.com; urrio332@hotmail.com ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-6705-5851>; <https://orcid.org/0000-0002-7488-3323>; <https://orcid.org/0000-0001-6345-3726>; <https://orcid.org/0000-0002-0138-6465>; <https://orcid.org/0000-0001-5749-3211>; <https://orcid.org/0000-0002-2080-3391>; <https://orcid.org/0000-0001-7867-7386>

*Autor para correspondencia

Recibido: 17 de abril del 2023
Aceptado: 23 de octubre del 2023
Publicado: 31 de enero del 2024
<https://doi.org/10.33064/iycuaa2024914481e4481>

Resumen

Este trabajo describe la evaluación analítica del Factor de Intensidad de Esfuerzo (SIF) para cuatro especímenes, sometidos a una tensión de 15 MPa y una longitud de grieta de 25 mm. Posteriormente, con ayuda del programa ANSYS S[®] se realizan las simulaciones numéricas donde se obtiene el SIF, para los especímenes estudiados analíticamente. Adicionalmente, se muestran los campos de esfuerzos σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$ cercanos a la punta de la fisura. A continuación, se calcula el porcentaje de variación de los análisis antes realizados, con resultados positivos en todos los casos (< 0.4 %). Por lo que se puede aseverar que es confiable el uso del Método de Elementos Finitos (MEF) a través del programa ANSYS[®], para la solución de problemas en fractura. Además, de que el trabajo numérico realizado puede proporcionar algunas pautas para mejorar la estimación del SIF en problemas bidimensionales.

Palabras clave: ANSYS[®]; longitud de grieta; MEF; SIF; campo de esfuerzos; bidimensional.

Abstract

This work describes the analytical evaluation of the Stress Intensity Factor (SIF) for four specimens subjected to a stress of 15 MPa and a crack length of 25 mm. Subsequently, numerical simulations are performed using the software ANSYS[®] to obtain the SIF values for the analytically studied specimens. Additionally, the stress fields σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} and $\sigma_{Von Mises}$ in the vicinity of the crack tip are shown. Subsequently, the percentage of variation of the analyses previously performed is calculated, with positive results in all cases (< 0.4 %). Therefore, it can be asserted that the use of the Finite Element Method (FEM) through the

ANSYS® program is reliable for the solution of fracture problems. In addition, the numerical work performed can provide some guidelines to improve the estimation of the SIF in two-dimensional problems.

Keywords: ANSYS®; crack length; FEM; SIF; stress fields; two-dimensional.

Introducción

Al diseñar estructuras y elementos de máquinas, todas las piezas deben funcionar correctamente. Por este motivo, se desarrollan métodos de diseño capaces de calcular el valor de la carga que debe aplicarse, que puede compararse con un valor límite, para garantizar un diseño seguro. En el siglo pasado, se creía que el diseño basado en las tensiones de funcionamiento de las piezas, comparadas con las tensiones límite de los materiales, era condición suficiente para que funcionaran satisfactoriamente. Sin embargo, los elementos que se consideraban bien diseñados fallaban y provocaban varios accidentes en la industria, y muchas veces, los fallos se producían por la presencia de pequeñas deformaciones, es decir, presentaban un comportamiento frágil del material (Lancaster, 2005). Estos incidentes llevaron al desarrollo de lo que hoy se conoce como Mecánica de la Fractura (MF). La MF trata de explicar el comportamiento de un material que se agrieta al ser sometido a una carga. Surge así un nuevo criterio de fallo que considera los defectos mecánicos del material. Los parámetros que definen la Mecánica de Fractura Elástica Lineal (MFEL) son el Factor de Intensidad de Esfuerzo (K) o también conocido como SIF en sus siglas en inglés y la tasa de liberación de energía (G), ambos parámetros se distinguen por su alto nivel de complejidad a la hora de obtenerlos y durante las últimas cinco décadas muchos investigadores se han involucrado en este proceso, siguiendo diferentes caminos para tratar de facilitar su obtención (Farahmand, 2001; Gómez et al., 2009; Guo, et al., 2021; Nianga et al., 2019; Saito et al., 2021; Takaki & Gotoh, 2020; Zhang et al., 2022). Los antecedentes teóricos de la MF se basan en los modos de carga de los componentes agrietados, como se describen a continuación: Modo I (modo de apertura) en este modo el esfuerzo de tensión actúa perpendicular al frente de la grieta lo que provoca su apertura, ocurre con mayor frecuencia y produce gran daño, por lo que es la más estudiada y utilizada en el diseño estructural, análisis de fallas, etc. Modo II (modo cortante) corresponde al corte de la cara de la grieta debido a esfuerzos cortantes en el plano. Modo III (modo de desgarramiento) está inducido por esfuerzos cortantes fuera del plano y no ocurre con tanta frecuencia (González-Velázquez, 2020). Uno de los primeros exponentes es Irwin quien desarrolló uno de los avances más importantes del MFEL al proponer la descripción del campo de esfuerzo en el extremo de la grieta mediante un único parámetro

al que denominó SIF, que puede definir de forma unívoca el estado de esfuerzos en el extremo de la grieta, y que puede expresarse como (Perez, 2017):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

Donde σ es el esfuerzo de tensión aplicado y a es la longitud de fisura.

La solución obtenida expresada en la Ecuación 1 es para el caso idealizado de una placa agrietada infinita. Pero en grietas reales se ven afectados por la geometría del componente, la carga aplicada, y el tipo y tamaño de la grieta, la ecuación se puede generalizar como (Sun & Jin, 2012):

$$K_I = F * \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

Donde F es un factor adimensional que depende de la geometría del componente, σ es el esfuerzo de tensión aplicado y a es la longitud de fisura. Como se puede observar en la Ecuación 2, el valor del SIF incrementa con el aumento del esfuerzo y la longitud de la grieta hasta llegar a un valor crítico K_{IC} . El K_{IC} se refiere a la condición en la que una grieta se propaga de manera inestable (Glodež & Aberšek, 2020).

