OTRAS APLICACIONES EN LA MECÁNICA TEÓRICA

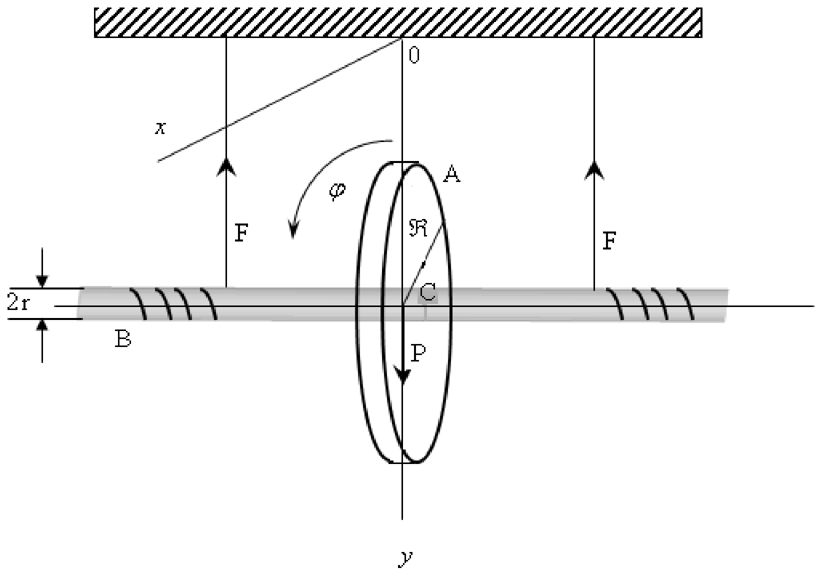
Lic. Juan Carlos Chávez Turiño
Lic. Pedro Isaac Rondón Álvarez
isaac@sumt.ssp.sld.cu

RESUMEN

En este caso tendremos en cuenta algunos casos particulares que a nuestro juicio son importantes aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que aparentan ser de difícil solución, sin embargo, nos proponemos establecer un conjunto de rudimentos que nos permitirán solucionar estos problemas conocidos como clásicos en esta parte de las ciencias técnicas, no pretendemos con ello que ustedes se especialicen en esta parte de las ciencias técnicas, sino, más bien que sean capaces de comprender el amplio campo de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales como rudimento matemático que nos permite solucionar problemas que por los tradicionales métodos de la Física conocida por usted hasta ahora le sería muy trabajoso y por supuesto no estaría exento a cometer abismales errores , por lo que presentamos las siguientes situaciones problémicas.

Este ejemplo haremos un análisis detallado de un caso particular de oscilaciones, donde aparentemente el sistema es complicado pero trataremos de mostrarlo con la mayor simplicidad posible

EI. A continuación mostramos un disco circular homogéneo A de masa m y de radio $\Re$ que pende de dos hilos inextensibles arrollados en su eje horizontal B de radio r, sometido a la acción de la fuerza de gravedad, el disco desciende hacia abajo, donde los hilos se desenrollan hasta su longitud total. Al girar ulteriormente el disco en el mismo sentido, los hilos se arrollan en el eje B y el mismo disco asciende hacia arriba. Terminada la subida el disco, los hilos comienzan a desenrollarse nuevamente y se repite nuevamente el proceso. Este simple mecanismo se denomina Péndulo de Maxwell.



Determinar las relaciones de los hilos y la velocidad del centro de gravedad C del disco.

Nota: En la posición extrema superior consideremos la velocidad del centro de gravedad C igual a cero. La masa del eje B y de los hilos se despreciará al igual que las fuerzas de rozamiento.

Resolución:

En este caso le proponemos el siguiente procedimiento:

- El disco lleva aplicadas las fuerzas $\mathrm{P}=\mathrm{m}\,g$, o sea la fuerza de gravedad que actúa sobre el disco y dos relaciones de fuerzas sobre los hilos $\vec{\mathrm{F}}$, los ejes de coordenadas x e y y el sentido de lectura positiva del ángulo de giro φ como lo indicamos en la figura anterior.
- Planteamos las ecuaciones diferenciales del movimiento del plano del disco A como sigue:

$$\mathrm{m}\frac{d^2x_{\mathrm{C}}}{dt^2}=0$$

$$\mathrm{m}\frac{d^2y_{\mathrm{C}}}{dt^2}=\mathrm{m}\,g-2\mathrm{F}$$

$$\text{Como}:\mathrm{I}=\left.\frac{\mathrm{m}\Re^2}{2}\right\}\text{Es el momento de Inercia del Disco A}$$

$$\frac{\mathrm{m}\Re^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2\mathrm{Fr}$$

Para las condiciones iniciales nulas de la primera ecuación del sistema encontramos $x_{\mathrm{C}}=0$. Esto evidentemente nos indica que el centro de gravedad C se mueve verticalmente.

