apertura

Volumen 15, número 1, 2023, pp. 84-101 | Universidad de Guadalajara
http://doi.org/10.32870/Ap.v15n1.2344

Promover el razonamiento proporcional mediante la tecnología digital

Promote proportional reasoning through digital technology

Armando Cuevas-Vallejo* | Erasmo Islas-Ortiz** | José Orozco-Santiago***

Recepción del artículo: 30/09/2022 | Aceptación para publicación: 07/03/2023 | Publicación: 30/03/2023

RESUMEN

En este artículo se exploran formas alternativas de enseñanza que promuevan el razonamiento proporcional en estudiantes mexicanos entre catorce y quince años, con apoyo de la tecnología digital. Con este propósito se diseñó una secuencia de actividades didácticas para significar los conceptos de razón y proporción en sus diversas representaciones desde la perspectiva de las funciones lineales. Para el diseño de tareas se emplearon elementos del marco de la matemática realista y la didáctica de Cuevas-Pluvinage, que coinciden en varios señalamientos. Los objetivos de aprendizaje y las actividades propuestas se organizaron mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje. El análisis y la evaluación detallada de las respuestas nos permitió identificar ventajas didácticas del diseño, dificultades de aprendizaje y el importante rol que jugó la tecnología en el proceso de aprendizaje.

Abstract

This article explores alternative teaching methods that promote proportional reasoning in Mexican students aged fourteen to fifteen using digital technology. To this end, a sequence of didactic activities has been designed to give meaning to the concepts of ratio and proportion in their different representations from the approach of linear functions. For the design of the tasks, elements of the theory of Realistic Mathematics Education and the Didactics of Cuevas-Pluvinage were used, coinciding with several didactic points. The proposed learning objectives and activities have been organized through a hypothetical learning trajectory. The analysis and detailed evaluation of the responses allowed us to identify: the didactic advantages of the design, the learning difficulties, and the vital role played by technology in the learning process.

Palabras clave
Razonamiento proporcional; matemáticas; tecnología digital; educación secundaria; didáctica

Keywords
Proportional reasoning; mathematics; digital technology; high school education; didactics

* Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Investigador titular del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, IPN. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7529-4520, correo electrónico: ccuevas@cinvestav.mx | ** Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Estudiante de Doctorado del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, IPN. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5628-4837, correo electrónico: erasmo.islas@cinvestav.mx | *** Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Investigador titular en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9005-0658, correo electrónico: jose.orozcos@correo.buap.mx

INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional es crucial al tomar decisiones en la vida diaria, por ejemplo, de inversión, al comparar relaciones costo-beneficio, elegir entre productos, mezclar materiales o ingredientes, realizar repartos proporcionales, entre un sinfín de opciones en las que es significativo pensar proporcionalmente. El razonamiento proporcional es un ejemplo de herramienta matemática necesaria para interactuar en la vida cotidiana (Freudenthal, 1991) y, en este sentido, Lamon (2020) estima que 90% de los adultos no posee un razonamiento proporcional desarrollado. Al igual que la mayoría de los conceptos matemáticos, el razonamiento proporcional contiene términos matemáticos no menos complejos, como fracción, razón y proporción (Weiland *et al.*, 2021); los cuales se estudian desde la educación elemental hasta la educación superior, y en todos los niveles se han detectado problemas en su aprendizaje. Además, cabe señalar que su aplicación es transversal a otras ciencias, como la física, la química y la economía (Lamon, 2007).

Debido a la relevancia del tema, en un breve estado del arte hemos agrupado la problemática acerca del razonamiento proporcional en cuatro direcciones:

1) Excesiva aritmetización: el análisis de la relación entre las variables es reemplazado por la aplicación de un algoritmo –generalmente regla de tres o producto cruzado– sin razonar los procesos de covariación (Lobato *et al.*, 2010).
2) Escaso desarrollo de las habilidades proporcionales: la aplicación de reglas matemáticas sin significado para los estudiantes

conduce a la creación de hábitos y limita su aplicación a problemas de un tipo específico, ya que no se da la oportunidad para resolver problemas en diversos contextos que permitan explorar las múltiples representaciones de las situaciones proporcionales (Weiland *et al*., 2021).

3) Desestimación del concepto *razón* en el currículo: en la mayoría de los currículos vigentes se priorizan las fracciones como representantes de los números racionales, lo cual conduce a una visión rígida y estrecha del espacio matemático, ya que las razones involucran magnitudes de dos espacios de medida; el aprendizaje de las razones es relegado y se espera que los estudiantes descubran por sí mismos la diferencia entre razones y fracciones (Confrey & Carrejo, 2005).
4) Dificultad para distinguir las relaciones lineales de las relaciones no lineales: se ha detectado una tendencia a aplicar el modelo de la proporcionalidad directa en contextos donde no es aplicable. Esta problemática, a menudo llamada “ilusión de la linealidad” (De Bock *et al*., 2007), ha generado el debate sobre si este fenómeno es generado por un obstáculo epistemológico o si es causado por una enseñanza inadecuada del concepto *proporcionalidad* (Modestou & Gagatsis, 2010).

Muchos de los estudios mencionados se han realizado en ambientes sin tecnología digital, donde a menudo se utilizan figuras pictóricas y se resuelven los problemas asociados utilizando lápiz y papel. De acuerdo con los estándares educativos del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que influye directamente en las formas de enseñanza y potencia el aprendizaje.

En México, estudios como el de Balderas *et al*. (2014) han reportado la dependencia tanto de profesores como de estudiantes hacia el algoritmo de la regla de tres, en cuya aplicación se ha observado una arraigada omisión a analizar las variables involucradas. El currículo escolar mexicano (SEP, 2017) pretende que desde el nivel elemental hasta tercero de secundaria (14-15 años) se consolide un pensamiento proporcional que posibilite enfrentar cualquier problema de naturaleza proporcional, lo cual consideramos posible en un ecosistema de enseñanza que dé seguimiento al progreso de los estudiantes y a la conexión entre los temas involucrados.

El trayecto comienza con la enseñanza de las fracciones y ejercicios multiplicativos en tercero y cuarto de primaria (8-9 años); en quinto y sexto inicia la etapa preproporcional (10-11 años), en la que se comparan razones y se estudia su equivalencia, además se generan tablas simples de razones multiplicativas. La etapa proporcional comienza en el primer año de secundaria (12-13 años), donde se aprende la proporcionalidad directa y se trabaja con tablas de variación y porcentajes. Para segundo de secundaria (13-14 años) debe consolidarse la proporcionalidad directa, se introduce la proporcionalidad inversa y los repartos proporcionales. Finalmente, en tercero de secundaria (14-15 años) se estudia la covariación, la semejanza de polígonos y las funciones lineales, con lo cual se espera que los estudiantes hayan desarrollado un razonamiento proporcional avanzado.

Creemos que no hay una ilación consciente de los temas de razonamiento proporcional en las aulas de matemáticas; sin embargo, desarrollar tal juicio supera las limitantes de este trabajo, por lo que nos adherimos a la búsqueda de soluciones que contribuyan a formar estudiantes con los aprendizajes esperados.