Existen muchos métodos para determinar el SIF. Los métodos analíticos basados en la teoría de la elasticidad proporcionan muchos resultados básicos para situaciones ideales. Los métodos numéricos basados en elementos finitos o elementos de contorno se utilizan ampliamente para la geometría finita. También se han empleado técnicas experimentales como la fotoelasticidad y las galgas extensométricas (Li & Mao, 2022; Paarmann & Sander, 2020). Sin embargo, para geometrías complejas o en condiciones de carga combinadas (combinación de modos de carga), no existen soluciones analíticas para el cálculo del SIF. En tales casos, se suele recurrir al uso del MEF para obtener K . Con el uso del MEF, es posible determinar las soluciones de los campos de esfuerzos o deformaciones en todo el componente y las más cercanas a la punta de la grieta. Con los avances tecnológicos y computacionales desde los años 70, se han hecho muchos intentos de utilizar el MEF para obtener K (Rybicki & Kanninen, 1977). Años más tarde Owen y Fawkes (1983) escribieron un libro donde demostraban el uso del MEF para el cálculo del SIF. Otro ejemplo es el trabajo realizado por Hellen (1989) que aplicó un nuevo método de extensión virtual de grietas en el sistema de elementos finitos para calcular parámetros de fractura para materiales no lineales, utilizando una teoría basada en incrementos. Ya en años más recientes Surendran et al. (2019) emplearon una variación del MEF para simular el crecimiento de grietas por fatiga; a diferencia del método convencional, este método no requiere una técnica especial de integración numérica para integrar los términos de la matriz de rigidez. Por su parte Han et al. (2019) llevaron a cabo un procedimiento para obtener los SIFs donde

introducen las expansiones asintóticas para describir los campos físicos de la región singular y transforma la ecuación gobernante elástica a las ecuaciones diferenciales ordinarias características. Por otro lado, Yuan et al. (2019) aplicaron la función de peso para calcular los SIFs para grietas superficiales semi-elípticas de alta relación de aspecto en placas de espesor finito sometidas a campos de esfuerzo bidimensionales arbitrarios. Más adelante, Zvyagin et al. (2021) desarrollaron un nuevo programa que permite determinar los campos de esfuerzo y desplazamiento en un cuerpo elástico tridimensional debilitado por un sistema de grietas orientadas arbitrariamente, el cual está basado en el método de desplazamientos discontinuos, implementado en códigos C++. Al siguiente año, Yakovlev (2022) obtuvo las ecuaciones para calcular los SIFs en probetas con un defecto superficial, con la finalidad de interpretar datos experimentales de la tasa de crecimiento de la grieta a temperaturas elevadas. A su vez, Jin et al. (2022) desarrollaron extensos modelos tridimensionales para muestras compactas en las que cambiaron la profundidad de la grieta, los espesores y la inclinación de las cargas, con el objetivo de predecir los ángulos de inicio de la grieta basándose en el criterio de fractura en modo mixto.

Materiales y Métodos

En el presente estudio se enfoca en el análisis del SIF para cuatro diferentes especímenes sometidos a un esfuerzo de tensión uniaxial (Modo I).

Cálculo teórico

A continuación, se presenta el desarrollo del cálculo analítico en dos dimensiones del SIF, por medio de formulaciones matemáticas, basadas en la teoría de la MFLE por lo que se asume que el material es homogéneo, lineal, isotrópico y continuo (de León et al, 2018; Hibbeler, 2006). Las dimensiones y la carga propuestas para los distintos especímenes se exhiben en la Figura 1.

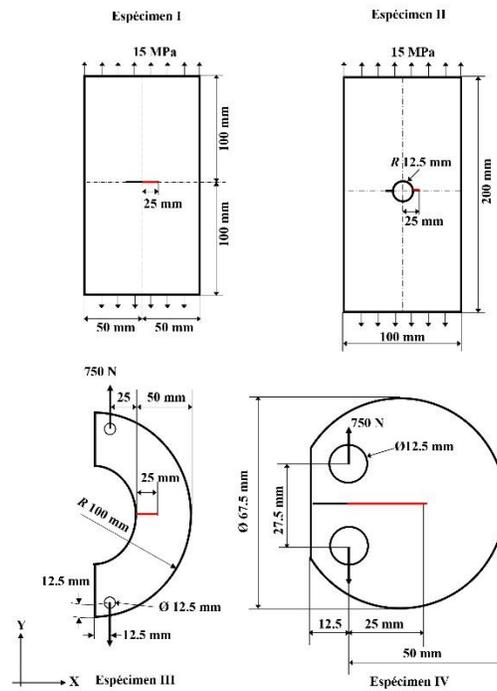


Figura 1. Dimensiones y condiciones de cargas de los especímenes.
Elaboración propia.

El cálculo de espécimen I involucra las dimensiones planteadas en la Figura 1 y los conceptos introducidos por Hiroshi (1971), los cuales se resumen en la siguiente expresión:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} * \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{w} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2w}} \quad (3)$$

Donde σ es el esfuerzo de tensión aplicado, a es la longitud de fisura y w es $\frac{1}{2}$ del ancho de la placa.

Reemplazando las incógnitas en la Ecuación 3 y desarrollándola, se tiene que:

$$K_I = 15 \sqrt{\pi(25)} * \left[1 - 0.025 \left(\frac{25}{50} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{25}{50} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi(25)}{100}} = 157.690 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

En el caso del espécimen II con las dimensiones expuestas en la Figura 1 se obtienen los siguientes parámetros:

$$\frac{H}{W} = \frac{200}{100} = 2, \frac{2a}{W} = \frac{2(25)}{100} = 0.5, \frac{2R}{W} = \frac{2(12.5)}{100} = 0.25$$

Donde R es el radio del orificio, H es el alto y W el ancho de la placa.

Con la ayuda de la teoría y los conceptos desarrollados por Newman et al. (1971) se obtiene el factor de forma $F = 1.2853$, sustituyendo toda la información en la Ecuación 2 y desarrollándola, se tiene que:

$$K_I = 15\sqrt{\pi(25)} * 1.28530 = 170.860 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

En el caso del espécimen III Aplicando el trabajo de Kapp et al (1980) se puede calcular K_I y se realiza a través de la siguiente ecuación:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \left(3\frac{x}{W} + 1.9 + 1.1A \right) \left[1 + 0.25(1 - A)^2 \frac{W}{R} \right] \frac{3.74 - 6.30A + 6.32A^2 - 2.43A^3}{\sqrt{\pi(1-A)^{\frac{3}{2}}}} \quad (4)$$

Donde σ es el esfuerzo de tensión aplicado, a es la longitud de fisura, W es ancho, R el radio de la placa, X distancia de la carga a inicio de la grieta y A es la relación de la longitud de la grieta y el ancho de la placa. Con:

$$\sigma = \frac{P}{W * t}, \quad A = \frac{a}{W} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \sigma = \frac{750 \text{ N}}{(50 \text{ mm})(1 \text{ mm})} = 15 \text{ MPa}, \quad A = \frac{25}{100} = 0.25$$