- Ahora utilizaremos la dependencia entre la velocidad angular del disco y la velocidad de su centro de gravedad $v_{\mathrm{C}}=\mathrm{r}\,\omega$ es decir $\frac{dy_{\mathrm{C}}}{dt}=\mathrm{r}\frac{d\varphi}{dt}$, calculando $\frac{d^2y_{\mathrm{C}}}{dt^2}=\mathrm{r}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ y luego dividimos la segunda ecuación del sistema por la tercera, o sea:

$$\mathrm{m}\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \mathrm{m}g - 2\mathrm{F} \Bigg| \div \frac{\mathrm{m}\Re^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\mathrm{Fr}$$

$$\frac{\mathrm{m}\frac{d^2 y_C}{dt^2}}{\frac{\mathrm{m}\Re^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}} = \frac{\mathrm{m}g - 2\mathrm{F}}{2\mathrm{Fr}}$$

$$\text{Como}: \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \mathrm{r}\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{entonces}:$$

$$\mathrm{m}\left(\mathrm{r}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\left(\frac{2}{\mathrm{m}\Re^2}\right)\frac{1}{\frac{d^2\varphi}{dt^2}} = \frac{\mathrm{m}g - 2\mathrm{F}}{2\mathrm{Fr}}$$

$$\frac{2\mathrm{r}}{\Re^2} = \frac{\mathrm{m}g - 2\mathrm{F}}{2\mathrm{Fr}}$$

De esta relación podemos determinar la reacción del hilo:

$$\frac{2\mathrm{r}}{\Re^2} = \frac{\mathrm{m}g - 2\mathrm{F}}{2\mathrm{Fr}} = \frac{\mathrm{m}g}{2\mathrm{Fr}} - \frac{2\mathrm{F}}{2\mathrm{Fr}} =$$

$$\frac{2\mathrm{r}}{\Re^2} = \frac{\mathrm{m}g}{2\mathrm{Fr}} - \frac{1}{2\mathrm{r}} \Bigg| + \frac{1}{2\mathrm{r}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{m}g}{2\mathrm{Fr}} = \frac{2\mathrm{r}}{\Re^2} + \frac{1}{2\mathrm{r}}\right\} \text{Invertimos la ecuación}$$

$$\frac{2\mathrm{Fr}}{\mathrm{m}g} = \frac{\Re^2}{2\mathrm{r}} + 2\mathrm{r} = \frac{\Re^2 + 4\mathrm{r}^2}{2\mathrm{r}} \Bigg| * \mathrm{m}g$$

$$2\mathrm{Fr} = \left(\frac{\Re^2 + 4\mathrm{r}^2}{2\mathrm{r}}\right)\mathrm{m}g \Bigg| \div 2\mathrm{r}$$

$$\mathrm{F} = \left(\frac{\mathrm{m}g\Re^2 + 4\mathrm{m}g\mathrm{r}^2}{2\mathrm{r}}\right)\frac{1}{2\mathrm{r}}$$

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{m}g\Re^2 + 4\mathrm{m}g\mathrm{r}^2}{4\mathrm{r}^2}$$

Ahora sustituimos F en la ecuación:

$$\mathrm{m}\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = \mathrm{m}\,g - 2\,\mathrm{F}$$

$$\mathrm{m}\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = \mathrm{m}\,g - 2\left(\frac{\mathrm{m}\,g\Re^2 + 4\,\mathrm{m}\,g\,\mathrm{r}^2}{4\,\mathrm{r}^2}\right) =$$

$$\mathrm{m}\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = \mathrm{m}\,g - \frac{\mathrm{m}\,g\Re^2 - 4\,\mathrm{m}\,g\,\mathrm{r}^2}{2\,\mathrm{r}^2} = \mathrm{m}\,g - \frac{\mathrm{m}\,g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - \frac{4\,\mathrm{m}\,g\,\mathrm{r}^2}{2\,\mathrm{r}^2} =$$

$$\mathrm{m}\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = \mathrm{m}\,g - \frac{\mathrm{m}\,g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - \frac{4\,\mathrm{m}\,g}{2}\Bigg| \div \mathrm{m}$$

$$\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = a = g - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - \frac{4g}{2}$$