Al considerar las problemáticas anteriores, la cuestión a la que se enfrenta la comunidad es cómo promover en los estudiantes un razonamiento proporcional sólido. Nuestra postura respecto a cómo se produce el conocimiento en el aula parte de una premisa socioconstructivista:

la visión del aprendizaje como una construcción activa implica que los estudiantes estructuren y modifiquen sus formas actuales de conocimiento matemático, las cuales están influidas por su entorno sociocultural. Por lo tanto, una aproximación hacia las diversas formas en que los alumnos interpretan las situaciones matemáticas particulares es crucial para el diseño de la instrucción y para la enseñanza (Cobb *et al*., 1992).

Acorde con lo expuesto, nuestra propuesta pretende confrontar las problemáticas descritas mediante actividades didácticas con un acercamiento funcional en contextos realistas y apoyadas en la tecnología digital. La hipótesis es que el razonamiento proporcional de los estudiantes será cada vez más sofisticado si se promueven habilidades que confronten las cuatro problemáticas planteadas.

Al utilizar la tecnología digital los alumnos pueden explorar más representaciones y ejemplos de los posibles en la enseñanza tradicional, por lo tanto, emergen formas de razonar que son complejas de observar sin el uso de la tecnología. No obstante, el NCTM (2000) advierte que la tecnología digital no es una panacea y que su uso puede ser tanto adecuado como deficiente. A su vez, se distinguen dos vertientes en que puede emplearse la tecnología: como herramienta cognitiva y como instrumento de cálculo numérico y algebraico. En este estudio la hemos utilizado de la primera forma, es decir, como una herramienta que ayuda a construir los conceptos y desarrollar las habilidades.

Duijzer *et al.* (2017) realizaron una investigación con estudiantes de primaria por medio de una aplicación en una tableta *multitouch*, en la cual se encontró que los alumnos lograron coordinar la vista y los gestos asociados a una relación proporcional. Por su parte, Gueudet (2007) realizó un experimento de enseñanza con estudiantes de secundaria utilizando una plataforma web (mathenpoche.sesamath.net) con problemas de situaciones proporcionales relacionados con la semejanza, la comparación de razones y la equivalencia. La

Los estudiantes son participantes activos en el desarrollo de su propio aprendizaje y en la construcción de modelos que matematizan la realidad a partir de un contexto cotidiano

autora reporta que aunque las habilidades de razonamiento proporcional de los estudiantes aumentaron, enfrentaron el inconveniente de que la plataforma solo muestra las respuestas, además de que los estudiantes tuvieron poca participación escrita. Estos inconvenientes pueden generarse debido a que con frecuencia las plataformas no están diseñadas con fines didácticos específicos, no son flexibles a su adaptación a los contextos educativos y no toman en cuenta la sinergia que debe existir entre el diseño de tareas y los recursos tecnológicos.

Asimismo, Lobato y Thanheiser (2002) utilizaron SimCalc MathWorlds, el cual ayudó a los estudiantes en su comprensión de las situaciones proporcionales. Los autores recomiendan que la instrucción con uso de tecnología se combine con el trabajo en lápiz y papel para obtener mejores resultados en el aprendizaje de los estudiantes. Sobre la misma línea, en México se han implementado distintos proyectos para el uso de las tecnologías digitales en las escuelas primarias públicas; por ejemplo, Red Escolar, Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), Enciclomedia, Habilidades Digitales para Todos, Mi Compu mx y @prende.mx, proyectos desarrollados en algunos estados del país para diversos grados escolares (Padilla-Partida, 2018); cabe mencionar que ninguno de estos se consolidó.

MARCO TEÓRICO

Matemática realista

El enfoque de enseñanza de la educación matemática realista (EMR) destaca que las "situaciones realistas" son fundamentales para el aprendizaje de esta materia. De acuerdo con esta corriente, las matemáticas comienzan en la realidad, entendiéndola como una construcción histórica y cultural (Freudenthal, 1991). En consecuencia, si la educación matemática parte de situaciones que son significativas para los estudiantes, entonces tienen la oportunidad de atribuirles significado a las construcciones mentales que desarrollan mientras resuelven situaciones problemáticas. De este modo, sus conocimientos se vuelven gradualmente más formales y menos dependientes del contexto inicial. Por lo tanto, los estudiantes son participantes activos en el desarrollo de su propio aprendizaje y en la construcción de modelos que matematizan la realidad a partir de un contexto cotidiano (Gravemeijer, 2020).

En la EMR se identifican dos tipos de matematización: la *matematización horizontal*, donde los estudiantes transitan de lo real a lo simbólico para dar respuesta a problemas del propio contexto, y la *matematización vertical*, donde los estudiantes realizan conexiones conceptuales y crean estrategias para resolver problemas dentro del sistema matemático, es decir, se separan del contexto hacia el camino de la abstracción y la generalización (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

De acuerdo con Freudenthal (1991), el contexto y el diseño didáctico debe permitir a los estudiantes transitar de la matematización horizontal hacia la matematización vertical. Gravemeijer (2020) identifica cuatro niveles hacia la matematización vertical: 1) nivel situacional: se interpreta y organiza la realidad mediante razonamientos matemáticos informales y dependientes del contexto (matematización horizontal); 2) nivel referencial: se crean esquemas y modelos que tienen sentido dentro del contexto inicial, comienza la matematización vertical al surgir "modelos de…"; 3) nivel general: se relacionan los conceptos, se generan estrategias que se separan del contexto, el razonamiento se da en el mundo matemático y surgen "modelos para…"; y 4) nivel formal: se comprenden los conceptos mediante su simbolismo matemático, la reflexión ha transitado al mundo matemático y se puede prescindir de los modelos.

Razonamiento proporcional

En cuanto a nuestro objeto de estudio, partimos de la definición de Lesh *et al.* (1988): "El razonamiento proporcional es la habilidad que permite trabajar con situaciones que impliquen variación, cambio, sentido de covariación y comparación múltiple, además de la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información" (p. 93). Acorde a esta definición, Modestou y Gagatsis (2010) desarrollaron un modelo de razonamiento proporcional que puede ser descrito en tres categorías: razonamiento analógico, proporcionalidad y conciencia meta-analógica (ver figura 1). Para la presente investigación nos afiliamos a esta propuesta y coincidimos en que una enseñanza inadecuada contribuye a crear el obstáculo epistemológico de la linealidad.

Respecto a lo que involucra el razonamiento proporcional, identificamos las habilidades proporcionales como aquellas facultades que son señaladas como necesarias para que una persona posea un razonamiento proporcional sólido. Lobato *et al.* (2010) y Weiland *et al.* (2021) indican que estas habilidades deben incluir: 1) atender y coordinar dos cantidades que varían dependientemente, 2) reconocer y utilizar las estructuras de las situaciones proporcionales (equivalencia de razones, constante de proporcionalidad y linealidad), 3) comprender la proporcionalidad desde múltiples representaciones (simbólica, algebraica, tabular y gráfica), y 4) distinguir las situaciones lineales de las no lineales. Consideramos que estas cuatro habilidades son clave para nuestro estudio y las nombramos como *habilidades proporcionales*.