Remplazando las incógnitas en la Ecuación 4 y desarrollándola, se obtiene que:

$$K_I = 15\sqrt{\pi(25)} \left(3\frac{25}{50} + 1.9 + 1.1 * .25 \right) \left[1 + 0.25(1-.25)^2 \frac{50}{100} \right] \frac{3.74 - 6.30 *.25 + 6.32 (.25)^2 - 2.43 (.25)^3}{\sqrt{\pi(1-.25)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$K_I = 1612.638 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Para el espécimen IV, por medio de la teoría de Newman (1981) es posible el cálculo K_I y se realiza por medio de la siguiente expresión:

$$K_I = \sigma\sqrt{W} * \frac{(2+A)(0.76+4.8A-11.58A^2+11.43A^3-4.08A^4)}{(1-A)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Donde:

$$\sigma = \frac{P}{Wt}, \quad A = \frac{a}{W}$$

$$\sigma = \frac{750 \text{ N}}{(50 \text{ mm})(1 \text{ mm})} = 15 \text{ MPa}, \quad A = \frac{25}{50} = 0.5$$

Remplazando las incógnitas en la Ecuación 5 y desarrollándola, se tiene que:

$$K_I = 15\sqrt{50} * \frac{(2+0.5)(0.76+4.8(0.5)-11.58(0.5)^2+11.43(0.5)^3-4.08(0.5)^4)}{(1-0.5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$K_I = 1079.062 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Del estudio anterior se observa que el cálculo analítico del SIF es independiente del material, ya que en las formulaciones matemáticas presentadas no incluyen ninguna variable que dependa de sus propiedades, lo que si cambia en cada una de ellas es el factor de forma F ya que es único para cada geometría.

Simulación numérica

Como continuación del estudio de SIF, la sección actual se centra en la estimación numérica de los casos previamente determinados por métodos analíticos. Para ello, se eligió utilizar el MEF con el fin de evaluar su precisión en cotejo con los valores resultantes calculados previamente. En este análisis se utiliza el programa de computadora ANSYS® 2022 R1 que utiliza al MEF como algoritmo de solución numérica. Para el desarrollo de cada uno de los modelos se aplican las mismas consideraciones los cuales son:

Tipo de análisis. – Análisis estructural en 2D.

Tipo de elemento. – PLANE 183 es un elemento 2D formado por ocho o seis nodos, con libertad de movimiento en el eje Y, eje X y rotación en Z.

Teoría Mecánica. – Esfuerzo plano.

Propiedades mecánicas. – Material con Módulo de Young $E=200\ 000 \text{ N/mm}^2$ y coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. Además, de que se considera lineal, isotrópico y homogéneo.

Con el fin de ahorrar recursos computacionales, los modelos se simplifican con ayuda de las herramientas de simetría incluidas en el programa ANSYS®. Como resultado, solamente se genera la geometría de una cuarta parte de la placa para los dos primeros especímenes y la mitad para los especímenes III y IV, con las dimensiones y condiciones de frontera que se muestran en la siguiente ilustración (Figura 2):

La obtención de K_I se lleva a cabo por medio del comando CINT incorporado en el programa de computadora ANSYS®, el cual se rige por las leyes de la MFEL.

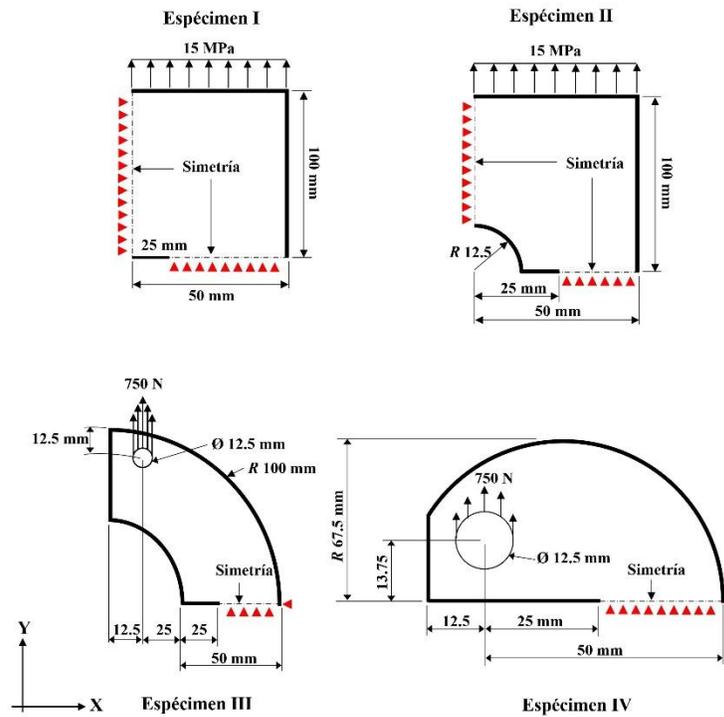


Figura 2. Dimensiones de los modelos numéricos para los distintos especímenes. Elaboración propia.

Discretizado, condiciones de frontera y carga aplicada

Para el caso del espécimen I, se dividen el componente para obtener elementos de 1×1 mm². Por medio del comando KSCON se incorpora un concentrador de malla en la punta de la grieta con los siguientes valores; tamaño del primer y segundo radio de los elementos con valor de 0.5 mm cada uno, división de 12 elementos en la dirección circunferencial y se sesga 1/4 de punto los nodos de la parte media de la primera fila de elementos, con la finalidad de realizar una discretización más fina (German-Carcaño et al., 2019). Subsiguientemente, se coloca en la parte superior del espécimen una presión uniforme de 15 MPa y las condiciones de contorno se aplican en forma de simetría en las líneas inferior y derecha del componente (Figura 3).