Como

$$\frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = \frac{dv_{\mathrm{C}}}{dt}$$

Entonces:

$$\frac{dv_{\mathrm{C}}}{dt} = g - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - \frac{4g}{2}\Bigg| * dt$$

$$dv_{\mathrm{C}} = gdt - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2}dt - \frac{4g}{2}dt$$

Como en la posición superior extrema del disco, para $t = 0 \Rightarrow v_{\mathrm{C}} = 0$ integramos

$$\int_0^{v_{\mathrm{C}}} dv_{\mathrm{C}} = g\int_0^t dt - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2}\int_0^t dt - \frac{4g}{2}\int_0^t dt$$

$$v_{\mathrm{C}} = gt - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2}t - 2gt$$

$$v_{\mathrm{C}} = \left(g - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - 2g\right)t =$$

$$v_{\mathrm{C}} = gt\left(1 - \frac{\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - 2\right) =$$

$$v_{\mathrm{C}} = gt\left(\frac{\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - 1\right)$$

Esta ecuación corresponde al descenso del disco hacia abajo. Es importante analizar que en caso que el disco C descienda o ascienda la aceleración $a = \frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2}$ permanecerá constante, o sea, no depende del tiempo ya que: $a = \frac{d^2 y_{\mathrm{C}}}{dt^2} = g - \frac{g\Re^2}{2\,\mathrm{r}^2} - \frac{4g}{2}$

Suplemento de la Teoría del potencial Newtoniano

Supongamos que en cierto punto $\mathrm{P}_0(x,y,z)$ está ubicada una masa m_0. De acuerdo con la Ley de Gravitación Universal, una masa m_1 ubicada en un punto $\mathrm{M}_1(\varepsilon,\eta,\xi)$ se encontrará bajo el efecto de una fuerza tal que se cumple que:

$$\mathrm{F}_{01} = -\gamma \frac{\mathrm{m}_1\,\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}^2}\vec{\mathrm{r}}$$

Donde:

$$\mathrm{R} = \rho\sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}$$

$\gamma \Rightarrow$ Es la constante de gravitación universal

$\vec{\mathrm{r}} = \dfrac{\vec{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} \Rightarrow$ Es el vector unitario cuya dirección coincide con la dirección del vector $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{M}_1}$

Ahora para lograr una mejor interpretación del campo gravitacional donde ocurren las interacciones newtonianas consideremos $\gamma = 1$ y $\mathrm{m}_1 = 1$, obtendremos que:

$$\mathrm{F}_0 = -\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}^2}\vec{\mathrm{r}}$$

Es fácil percatarse que las componentes de la fuerza serán:

$$\mathrm{F}_{0x} = -\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}^3}(\varepsilon - x)$$

$$\mathrm{F}_{0y} = -\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}^3}(\eta - y)$$

$$\mathrm{F}_{0z} = -\frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}^3}(\xi - z)$$

Evidentemente que el potencial de la fuerza de gravedad, definido como una función escalar u tal que:

$$\vec{\mathrm{F}} = \operatorname{grad} u = \vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Será:

$$u = \frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}}$$

Si la masa está concentrada no en el punto $\mathrm{P}_0(x,y,z)$, sino que está distribuida por el dominio Ω con una densidad $\rho_{(x,y,z)}$, entonces para el potencial de la fuerza de gravedad y para los componentes de la fuerza de gravedad obtendremos las siguientes ecuaciones:

$$u(\varepsilon,\eta,\xi) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\mathrm{R}}\,dxdydz$$

$$\mathrm{F}_x = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\mathrm{R}^2}(\varepsilon - x)dxdydz$$

$$\mathrm{F}_y = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\mathrm{R}^2}(\eta - y)dxdydz$$

$$\mathrm{F}_z = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho_{(x,y,z)}}{\mathrm{R}^2}(\xi - z)dxdydz$$

Donde $\mathrm{F}_x, \mathrm{F}_z, \mathrm{F}_z$ son las proyecciones de la fuerza de atracción sobre los ejes de coordenadas.