Muttaqin *et al.* (2017) mencionan que para desarrollar en los estudiantes habilidades de razonamiento proporcional, los profesores pueden proponer tareas de razones y proporciones en un contexto amplio que permita a los estudiantes experimentar, discutir y realizar predicciones; además, las tareas deben ayudarlos a conectar el razonamiento proporcional con otros procesos que ya ejecuten o comprendan. En nuestro diseño de tareas tenemos en cuenta estas recomendaciones de enseñanza para promover las cuatro habilidades de razonamiento proporcional expuestas anteriormente.

Investigación de diseño

Para englobar el marco teórico y pautar la intervención nos apoyamos en el enfoque de investigación basada en diseño (IBD) propuesto por

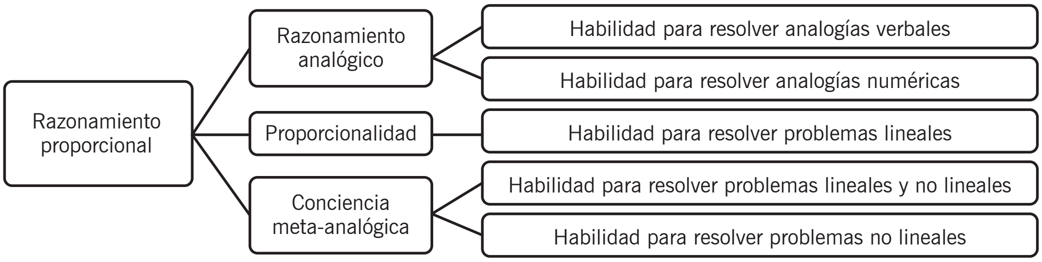


Figura 1. Modelo de razonamiento proporcional.
Fuente: adaptado de Modestou y Gagatsis (2010).

Bakker (2018). La naturaleza cíclica del enfoque está basada en tres fases: 1) preparación y diseño, 2) experimento de enseñanza (implementación) y 3) análisis retrospectivo y rediseño. Debido a que en este tipo de investigación el diseño y la innovación en el aula son aspectos clave, se propone el uso de la tecnología digital para permitir a los estudiantes interactuar con múltiples representaciones, facilitar la simulación de situaciones realistas y comprobar sus propios resultados en entornos didácticos virtuales interactivos (EDVI).

Para organizar el diseño de las tareas que guían a los estudiantes en el proceso de matematización, nos sustentamos en la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) (Simon, 2020). A su vez, en el diseño de las actividades que integra cada tarea nos apoyamos del marco didáctico Cuevas-Pluvinage, que aporta una ingeniería didáctica que rescata principios didácticos de Piaget y de la escuela activa adaptándolos a la educación matemática (Cuevas & Pluvinage, 2003).

En cuanto al uso de la tecnología, encontramos que una de las labores más complejas para un docente es implementar principios de una didáctica de corte constructivista en un aula tradicional con los elementos usuales. Por ejemplo, introducir en un aula tradicional un concepto matemático mediante la problematización de una situación cotidiana resulta casi imposible. Una posible solución es contar con un escenario virtual que simule un fenómeno real, donde los estudiantes interactúen con diversos contextos de forma dinámica y que su uso permita la construcción de conocimiento matemático (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016).

De este modo se brinda a los alumnos la oportunidad de acción y de aprender a su propio ritmo. La tecnología digital dota al estudiante y al profesor de una especie de laboratorio portátil al utilizar diversos dispositivos, como teléfonos móviles y tabletas (Cuevas *et al.*, 2017). La problemática expuesta y las consideraciones teóricas anteriores nos conducen a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué ventajas (o desventajas) se pueden apreciar en el razonamiento proporcional de los estudiantes cuando se les plantean tareas de proporcionalidad, en contextos realistas mediados por la tecnología, enfocadas a la distinción entre situaciones lineales y no lineales?

METODOLOGÍA

Con base en nuestro marco metodológico, el enfoque de IBD utilizado consta de las siguientes fases: preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo.

Fase de preparación y diseño

Se diseñaron y desarrollaron: 1) una preprueba para obtener un diagnóstico de los prerrequisitos matemáticos para abordar los temas a estudiar; 2) una THA que guía el proceso de enseñanza y marca los objetivos de aprendizaje; 3) tres secuencias de actividades didácticas con sus respectivos EDVI "Naranjada", "Zoom Totoro" y "Autos"; y 4) una encuesta para detectar posibles problemas de instrumentación. La preprueba y la encuesta final se alojaron en Formularios de Google para que se respondieran en casa con el fin de ahorrar tiempo de aula.

Secuencia de actividades (tareas)

Se diseñaron tres EDVI en GeoGebra, con sus respectivas hojas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG). Para el diseño se consideró que los entornos virtuales fueran de proporciones adaptables para su visualización en distintos dispositivos. La secuencia de las actividades se puede observar en la ruta didáctica que muestra la figura 2.

Tarea 1: se trata de comparar propuestas de mezcla de zumo de naranja y agua (ver figura 3a y 3b). El objetivo es que los estudiantes aprendan a plantear, comparar y determinar equivalencia entre razones, así como generar tablas de razones equivalentes e identificar la constante de proporcionalidad. Finalmente, se realiza una actividad extra para aplicar el conocimiento aprendido en contextos diferentes.

Tarea 2: se debe realizar un efecto *zoom* para reducir o aumentar una imagen de figuras del personaje Totoro acorde con una razón de semejanza que se introduce en una casilla de entrada (ver figura 3c). El objetivo es que los estudiantes desarrollen actividades de semejanza utilizando la constante de proporcionalidad. También se pretende afrontar el problema de la ilusión de la linealidad al tabular y graficar las relaciones razón-perímetro (lineal) y razón-área (cuadrática), con el fin de conducir a los estudiantes hacia la comparación de ambos modelos.

Tarea 3: consiste en visualizar un automóvil que se mueve a una velocidad constante superior al límite permitido y una patrulla que inicia una persecución con aceleración constante en el momento que el auto pasa a su lado (ver figura 3d). El objetivo es que los estudiantes interactúen con el EDVI mientras describen, analizan y comparan las características y las representaciones de los dos movimientos, es decir, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el movimiento

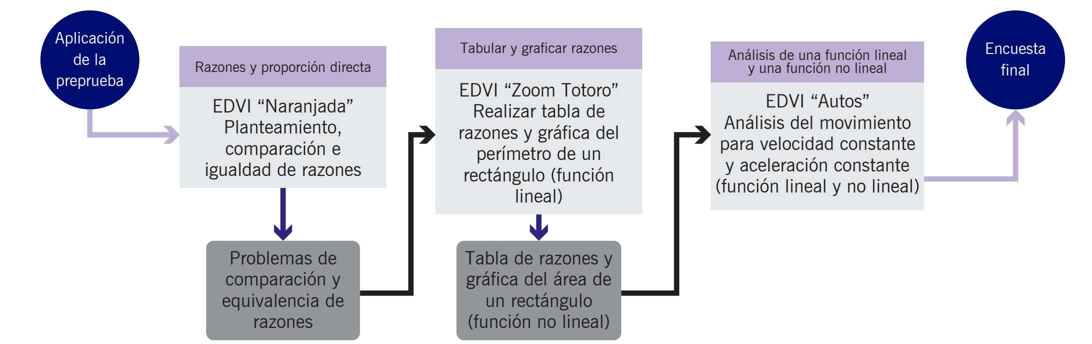


Figura 2. Diseño de la ruta didáctica que guía la secuencia de instrucción.
Fuente: elaboración propia.