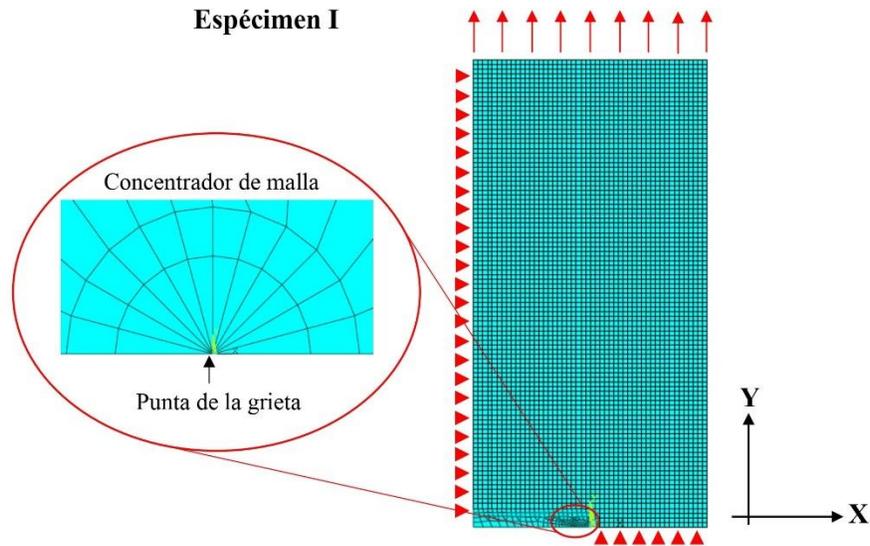


Figura 3. Discretizado, aplicación de presión y condiciones de frontera del espécimen I. Elaboración propia.

En el caso del espécimen II, se sigue la misma configuración del discretizado que en el caso del espécimen I. Posteriormente, se ubica en la parte superior del espécimen una presión uniforme de 15 MPa. De la misma manera, las condiciones de contorno se colocan en forma de simetría en las líneas inferior y derecha del componente (Figura 4).

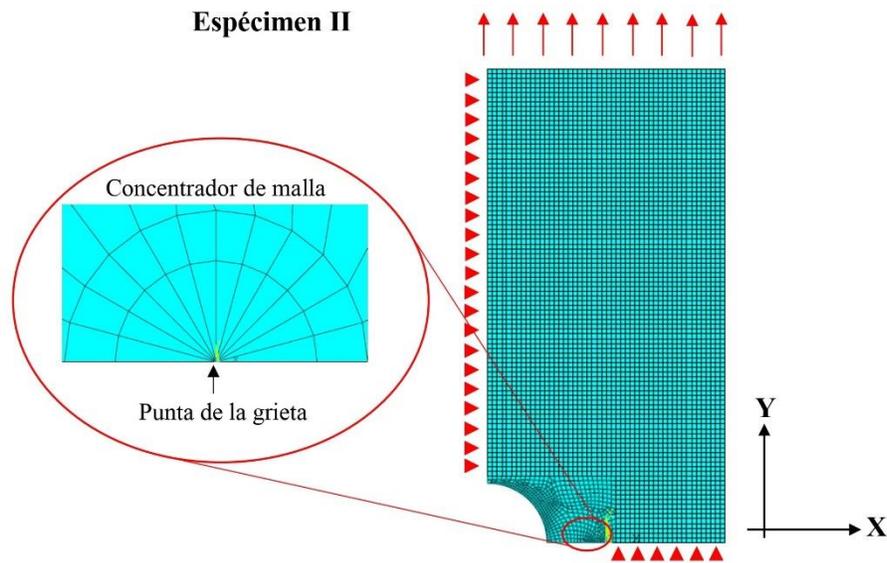


Figura 4. Discretizado, aplicación de presión y condiciones de frontera del espécimen II. Elaboración propia.

Para el espécimen III, se sigue la misma configuración del discretizado que en el caso del espécimen I. Se aplica una fuerza paralela al eje Y de forma uniforme, es necesario dividir el valor de 750 N entre los nodos creados a partir de la línea superior del barreno. Asimismo, las condiciones de contorno se ubican en forma de simetría en la línea inferior del componente (Figura 5).

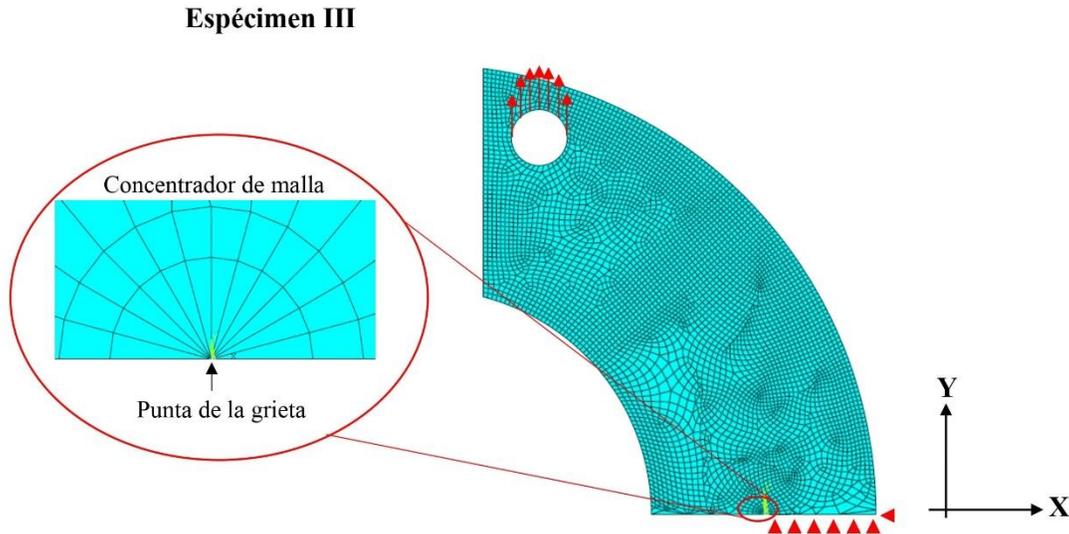


Figura 5. Discretizado, aplicación de fuerza y condiciones de frontera del espécimen III. Elaboración propia.

En el caso del espécimen IV, se sigue la misma configuración del discretizado que en el caso del espécimen I. Se aplica una fuerza paralela al eje Y de forma uniforme, es necesario dividir el valor de 750 N entre los nodos creados a partir de la línea superior del barreno, además, las condiciones de contorno se ubican en forma de simetría en la inferior del componente (Figura 6).