Es evidente que el potencial de la Fuerza de Gravedad definido como función escalar U tal que $\mathrm{F} = -\nabla \mathrm{U}$ será:

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{m}_0}{\mathrm{R}}$$

Además podemos a partir de esta disertación matemática, es fácil ahora para todos interpretar cuantitativa y cualitativamente lo siguiente:

Momento lineal y Energía Cinética de un cuerpo puntual. Las características dinámicas fundamentales de un cuerpo son; el momento lineal y la energía cinética. Para comprender esto con mayor facilidad realizaremos el siguiente análisis a modo de recordación y profundización.

Se le llama **momento lineal de un cuerpo** a la magnitud vectorial $\vec{\mathrm{P}}$ igual al producto de la masa por la velocidad del cuerpo $\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{m}\vec{v}$ y cuando se trata de un sistema de cuerpos este es igual al vector resultante de la suma algebraica de todos los momentos de los cuerpos que formen el sistema, o sea:

$$\vec{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}_i \overrightarrow{v_i} \text{ ó } \vec{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{P}}_i$$

El momento lineal también se le llama impulso, y el impulso de un sistema es igual al producto de la masa de todo el sistema por la velocidad de su centro de inercia: $\vec{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}_i \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}}$

En muchos textos se trata el momento lineal como la cantidad de movimiento, pero en nuestro caso lo llamaremos momento lineal o impulso, para evitar confusiones filosóficas (con respeto de otros autores).

Impulso de la fuerza. Para caracterizar la acción que ejerce una fuerza sobre un cuerpo en un intervalo de tiempo cualquiera que sea $[t_0, t]$ ó $\Delta t = t - t_0$ se introduce en la mecánica la noción de impulso de la fuerza. Primero para mejor compresión por parte de todos analizaremos el Impulso Elemental, es decir el impulso durante un intervalo de tiempo muy pequeño dt. El impulso elemental de una fuerza es una magnitud vectorial $d\vec{\mathrm{J}}$ igual al producto del vector fuerza $\vec{\mathrm{F}}$ por el intervalo de tiempo elemental dt, o sea:

$$d\vec{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{F}}dt$$

Este está dirigido por la línea de acción de la fuerza, por ejemplo el impulso elemental de las fuerzas de los gases que provocan la salida de un proyectil de un arma corta. Por lo que el impulso de una fuerza cualquiera en un intervalo de tiempo finito $\Delta t = t - t_0$ se calculará como la suma integral de los impulsos elementales correspondientes, o sea:

$$\int d\vec{\mathrm{J}} = \int_0^t \vec{\mathrm{F}}dt =$$

$$\vec{\mathrm{J}} = \int_0^t \vec{\mathrm{F}}dt$$

Por lógica, el impulso de fuerza correspondiente a cualquier intervalo de tiempo t es igual a la integral definida del impulso elemental calculada entre los límites desde cero hasta t. En un caso particular si $\left(\vec{\mathrm{F}} = \text{constante}\right)$ tendremos que:

$$\vec{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{F}}\int_0^t dt = \vec{\mathrm{F}}t$$

En este caso el módulo de $\vec{\mathrm{J}}$ es también igual a $\mathrm{J} = \mathrm{F}t$. En caso general, el módulo del impulso puede calcularse por sus proyecciones. Las proyecciones del impulso sobre los ejes se hallan teniendo en cuenta las proyecciones de las fuerza sobre los mismos ejes, o sea:

$$\vec{\mathrm{J}}_x=\int_0^t \vec{\mathrm{F}}_x dt$$

$$\vec{\mathrm{J}}_y=\int_0^t \vec{\mathrm{F}}_y dt$$

$$\vec{\mathrm{J}}_z=\int_0^t \vec{\mathrm{F}}_z dt$$

Con ayuda de estas proyecciones se puede construir el vector $\vec{\mathrm{J}}$ y calcular su módulo, o sea:

$$\left|\vec{\mathrm{J}}\right|=\sqrt{\left(\vec{\mathrm{J}}_x\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_y\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_z\right)^2}$$

Además si recordamos los conocimientos de Geometría Analítica podemos determinar los ángulos formados por este con los ejes coordenados:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{\mathrm{J}}_x}{\left|\vec{\mathrm{J}}\right|}=\frac{\vec{\mathrm{J}}_x}{\sqrt{\left(\vec{\mathrm{J}}_x\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_y\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_z\right)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{\mathrm{J}}_y}{\left|\vec{\mathrm{J}}\right|}=\frac{\vec{\mathrm{J}}_y}{\sqrt{\left(\vec{\mathrm{J}}_x\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_y\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_z\right)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{\mathrm{J}}_z}{\left|\vec{\mathrm{J}}\right|}=\frac{\vec{\mathrm{J}}_z}{\sqrt{\left(\vec{\mathrm{J}}_x\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_y\right)^2+\left(\vec{\mathrm{J}}_z\right)^2}}$$