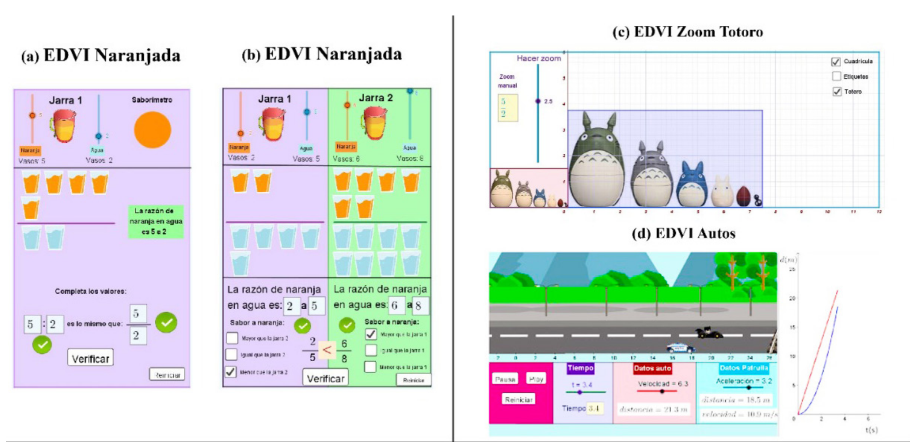


Figura 3. EDVI utilizados en la secuencia de enseñanza.
Fuente: elaboración propia.

rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). De este modo, los estudiantes deben identificar los modelos presentes (lineal y cuadrático) para compararlos y transitar en sus representaciones tabular, gráfica, algebraica y simbólica.

Fase de experimento de enseñanza

El estudio se realizó mediante una intervención presencial en dos grupos de una secundaria técnica en México. Participaron en el estudio 35 estudiantes, de catorce y quince años, en el invierno de 2021. La instrucción se dividió en tres sesiones de 90 minutos en un salón de cómputo de la escuela. Cada estudiante contó con una computadora personal que tenía precargados los EDVI, y también tuvieron sus respectivas HEAG de forma impresa. La intervención estuvo a cargo de un autor de este artículo, apoyado por el profesor del grupo y un asistente de investigación. En las sesiones se promovió un aprendizaje colaborativo y se discutieron las respuestas en grupo.

RESULTADOS

En el análisis de resultados evaluamos el progreso de los estudiantes en los niveles de matematización con base en las habilidades de razonamiento proporcional citadas en nuestro marco teórico. En la tabla 1 se muestra la articulación de las habilidades evaluadas con los niveles propuestos por la EMR. En los criterios utilizados debe considerarse lo siguiente: 1) el nivel formal se descartó debido a que su alcance no corresponde al nivel educativo de los estudiantes y las actividades no fueron diseñadas para alcanzar este nivel; 2) utilizamos el término *proporcionalidad* para referirnos a la proporcionalidad directa a menos que se indique lo contrario; 3) la representación gráfica describe una relación funcional en un plano cartesiano; y 4) los criterios asociados a cada nivel no reflejan la competencia de los estudiantes para resolver problemas específicos, sino únicamente categorizan las características de las habilidades que se desarrollan a partir de los contextos presentados.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de los 17 estudiantes que completaron la totalidad de las tareas.

Tarea 1: "Naranjada"

En esta tarea los estudiantes mostraron habilidades para plantear razones en distintas notaciones, comparar razones, aplicar el principio multiplicativo para obtener razones equivalentes y utilizar el método de la razón unitaria para resolver problemas prácticos. Al realizar las actividades de la naranjada, los alumnos utilizaron sus conocimientos previos en un proceso de matematización horizontal, asimilando correctamente tres notaciones equivalentes para una razón (*a* es *b*, *a*:*b*, *a*/*b*). Todos notaron que debido a una propuesta aleatoria de naranjada, la intensidad de sabor depende de un proceso de covariación, por lo que se refleja el nivel situacional, es decir, su actividad matemática se produce dentro del mundo numérico solo para interpretar el contexto y emitir un juicio, la matematización horizontal es un ir y venir del contexto al mundo matemático.

Un hallazgo que aporta a responder la pregunta de investigación se generó durante las actividades de esta tarea; el EDVI presentó a algunos estudiantes un par de propuestas de naranjada en las que la diferencia entre el antecedente y el consecuente era la misma en ambas razones, por ejemplo 2:7 y 3:8 (ver figura 4a). En ese momento se manifestó una forma intuitiva que utilizaban los estudiantes para comparar las razones, la cual consistía en realizar mentalmente una biyección 1 a 1 entre vasos de naranja y vasos de agua para tomar una decisión acerca del sabor con base en los vasos sobrantes. En el ejemplo de la figura 4a, una vez hecha la biyección, en ambos escenarios quedó el mismo número de vasos de agua sin asociar, por lo que los estudiantes respondieron que las dos tienen el mismo sabor, es decir, la misma proporción.

Tabla 1. Criterios desarrollados para evaluar las tareas con base en la articulación entre las habilidades de razonamiento proporcional y los niveles de matematización de le EMR

Habilidades de razonamiento proporcional	Nivel 1: situacional	Nivel 2: referencial	Nivel 3: general
Atender y coordinar dos cantidades que varían dependientemente	Perciben la covariación de una variable con respecto a otra en un contexto específico	Identifican la variación y la dependencia entre dos variables de un contexto para hacer predicciones o inferencias respecto al cambio de una de ellas	Determinan el tipo de relación funcional entre dos variables identificando la variable dependiente y la variable independiente
Reconocer y utilizar las estructuras de las situaciones proporcionales	Plantean y comparan razones a partir de un contexto utilizando razonamientos intuitivos	Utilizan la equivalencia como medio para comparar razones e identifican y operan con la constante de proporcionalidad	Perciben a la proporcionalidad como un modelo lineal $y = kx$ y comprenden el algoritmo de la multiplicación cruzada para comparar razones
Comprender la proporcionalidad desde múltiples representaciones	Capturan datos discretos de un contexto de covariación lineal para generar una representación tabular o una representación gráfica; pueden hacer inferencias a partir de las representaciones dentro del mismo contexto	Pueden determinar la propiedad lineal de un fenómeno a partir de las representaciones tabular o gráfica y obtener el modelo algebraico de la situación particular	Asocian la linealidad con una relación discreta multiplicativa en la representación tabular, una línea recta continua en una representación gráfica y una ecuación de la forma $y = kx+a$ en la representación simbólica
Distinguir las situaciones lineales de las no lineales	Distinguen la linealidad (o su ausencia) al tomar o analizar datos discretos de una situación de covariación en las representaciones tabular o gráfica	Relacionan la linealidad con un factor multiplicativo constante en las tablas y una covariación proporcional en las gráficas	Calculan e identifican explícitamente a la pendiente en las funciones lineales y la razón de cambio no lineal en las funciones no lineales independientemente de la representación dada

Fuente: elaboración propia.