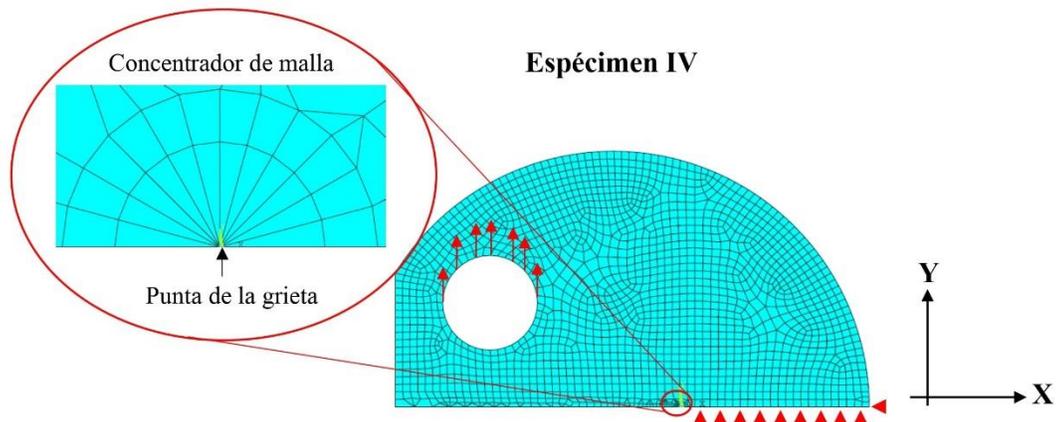


Figura 6. Discretizado, aplicación de fuerza y condiciones de frontera del espécimen IV. Elaboración propia.

Resultados

A continuación, se presenta en la Tabla 1 una comparación de los resultados obtenidos de los estudios analíticos y numéricos desarrollados, con la finalidad de cotejar y calcular el porcentaje de variación para cada uno de los casos.

Tabla 1
Porcentaje de variación del K_I para los distintos especímenes

Especimen	K_I MPa $\sqrt{\text{mm}}$		%
	Analítico	Numérico	
I	157.690	157.752	0.039
II	170.860	170.726	0.078
III	1612.638	1611.645	0.061
IV	1079.062	1075.090	0.368

Nota: Elaboración propia

Como complemento del estudio se presentan los campos de esfuerzo σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$ para el espécimen I y su ilustración en la Figura 7.

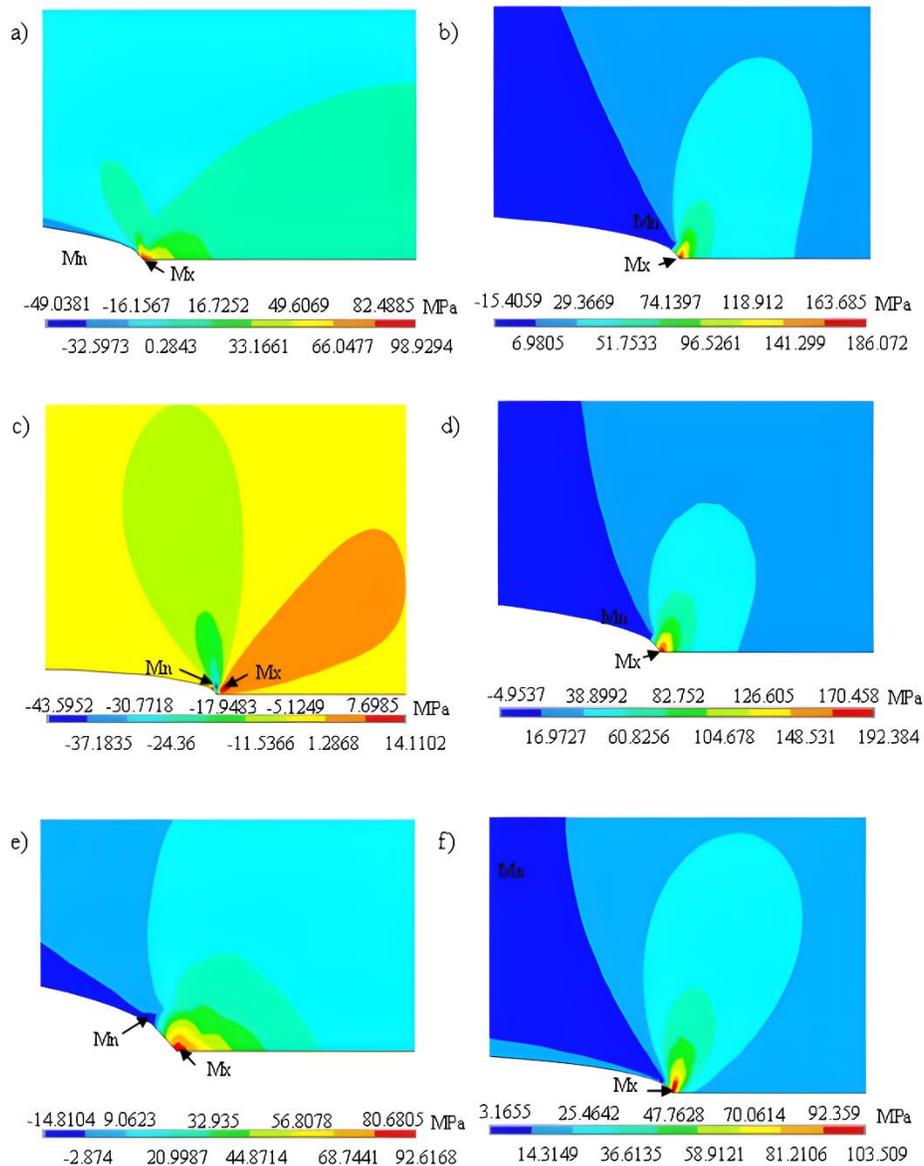


Figura 7. Campos de esfuerzos del espécimen I. a) σ_x . b) σ_y . c) τ_{xy} . d) σ_{Max} . e) σ_{Min} . f) $\sigma_{Von Mises}$. Elaboración propia.

En la Figura 8 se presentan los campos de esfuerzo σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$ para el caso del espécimen II.