Para resolver el problema fundamental de la dinámica es importante separar las fuerzas, cuyos impulsos pueden ser calculados de antemano sin conocer la Ley del movimiento que realiza el cuerpo puntual sometido a la acción de estas fuerzas. No obstante es importante que nos percatemos que solamente las fuerzas constantes y aquellas que dependen del tiempo pertenecen a este tipo de fuerzas, o sea, son las conocidas por todos de la Física elemental como no conservativas. Para calcular los impulsos de fuerzas que dependen de las coordenadas o de la velocidad del movimiento del cuerpo puntual hace falta conocer la Ley de su movimiento, es decir, las ecuaciones:

$$x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t)$$

Dado el caso, expresando x, y, z ó v_x, v_y, v_z en función de t podemos determinar el impulso. Sin conocer la Ley del movimiento del cuerpo puntual, es decir, sin resolver el problema fundamental de la dinámica, es imposible calcular los impulsos de tales fuerzas.

Teorema de la variación del momento lineal de un cuerpo puntual. Si consideramos la masa de un cuerpo constante y su aceleración $a=\frac{dv}{dt}$, podemos plantear que la Ley Fundamental de la Dinámica, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d(\mathrm{m}v)}{dt}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{F}_i$$

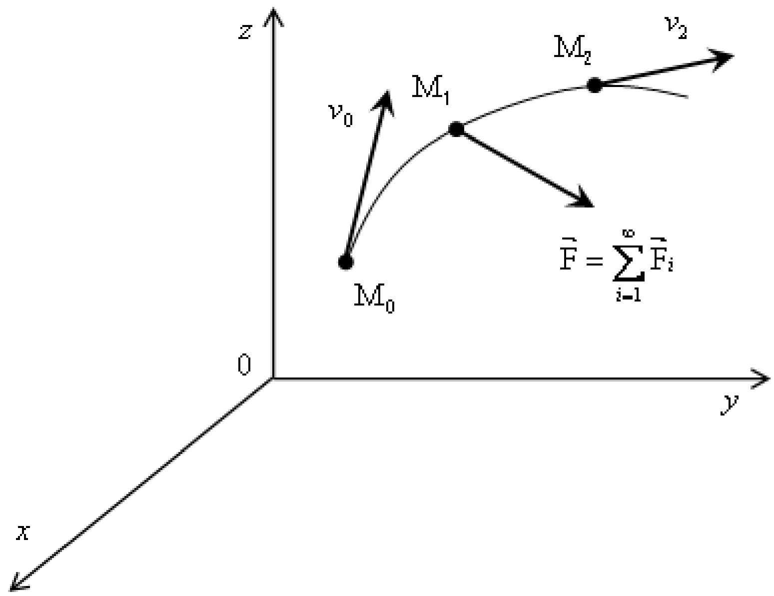
Ahora demostraremos que esta ecuación, también expresa al mismo tiempo el teorema de la variación del momento lineal de un cuerpo puntual en forma diferencial, o sea: *la derivada del momento lineal con relación al tiempo, es igual a la suma geométrica de las fuerzas que actúan sobre el mencionado cuerpo.*

Para demostrar lo que hemos planteado, supongamos que un cuerpo de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathrm{F}}=\sum_{i=1}^{\infty}\vec{\mathrm{F}}_i$, tiene en el instante $t=0$ la velocidad v_0 y en el instante t_2 la velocidad v_2, por lo que multiplicaremos la igualdad de la Ley Fundamental de la Dinámica por dt, o sea:

$$\frac{d(\mathrm{m}v)}{dt}=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{F}_i \Big| * dt$$

$$d(\mathrm{m}v)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{F}_i dt$$

A continuación mostramos el cuerpo de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathrm{F}}=\sum_{i=1}^{\infty}\vec{\mathrm{F}}_i$:



Ahora procederemos a las integrales definidas respecto al tiempo, desde 0 a t_2 en el miembro derecho y el límite de integración en el miembro izquierdo serán las velocidades correspondientes al intervalo de tiempo dado, o sea, v_0 y v_2 por lo que procederemos de la siguiente forma:

$$\int_{v_0}^{v_2} d(\mathrm{m}v)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{0}^{t_2}\mathrm{F}_i dt$$

$$\mathrm{m}\int_{v_0}^{v_2} dv=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{0}^{t_2}\mathrm{F}_i dt$$

$$\text{Como}:$$

$$\vec{\mathrm{J}}=\vec{\mathrm{F}}\int_{0}^{t} dt=\vec{\mathrm{F}}t$$

$$\text{Entonces nos quedará que}:$$

$$\mathrm{m}(v]_{v_0}^{v_2}=\sum_{i=1}^{\infty}\vec{\mathrm{J}}_i$$

$$\mathrm{m}v_2-\mathrm{m}v_0=\sum_{i=1}^{\infty}\vec{\mathrm{J}}_i$$

Esta expresión obtenida, que es la solución de la ecuación diferencial $d(\mathrm{m}v)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{F}_i dt$, explica claramente que; *la variación del momento lineal en un intervalo de tiempo, es igual a la suma geométrica de los impulsos de todas las fuerzas que sobre el cuerpo actúan en el mismo intervalo de tiempo.* Esta afirmación es el Teorema de la variación del momento lineal.

Durante la resolución de situaciones problémicas es importante conocer no sólo la ecuación vectorial analizada con anterioridad, sino también, las ecuaciones de las proyecciones y si proyectamos ambos miembros de la igualdad sobre los ejes coordenados nos quedará que:

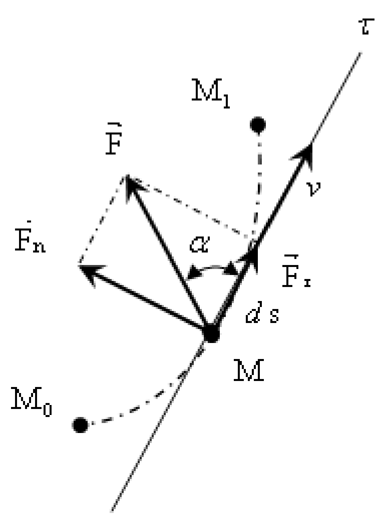
$$\mathrm{m}v_{2x} - \mathrm{m}v_{0x} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{J}}_{ix}$$

$$\mathrm{m}v_{2y} - \mathrm{m}v_{0y} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{J}}_{iy}$$

$$\mathrm{m}v_{2z} - \mathrm{m}v_{0z} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{J}}_{iz}$$

Trabajo de una fuerza. Potencia. Para caracterizar la acción que ejerce una fuerza sobre un cuerpo al comunicarle un desplazamiento, se introduce la noción de trabajo de la fuerza. El trabajo en este caso caracteriza la acción de la fuerza que provoca en el cuerpo cierta variación del módulo de la velocidad en un intervalo de tiempo dado, por lo que consideramos que debemos hacer las siguientes apreciaciones, para de esta forma sea más fácil comprender estas cuestiones que son importantes para tener una más sólida concepción mecánica del mundo teniendo en cuenta futuras aplicaciones prácticas y fenómenos conocidos por todos nosotros.

- **Trabajo elemental de una fuerza.** Este es el que realiza una fuerza cuando esta actúa sobre un cuerpo comunicando un desplazamiento muy pequeño $d\,\mathrm{s}$, como mostramos a continuación:



El trabajo elemental de la fuerza $\vec{\mathrm{F}}$ es la magnitud escalar igual a:

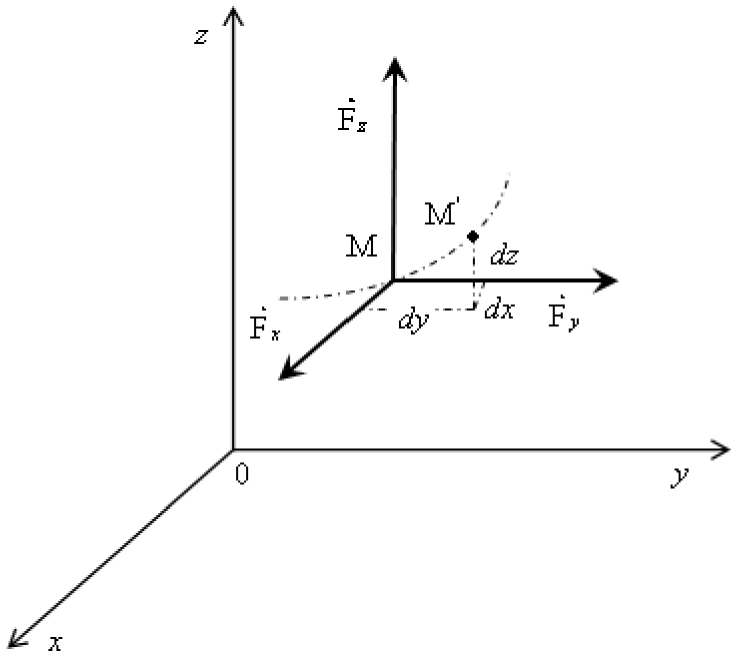
$$d\,\mathrm{W} = \mathrm{F}_\tau\, d\,\mathrm{s}$$