Esta concepción errónea la extendían a todas las situaciones y les funcionó cuando los vasos restantes de agua fueron distintos, con excepción de las razones equivalentes. No obstante, cuando los vasos restantes de agua fueron iguales, el EDVI señaló el error, incomprensible para algunos de los estudiantes. Al cierre de la sesión, mediante una discusión grupal, se precisaron métodos para comparar razones y se comprobó que la mayoría de los alumnos adoptaba el razonamiento descrito, incluso algunos se mostraron sorprendidos de que el método fallara. Debido a que el EDVI entrega propuestas aleatorias, se detectó esta concepción errónea y los estudiantes tuvieron la necesidad de cambiar la forma en que interpretaban y comparaban las razones.

La actividad de completar tablas de razones equivalentes está sujeta al contexto (mezclas naranja-agua en la misma proporción): se observó en algunos estudiantes la persistencia del razonamiento aditivo en vez del multiplicativo (ver figura 4b). Una manera de comparar las razones equivalentes de las tablas es considerar pares de razones que tengan numeradores o denominadores iguales; los estudiantes se valieron de ese hecho (ver figura 4c) para hacer juicios numéricos

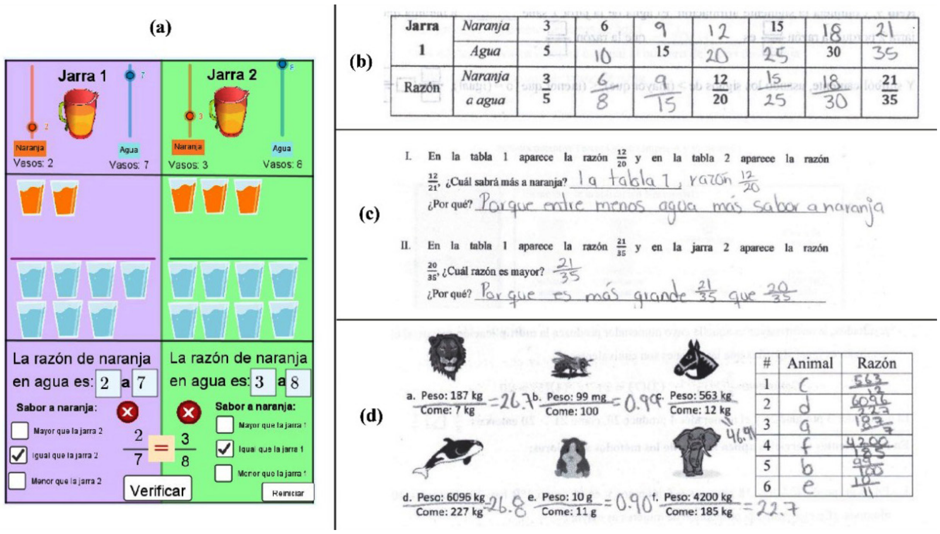


Figura 4. Evidencia de las actividades correspondientes a la tarea 1.
Fuente: elaboración propia.

y dar un argumento de covariación basado en el denominador de las razones.

En los ejercicios de aplicación, posteriores a la actividad con el EDVI, 43% de los estudiantes utilizó eficientemente el método de la razón unitaria para comparar razones. En la figura 4d se muestra un ejercicio de ordenamiento de razones (adaptado de Lamon, 2020), que consiste en acomodar un conjunto de animales en relación con su peso y la cantidad de alimento que consumen. El método de la razón unitaria para resolver problemas en contextos diferentes se ubica en el nivel referencial de la habilidad para reconocer y utilizar las estructuras proporcionales.

Tarea 2: "Zoom Totoro"

Los alumnos mostraron la habilidad para transitar entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica de la proporcionalidad, obteniendo un modelo que describe el perímetro de rectángulos semejantes. En la etapa inicial de la tarea se involucran procesos de visualización, medida y principio multiplicativo. La actividad de calcular las dimensiones de la imagen del EDVI para distintas razones está anclado al contexto (nivel situacional); sin embargo, al seguir el patrón se marca el camino al nivel referencial, ya que los estudiantes notaron que para obtener las medidas de la imagen replicada se deben multiplicar las medidas de la imagen original por la razón de semejanza (ver tabla en la figura 5a).

Para calcular el perímetro de imágenes ampliadas según una razón de semejanza, los estudiantes se basaron en la tabla de dimensiones alejándose del contexto debido a que el concepto inicial se relaciona, en primera instancia con el perímetro y, en segunda, con el área. La figura 5a corresponde a un estudiante que calcula los perímetros para las razones propuestas en la tabla, logra llegar a la expresión lineal $P = 9x$ y aplica el modelo particular encontrado; además, transita correctamente entre las representaciones tabular y gráfica, reconociendo las características lineales del contexto.

Es importante señalar que, aunque 75% de los participantes realizó de forma correcta la tabla y la gráfica del perímetro (ver figuras 5a

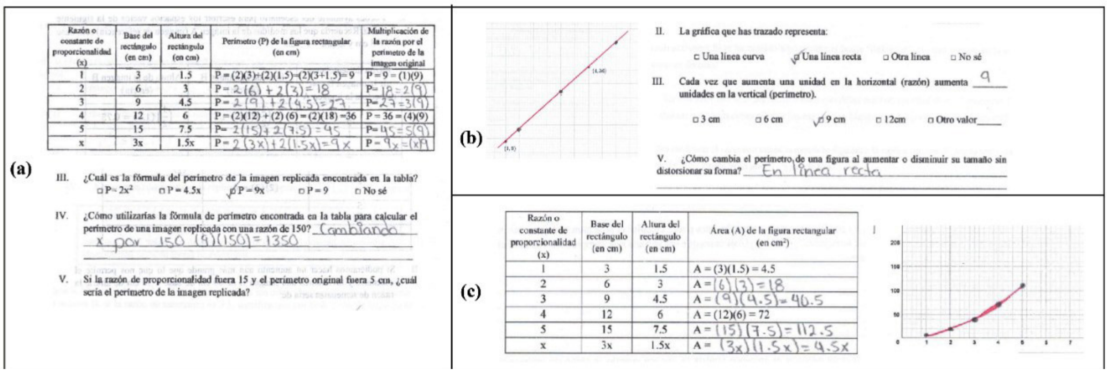


Figura 5. Evidencia de las actividades correspondientes a la tarea 2.
Fuente: elaboración propia.

y 5b), posteriormente se identificó que solo 18% reconoció la característica lineal de la variación del perímetro con respecto a la razón de semejanza, por lo que no se asociaron de manera general las características lineales de las representaciones con el concepto de perímetro. En cuanto al tránsito entre las representaciones de la relación razón-área, solo 25% de los estudiantes completó la tabla y realizó la gráfica (ver figura 5c), pero ninguno obtuvo un modelo algebraico correcto. En consecuencia, los estudiantes no tuvieron la oportunidad de contrastar entre la propiedad lineal del perímetro y cuadrática del área. En general los alumnos no fueron más allá del nivel situacional en las actividades de esta tarea debido a las dificultades aritméticas y a sus carencias en cuanto a los conceptos de perímetro y área.