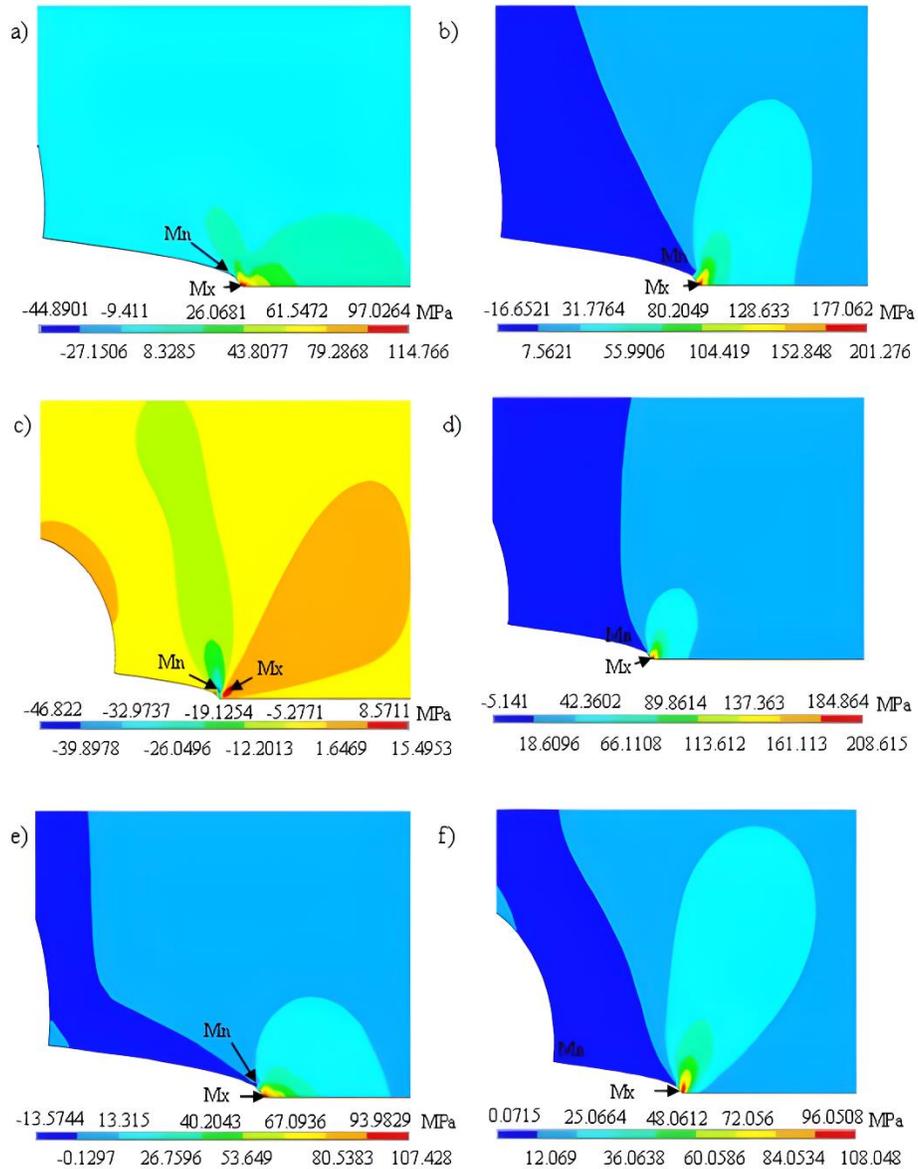


Figura 8. Campos de esfuerzos del espécimen II. a) σ_x . b) σ_y . c) T_{xy} . d) σ_{Max} . e) σ_{Min} . f) $\sigma_{Von Mises}$. Elaboración propia.

En la Figura 9 se presentan los campos de esfuerzo σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$ para el caso del espécimen III.

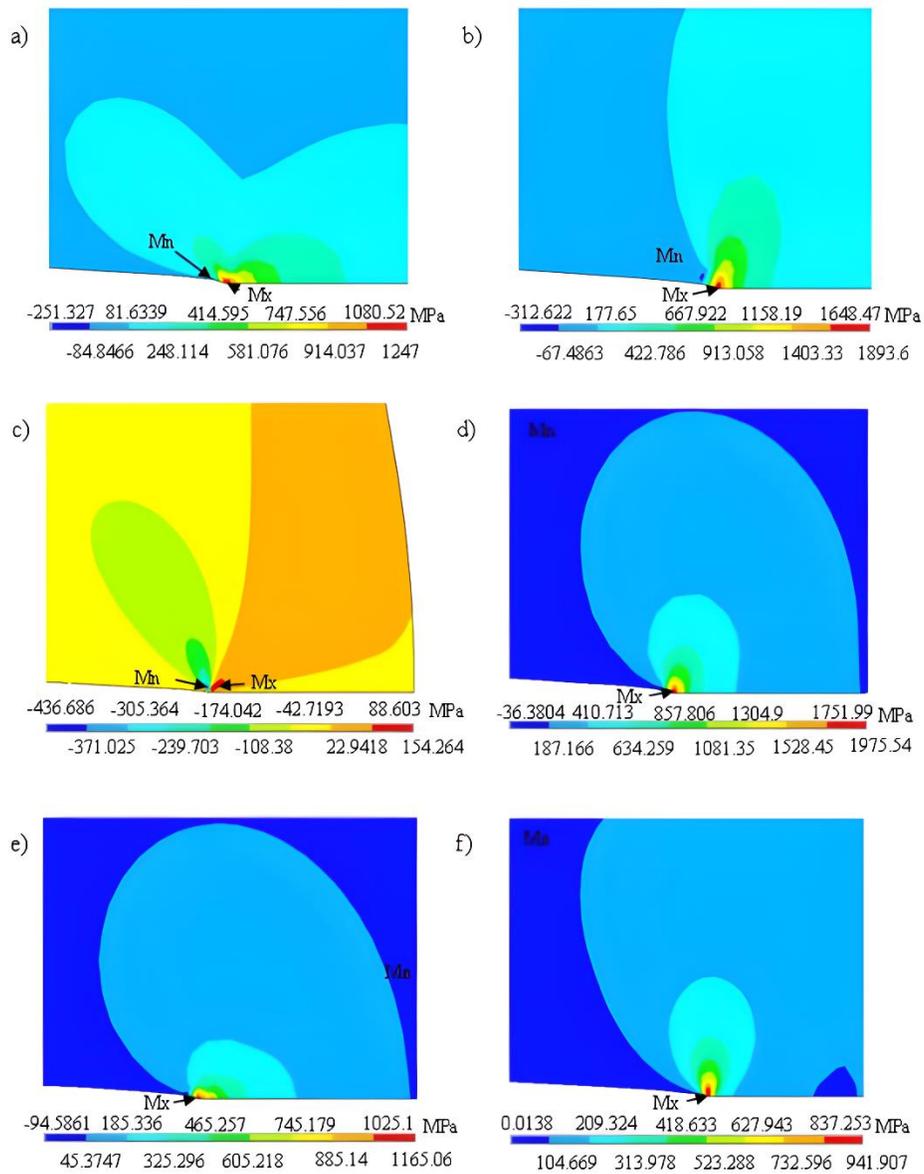


Figura 9. Campos de esfuerzos del espécimen III. a) σ_x . b) σ_y . c) T_{xy} . d) σ_{Max} . e) σ_{Min} . f) $\sigma_{Von Mises}$. Elaboración propia.