Donde: F_τ es la proyección de la fuerza F sobre la tangente a la trayectoria orientada del desplazamiento del cuerpo puntual, y $d\,\mathrm{s}$ es el desplazamiento pequeño del cuerpo a lo largo de esta tangente. Esta definición corresponde a la noción de trabajo como una característica de la acción de la fuerza que provoca la variación del módulo de la velocidad del cuerpo, por lo que si descomponemos la fuerza F en las componentes F_τ y F_n , solamente la componente F_τ provocará la variación del módulo de la velocidad del cuerpo puntual, comunicando a este una aceleración tangencial. La componente F_n a su vez modifica, la dirección del vector velocidad (comunicándole al cuerpo una aceleración normal), o sea, esta componente no "realiza trabajo", ahora bien, si tenemos en cuenta que: $\mathrm{F}_\tau = \mathrm{F}\cos\alpha$ entonces el trabajo elemental nos quedará:

$$d\,\mathrm{W} = \mathrm{F}\cos\alpha d\,\mathrm{s}$$

De manera que: *el trabajo elemental de una fuerza es igual al producto de la proyección de esta fuerza sobre la dirección del desplazamiento del cuerpo puntual por el desplazamiento elemental* $d\,\mathrm{s}$ *, o el trabajo elemental es igual al producto del módulo de* *la fuerza por el desplazamiento elemental $d\,s$, por el coseno del ángulo entre la dirección de la fuerza y la dirección del desplazamiento.*

Expresión analítica del trabajo elemental. Para ello descompongamos la fuerza $\vec{F}$ en las componentes o proyecciones sobre los ejes coordenados, o sea, $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$ como mostramos a continuación:



El desplazamiento elemental será $MM' = d\,s$ y se compone de los diferenciales o desplazamientos dx, dy, dz a lo largo de los ejes de coordenadas. Por lo que el trabajo elemental de la fuerza de forma analítica será:

$$d\,W = \vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz$$

La solución de esta ecuación diferencial nos resolverá un importante problema físico de gran aplicación en la técnica, o sea, nos permitirá determinar el trabajo realizado por una fuerza para un desplazamiento finito cualquiera que sea y se calculará como la suma integral de los trabajos elementales correspondientes, o sea:

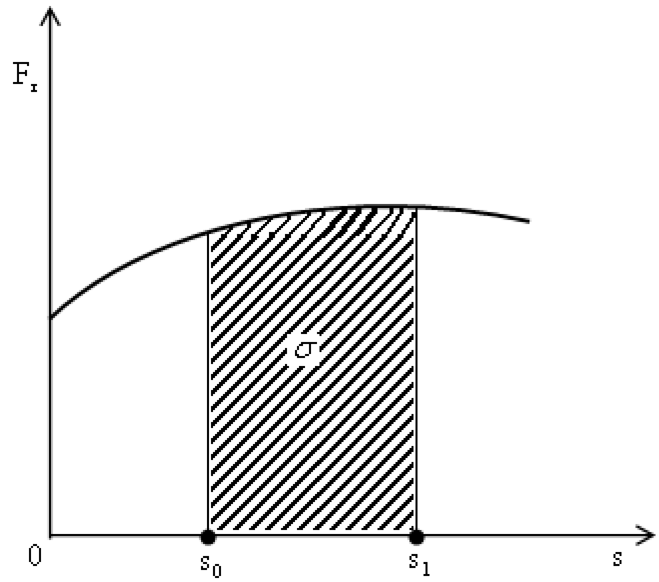
$$\int_{M_0}^{M} d\,W = \int_{M_0}^{M} \left(\vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz \right)$$

$$W_{(M_0M)} = \int_{M_0}^{M} \left(\vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz \right) = \int_{M_0}^{M} \vec{F}_x dx + \int_{M_0}^{M} \vec{F}_y dy + \int_{M_0}^{M} \vec{F}_z dz$$