Tarea 3: "Autos"

Los estudiantes evidenciaron su habilidad de distinguir una situación lineal de una que no lo es. En general, identificaron los rasgos distintivos de cada una en las distintas representaciones. En un inicio, las actividades en este EDVI son de instrumentación y contextualización. Todos los estudiantes encontraron las características de los movimientos, tanto a velocidad constante como a aceleración constante. Sus ideas informales sobre estos conceptos se modificaron al interactuar con el EDVI, al señalar las características de las variables del contexto y al realizar las observaciones solicitadas en las actividades de la tarea.

A partir del contexto, todos los estudiantes completaron las tablas de covariación indicadas; de estas, solo 60% describió correctamente el movimiento lineal y apenas 25% dio muestras de encontrar un patrón de variación para la aceleración (ver figuras 6a y 6b). Lo anterior debido a que transitar del contexto a la representación tabular y, a la postre, de la representación tabular a la gráfica, resulta intuitivo para los estudiantes, incluso la mayoría reconocen las características lineales de la situación. Cabe señalar que reconocer el patrón de variación para expresar de forma explícita un modelo algebraico general es una tarea que requiere mayor abstracción.

En ese sentido, 81% de los estudiantes graficó correctamente ambos movimientos y los comparó (ver figura 6c); empero, solo 65% llegó a conclusiones de carácter general (ver figura 6d), por lo que es claro que dar el salto hacia el nivel general requiere un mayor acompañamiento de las actividades. En este punto de la intervención se observó un claro progreso en las habilidades de razonamiento proporcional de los estudiantes. En esta última tarea, 65% de los estudiantes identificó relaciones entre las variables que van más allá

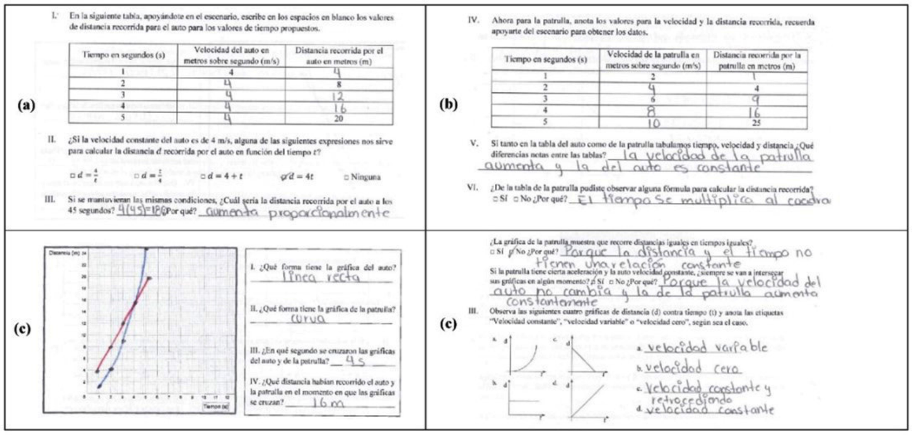


Figura 6. Evidencia de las actividades correspondientes a la tarea 3.
Fuente: elaboración propia.

del contexto inicial, al concluir que la variación es proporcional (en el automóvil) y cuadrático (en la patrulla).

En la figura 6d se muestra cómo un alumno interpreta el movimiento y la variación, al argumentar que, si se recorren distancias iguales en tiempos iguales, distancia y tiempo tienen una relación constante, y añade que el crecimiento de la aceleración siempre superará al de la velocidad porque “la velocidad del auto no cambia y la de la patrulla aumenta constantemente”. En estos razonamientos se observa un enriquecimiento conceptual que trasciende al contexto; las manipulaciones no son numéricas o algebraicas, son de carácter general, es decir, son razonamientos que aplican para cualquier contexto de MRU y MRUA. Al respecto, Freudenthal (1991) menciona que “la relación entre la razón constante y la linealidad es una hazaña de matematización vertical” (p. 43).

La tabla 2 muestra el resumen del análisis de resultados con base en los criterios establecidos en la metodología. En la tabla 2 los caracteres X significan que, por el diseño de la tarea, no es posible evaluar esa habilidad en el nivel correspondiente. Observamos un aumento en el porcentaje de éxito de los estudiantes en las habilidades evaluadas desde la tarea 1 hasta la tarea 3, por lo que asumimos que se promovió el razonamiento proporcional en las habilidades consideradas. No obstante, en el análisis se revelaron aspectos a mejorar en el diseño de tareas y correcciones en los EDVI que les permitan a los estudiantes mayor libertad para un aprendizaje significativo.

DISCUSIÓN

En la tarea 1 los estudiantes tuvieron dificultades para comparar dos razones cuya diferencia entre antecedente y consecuente era la misma; esa idea cambió durante la sesión, por lo que inferimos hay obstáculos en la comprensión que emergen con este tipo de actividades. De acuerdo con Sierpinska (2004), “las tareas deben ser capaces de revelar las concepciones erróneas más ocultas de los estudiantes” (p. 14). Como esta situación se presentó en la mayoría

Tabla 2. Resumen de los resultados obtenidos en cada una de las tareas, con porcentaje de estudiantes que alcanzó cada nivel de matematización

Habilidades de razonamiento proporcional	Tarea 1: "Naranjada" (%)			Tarea 2: "Zoom Totoro" (%)			Tarea 3: "Autos" (%)		
	N1	N2	N3	N1	N2	N3	N1	N2	N3
Atender y coordinar dos cantidades que varían dependientemente	100	43	X	100	87	0	100	100	60
Reconocer y utilizar las estructuras de las situaciones proporcionales	100	43	X	100	93	0	100	87	62
Comprender la proporcionalidad desde múltiples representaciones	93	X	X	75	18	0	81	68	25
Distinguir las situaciones lineales de las no lineales	X	X	X	25	25	0	87	56	0

Fuente: elaboración propia.

de los alumnos, consideramos que el uso del EDVI favoreció la detección de la concepción errónea y los animó a cuestionarse su intuición inicial, lo cual podría no haber sucedido en un ambiente estático.

A pesar de que la estrategia utilizada por los estudiantes es errónea, podría interpretarse como un antecedente a la estrategia informal, pero correcta "norming", que Lamon (2020) ha definido como aquella que es usada como unidad para reinterpretar una segunda razón; sin embargo, en este caso los estudiantes no la utilizaban para comparar la razón completa sino elementos de esta, lo cual conlleva al erróneo, en este caso, principio aditivo.