En la Figura 10 se presentan los campos de esfuerzo σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$ para el caso del espécimen IV.

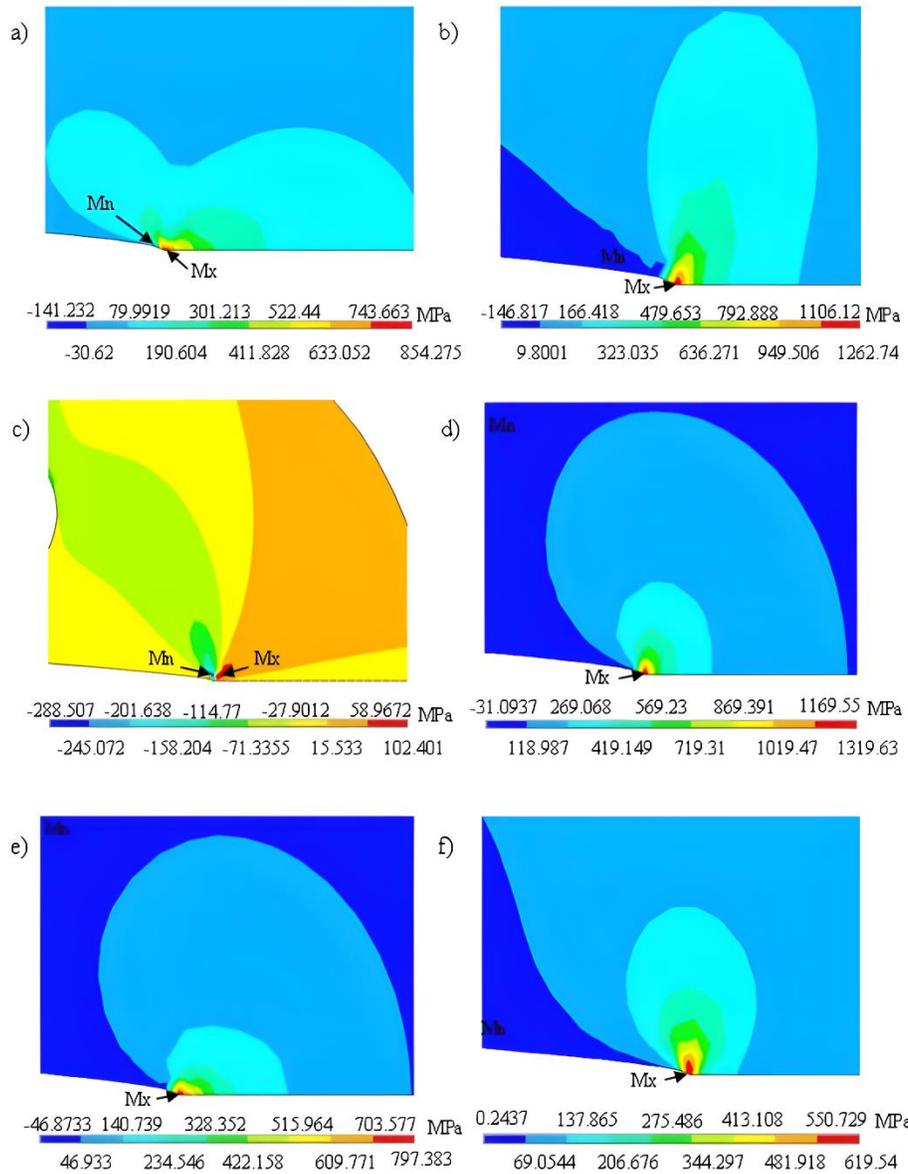


Figura 10. Campos de esfuerzos del espécimen IV. a) σ_x . b) σ_y . c) T_{xy} . d) σ_{Max} . e) σ_{Min} . f) $\sigma_{Von Mises}$. Elaboración propia.

Como la finalidad de compactar la información obtenida en las distintas simulaciones, se presenta en la Tabla 2 los valores máximos para los esfuerzos σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} y $\sigma_{Von Mises}$.

Tabla 2

Compilación de resultados para los esfuerzos σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} , and $\sigma_{Von Mises}$ para los distintos especímenes

Especímen	MPa					
	σ_x	σ_y	T_{xy}	σ_{Max}	σ_{Min}	$\sigma_{Von Mises}$
I	98.9294	186.072	14.1102	192.384	92.6168	103.509
II	114.766	201.276	15.4953	208.615	107.428	108.048
III	1247	1893.6	154.264	1975.54	1165.06	941.907
IV	854.275	1262.74	102.401	1319.63	797.383	619.54

Nota: Elaboración propia.

Discusión

En este trabajo se establecen las condiciones para obtención numérica del SIF en cuatro distintos especímenes, La comparación de los resultados analíticos y numéricos se presenta al final de este estudio con la finalidad de obtener el porcentaje de variación de estos análisis, con valores resultantes positivos ya que se encuentran por debajo del 0.4% para el espécimen IV y menor al 0.1% para los tres primeros casos presentados. Además, como complemento del análisis se exhiben los campos de esfuerzos σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} Y $\sigma_{Von Mises}$ que se presentan en la cercanía de la punta de la grieta, al realizar una comparación visual de los gráficos se puede notar una similitud en la distribución de los campos de esfuerzos del espécimen I frente al espécimen II y de forma equivalente en los casos de los especímenes III frente al espécimen IV, mostrando los valores máximos de todos los esfuerzos (σ_x , σ_y , T_{xy} , σ_{Max} , σ_{Min} Y $\sigma_{Von Mises}$) en el espécimen III y los mínimos para el caso del espécimen I.

Conclusiones

Los valores de K_I obtenidos mediante las simulaciones numéricas están estrechamente relacionados a los calculados analíticamente, por lo que se puede aseverar que es confiable el uso del MEF a través del programa ANSYS para la solución de problemas en fractura, a pesar de ser un paquete computacional general no exclusivo a la Mecánica de la Fractura. Basándose en la Mecánica de la Fractura Lineal Elástica, el parámetro más importante para determinar la vida útil del material debido al crecimiento de una grieta es el SIF, por lo que el estudio numérico aquí presentado puede proporcionar algunas pautas para mejorar la estimación del SIF en problemas de modelos agrietados sometidos a tensión

en dos dimensiones, lo que podría ayudar a realizar diseños más seguros y brindar la posibilidad de evaluar la fiabilidad y vida útil de los elementos que ya posean defectos como lo son las grietas.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional y al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONHACyT) el apoyo prestado para la elaboración de este trabajo.