En la tarea 2 el objetivo era confrontar la ilusión de la linealidad, respecto a la confusión que presentan los estudiantes al suponer que el perímetro, el área y el volumen guardan una relación lineal con la razón de semejanza. A la luz de los resultados percibimos que la tarea les pareció demasiado dirigida y con poca libertad para crear soluciones alternativas, por lo que en el rediseño consideramos necesario añadir al EDVI diferentes figuras geométricas, incluso irregulares como lo sugieren de Bock *et al.* (2007); por ejemplo, al analizar la cantidad necesaria de tinta para pintar una figura de Santa Claus en la que se ha incrementado su altura respecto a un dibujo a escala.

Como práctica posterior se pueden utilizar contextos de riqueza cultural, a saber, el NCTM (2000) propone historias tipo *Los viajes de Gulliver* para hacer analogías entre perímetro, área y volumen. De este modo, los estudiantes tendrán una mayor oportunidad para distinguir la relación lineal del perímetro con la cuadrática del área y la cúbica del volumen.

En la tarea 3 los razonamientos generales a los que llegaron los alumnos nos marcan la pauta para profundizar en las actividades que hagan surgir la generalización en la representación algebraica y se identifique a la razón de cambio como una medida de la covariación que permita distinguir las situaciones lineales de las no lineales. En esta etapa los estudiantes mostraron un claro progreso al distinguir y caracterizar el contexto de la velocidad desde una perspectiva de proporcionalidad dinámica, la cual ha sido definida por Miyakawa y Winsløw (2009) como una dependencia funcional entre dos variables de la forma $y = mx$, donde hay una entrada y una salida; mientras que identifican a la proporcionalidad estática por la expresión $a{:}b = c{:}d$.

En nuestro experimento de enseñanza el objetivo es tender un puente entre el razonamiento proporcional (asociado a la proporcionalidad estática) y las funciones lineales (asociadas a la proporcionalidad dinámica). En este tipo de tareas se relacionan los razonamientos proporcional, funcional y algebraico; por lo tanto, se corrobora la importancia del razonamiento proporcional como prerrequisito para acceder al álgebra (Hemmi *et al.*, 2021).

CONCLUSIONES

El razonamiento proporcional es un concepto matemático que trasciende los grados escolares (desde primaria hasta nivel superior), y constituye un antecedente para comprender conceptos matemáticos avanzados de cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal, probabilidad y estadística, entre otros. Se identifica que al tratar de promover el razonamiento proporcional en la secundaria aparecen obstáculos, como la excesiva mecanización en la enseñanza de la matemática y la carencia de habilidades matemáticas de conceptos implícitos como *fracción*, *razón* y *proporción*.

El razonamiento proporcional es un concepto matemático que trasciende los grados escolares, y constituye un antecedente para comprender conceptos matemáticos avanzados de cálculo diferencial e integral

En este sentido, tratamos de encontrar vías de enseñanza al analizar los conceptos involucrados en el razonamiento proporcional. Primero con acercamientos hacia la razón y la proporción y, posteriormente, mediante las funciones lineales y sus representaciones (simbólica, algebraica, tabular y gráfica). Por lo tanto, el eje de la propuesta es el concepto *razón* como precursor para acceder a la equivalencia, la comparación y las tablas de razones, lo cual conduce hacia las funciones lineales. Se intenta que los estudiantes experimenten con situaciones realistas, tanto lineales como no lineales, y cuestionen la linealidad cada vez que enfrenten un problema. Para lograrlo, la tecnología digital resultó un elemento clave al simular contextos realistas, facilitar representaciones dinámicas y retroalimentar el aprendizaje de los alumnos.

De acuerdo con lo expuesto en este artículo, el razonamiento proporcional es un problema complejo en la práctica educativa, en todos los niveles; de ahí la necesidad de innovar prácticas didácticas con el apoyo de la tecnología digital, lo cual requiere de una metodología de investigación adecuada, como la IBD. Asimismo, la adopción de un marco didáctico explícito fue fundamental para el diseño de tareas y el *software* educativo producido. Prescripciones del marco como la interactividad, la aleatoriedad de datos, la retroalimentación, las operaciones inversas y la libertad de formular una solución fueron importantes y permitieron a los jóvenes elaborar una tarea experimental con las actividades matemáticas.

El análisis de los resultados expuso las ventajas de trabajar con razones, transitar en representaciones proporcionales y contrastarlas con fenómenos no lineales en diferentes contextos. Obtuvimos evidencia suficiente para discernir en cuáles de las tareas, y de qué forma, se debe profundizar para lograr que los estudiantes muestren mejores progresos en los niveles de matematización. Es decir, la diversidad de contextos favoreció la matematización horizontal (nivel situacional), pero considerando los tiempos en el currículo, al rediseñar las secuencias didácticas debemos discernir qué es lo más adecuado a los objetivos, ya que al reducir el número de contextos podría aumentar la oportunidad de lograr mayor profundidad en el proceso de matematización vertical. En este sentido, deducimos que también son necesarias actividades totalmente matematizadas, sin referencia a ningún contexto que den cuenta del nivel formal.

A pesar de que en este estudio el número de participantes fue reducido, los hallazgos descritos en la discusión pueden ser transferibles a contextos educativos similares, sobre todo las ventajas que brindó la tecnología. Para replicarse deben tenerse en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, ya que desconocer aspectos necesarios para realizar las actividades –por ejemplo, situar puntos en el plano o saber operar con fracciones– podría sesgar el análisis de datos y no evaluar las habilidades que se propone el estudio.

Con este trabajo encontramos que las habilidades evaluadas de razonamiento proporcional son esenciales para las matemáticas superiores, aunque un atenuante puede ser que los estudiantes no desarrollen un dominio suficiente de los números racionales para afrontar problemas de proporcionalidad con dificultad aritmética, pero sí pueden desenvolverse matemáticamente en un contexto específico.

> Encontramos que las habilidades evaluadas de razonamiento proporcional son esenciales para las matemáticas superiores, aunque un atenuante puede ser que los estudiantes no desarrollen un dominio suficiente

Este estudio, más allá de dar muestras de cómo puede desarrollarse el razonamiento proporcional, resalta las ventajas del uso de la tecnología digital para afrontar ese desafío. El uso de EDVI posibilitó presentar al estudiante datos aleatorios, interactuar con los contextos de forma dinámica, mostrar los objetos matemáticos en distintas representaciones y validar los resultados de manera experimental. Además, permitió observar concepciones erróneas que probablemente en formas de enseñanza tradicionales pasarían inadvertidas.

AGRADECIMIENTOS

Erasmo Islas-Ortiz agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por apoyar sus estudios de doctorado durante los cuales se llevó a cabo esta investigación.

REFERENCIAS

Bakker, A. (2018). *Design research in education: a practical guide for early career researchers*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Balderas, R.; Block D. y Guerra, M. T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática*, *26*(2), 7-32. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/05/15/vol26-2-1/

Cobb, P.; Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Math Education*, *23*(1), 2-33. https://doi.org/10.2307/749161

Cuevas, A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *8*, 273-292. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_08/adsc8-2003_014.pdf

Cuevas, A.; Villamizar, F. y Martínez, A. (2017). Actividades didácticas para el tono como cualidad del sonido, en cursos de física del nivel básico, mediadas por la tecnología digital. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(3), 129-150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2091

Confrey, J. & Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: The difference between epistemological complementarity and conflict. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *13*. http://www.jstor.org/stable/30037732

De Bock, D.; Van Dooren, W.; Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity*. Springer Publishing. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71164-5

Duijzer, C.; Shayan, S.; Bakker, A.; Van der Schaaf, M. F. & Abrahamson, D. (2017). Touchscreen tablets: Coordinating action and perception for mathematical cognition. *Frontiers in Psychology*, *8*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00144

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers. http://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Gueudet, G. (2007). Learning mathematics with e-exercises: A case study about proportional reasoning. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *14*(4), 169-182. https://cloud.3dissue.com/170388/199108/233436/IJTME-Vol14-4-2007/index.html

Gravemeijer, K. (2020). Emergent modeling: an RME design heuristic elaborated in a series of examples. *Journal of the International Society for Design and Development in Education*, *4*(13), 1-31. http://www.educationaldesigner.org/ed/volume4/issue13/article50/

Hemmi, K.; Bråting, K. & Lepik, M. (2021). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden - a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(1), 49-71. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1740857

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: towards a theoretical framework for research, en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (629-667). Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lesh, R.; Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning, en J. Hiebert & M. Behr (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (93-118). NCTM.

Lobato, J. & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope, en B. Litwiller (ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*. NCTM.

Lobato, J. E.; Ellis, A. B. & Charles, R. I. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. NCTM.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 199-218. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9188-y

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36-53. https://doi.org/10.1080/10986060903465822

Moyer-Packenham, P. & Bolyard, J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative, en P. Moyer-Packenham (ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (3-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1

Muttaqin, H.; Putri, R. I. & Somakim, S. (2017). Design research on ratio and proportion learning by using ratio table and graph with Oku Timur context at the 7th grade. *Journal on Mathematics Education*, *8*(2), 211-222. http://dx.doi.org/10.22342/jme.8.2.3969.211-222

National Council of Teacher Mathematics (NCTM). (2000). *Principles Standards and for School Mathematics*. NCTM.

Padilla-Partida, S. (2018). Usos y actitudes de los formadores de docentes ante las TIC. Entre lo recomendable y la realidad de las aulas. *Apertura*, *10*(1), 132-148. https://doi.org/10.32870/Ap.v10n1.1107

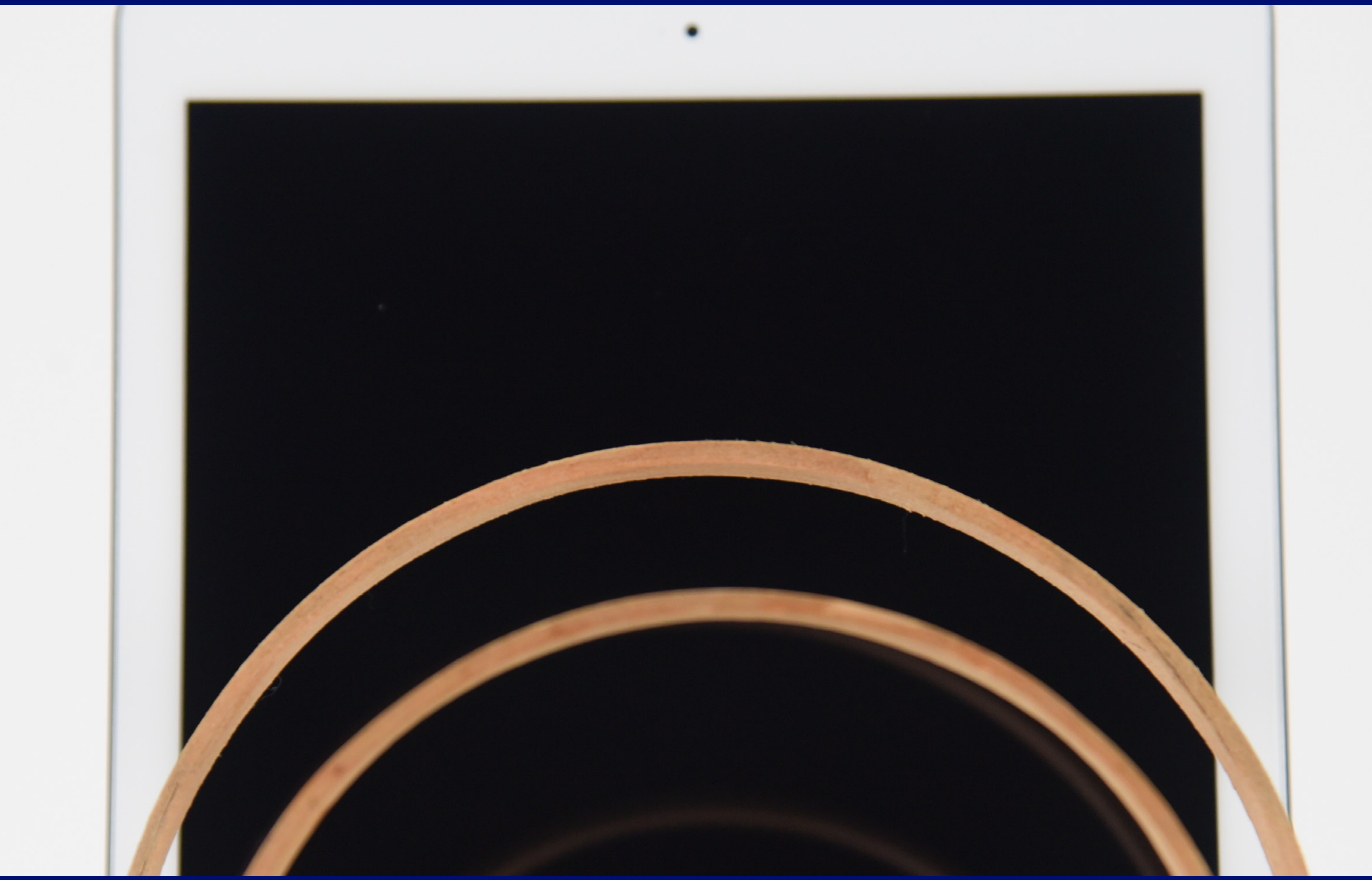
Secretaría de Educación Pública (SEP). (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral: Matemáticas*. SEP.

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7-15. https://flm-journal.org/Articles/51AB9D0E4247C5E9883E32091E242.pdf

Simon, M. A. (2020). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(4), 887-896. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education, en S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Weiland, T.; Orrill, C. H.; Nagar, G. G.; Brown, R. & Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*, 179-202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0



CÓMO CITAR ESTE ARTÍCULO:

Cuevas-Vallejo, Armando; Islas-Ortiz, Erasmo y Orozco-Santiago, José. (2023). Promover el razonamiento proporcional mediante la tecnología digital. *Apertura*, *15*(1), pp. 84-101. http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v15n1.2344