Referencias

- De León, V., González, V. L., Rosete, J. C., & de León, N. (2018). *Mecánica de materiales: Teoría y aplicaciones*. Grupo Editorial Patria.
- Farahmand, B. (2001). Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) and Applications. En *Fracture Mechanics of Metals, Composites, Welds, and Bolted Joints: Application of LEFM, EPFM, and FMDM Theory* (pp. 52-117). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-1585-2_2
- German-Carcaño, J. M., Romero-Ángeles, B., Martínez-Reyes, J., Díaz-Léon, C., & Uriolagoitia-Sosa, G. (2019, septiembre). *Corroboración numérica (MEF) del factor de intensidad de esfuerzo en una placa con grieta en el centro en Modo I de carga*. Presentado en 14 Congreso Científico-Tecnológico de las Carreras de Ingeniería (Ime, Industrial e Itse), Ciudad de México, México. https://www.cuautitlan.unam.mx/memorias_cct.html
- Glodež, S., & Aberšek, B. (2020). *The Life of Cracks: Theory and Application*. Cambridge Scholars Publishing. Recuperado de <https://books.google.com.mx/books?id=kLxDwAAQBAJ>
- Gómez, L. H. H., Calderón, G. U., Sosa, G. U., Pineda, J. M. S., Cruz, E. A. M., & García, J. F. G. (2009). Assessment of the structural integrity of cracked cylindrical geometries applying the EVTUBAG program. *Revista Técnica de La Facultad de Ingeniería. Universidad Del Zulia*, 32(3). Recuperado de <https://produccioncientificaluz.org/index.php/tecnica/article/view/6676>
- González-Velázquez, J. L. (2020). *A Practical Approach to Fracture Mechanics*. Elsevier Science. Recuperado de <https://books.google.com.mx/books?id=8njhDwAAQBAJ>
- Guo, W., Zhang, J., & Guo, W. (2021). Two-dimensional weight function of stress intensity factors for corner cracks emanating from a circular hole. *Engineering Fracture Mechanics*, 252, 107821. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107821>

- Han, Z., Cheng, C., Yao, S., & Niu, Z. (2019). Determination of stress intensity factors of V-notch structures by characteristic analysis coupled with isogeometric boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 222, 106717. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106717>
- Hellen, T. K. (1989). Virtual crack extension methods for non-linear materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(4), 929-942. <https://doi.org/10.1002/nme.1620280414>
- Hibbeler, R. C. (2006). *Mecánica de Materiales*. Pearson Educación.
- Hiroshi, T. (1971). A note on the finite width corrections to the stress intensity factor. *Engineering Fracture Mechanics*, 3(3), 345-347. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(71\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(71)90043-9)
- Jin, P., Liu, Z., Wang, X., & Chen, X. (2022). Three-Dimensional analysis of mixed mode Compact-Tension-Shear (CTS) Specimens: Stress intensity Factors, T-stresses and crack initiation angles. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 118, 103218. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103218>
- Kapp, J. A. Newman, J. C. y Underwood, J. H. (1980). A wide range stress intensity factor expression for the c-shaped specimen, *Journal of Testing and Evaluation*. *Journal of Testing and Evaluation*, 8(6), 314-317.
- Lancaster, J. (2005). The technical background. *Engineering Catastrophes*, 139-189. <https://doi.org/10.1533/9781845690816.139>
- Li, D., & Mao, Z. (2022). Experimental and numerical simulations on compound stress intensity factor of semi-elliptical cracks on the exchanger outer walls with inclined angles. *Alexandria Engineering Journal*, 61(7), 5065-5072. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.030>
- Newman, J. C. (1981). Stress intensity factors and crack opening displacements for round compact specimens. *International Journal of Fracture*, 17.
- Newman, J. C., Aeronautics, U. States. N., Administration, S., & Center, L. R. (1971). An Improved Method of Collocation for the Stress Analysis of Cracked Plates with Various Shaped Boundaries. *NASA Technical Note*, D-6376.
- Nianga, J.-M., Mejni, F., Kanit, T., Imad, A., & Li, J. (2019). Mode I stress intensity factor and T-stress by exponential matrix method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 103, 102287. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102287>
- Owen, D. R. J., & Fawkes, A. J. (1983). *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge Press.

- Paarmann, M., & Sander, M. (2020). Analytical determination of stress intensity factors in thick walled thermally loaded components. *Engineering Fracture Mechanics*, 235, 107125. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107125>
- Perez, N. (2017). Linear-Elastic Fracture Mechanics. En *Fracture Mechanics* (pp. 79-130). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24999-5_3
- Rybicki, E. F., & Kanninen, M. F. (1977). A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*, 9(4), 931-938. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(77\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90013-3)
- Saito, K., Hirashima, T., Ma, N., & Murakawa, H. (2021). Characteristic-tensor method for efficient estimation of stress-intensity factors of three-dimensional cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 257, 108016. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108016>
- Sun, C. T., & Jin, Z.-H. (2012). The Elastic Stress Field around a Crack Tip. *Fracture Mechanics*, 25-75. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385001-0.00003-1>
- Surendran, M., Natarajan, S., Palani, G. S., & Bordas, S. P. A. (2019). Linear smoothed extended finite element method for fatigue crack growth simulations. *Engineering Fracture Mechanics*, 206, 551-564. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.11.011>
- Takaki, Y., & Gotoh, K. (2020). Approximate weight functions of stress intensity factor for a wide range shapes of surface and an embedded elliptical crack. *Marine Structures*, 70, 102696. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2019.102696>
- Yakovlev, M. (2022). Stress intensity factors in the specimen with a surface semi-elliptical defect. *Procedia Structural Integrity*, 42, 1619-1625. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.12.204>
- Yuan, H., Liu, W. J., & Xie, Y. J. (2019). Mode-I stress intensity factors for cracked special-shaped shells under bending. *Engineering Fracture Mechanics*, 207, 131-148. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.12.026>
- Zhang, B., Xu, W., & Wu, X.-R. (2022). Weight function method and stress intensity factor for two unsymmetric through-thickness and quarter-elliptical corner cracks at circular hole. *Engineering Fracture Mechanics*, 264, 108361. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2022.108361>
- Zvyagin, A. V., Luzhin, A. A., Smirnov, N. N., Shamina, A. A., & Shamin, A. Y. (2021). Stress intensity factors for branching cracks in space structures. *Acta Astronautica*, 180, 66-72. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.12.007>