ó

$$W_{(M_0M)} = \int_{M_0}^{M} \vec{F}_\tau d\,s$$

Método gráfico del cálculo del trabajo. Si la fuerza depende de la distancia s y el diagrama de la dependencia entre F_τ y s es conocido como mostramos a continuación:



El trabajo de la fuerza F_τ puede ser calculado de la siguiente forma. Supongamos que en la posición inicial M_0 el cuerpo se encuentre a una distancia s_0 del origen y en la posición M_1, a una distancia s_1, teniendo en cuenta el concepto de trabajo de una fuerza y el sentido geométrico de la integral, entonces:

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F}_\tau d\,s = \sigma$$

Potencia. Se llama potencia a la magnitud que determina el trabajo que efectúa una fuerza durante la unidad de tiempo, por lo que podemos expresar de manera general que:

$$N = \frac{d\,W}{dt} = \frac{F_\tau\ d\,s}{dt}$$

$$\text{Como}: \frac{d\,s}{dt} = v, \text{entonces}:$$

$$N = F_\tau\ v$$

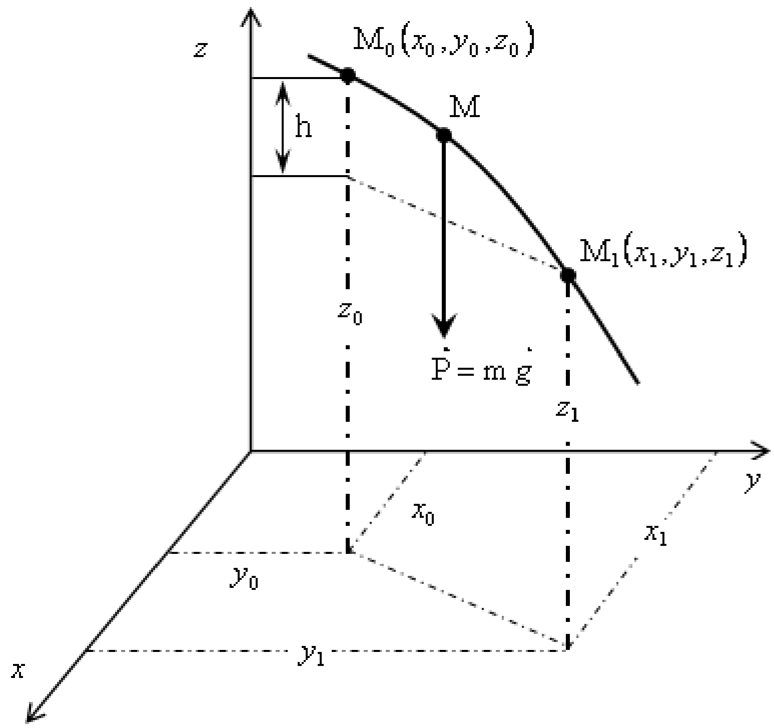
Por consiguiente, la potencia es igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por la velocidad del movimiento, por esto es importante tener en cuenta que en la práctica industrial se toma por unidad de potencia el caballo de fuerza que es equivalente a 736 W y $1W = 1\ \frac{J}{s}$. El trabajo de una máquina puede ser medido por el producto de su potencia por el tiempo de trabajo es por eso que en la técnica surgió la medida del trabajo: 1 kilovatio hora $\left(1\ \text{kWh} = 3{,}6.10^6\ \text{J}\right)$

De la igualdad $N = F_\tau\ v$, se deduce que para un motor, cuya potencia es igual a N, la fuerza de tracción F_τ será tanto mayor, cuanto menor sea la velocidad del movimiento v. Ejemplo de ello tenemos lo que ocurre cuando un automóvil está ascendiendo por una pendiente muy inclinada o en los caminos o carreteras en mal estado, se reduce o se conectan velocidades inferiores que permiten que el automóvil, se mueva con mayor fuerza de tracción.

Ejemplos de cálculo de trabajo

- **Trabajo de la Fuerza de Gravedad.**

Supongamos que un cuerpo puntual M sometido a la acción de la fuerza de gravedad $\vec{\mathrm{P}} = \mathrm{m}\vec{g}$, se desplaza de la posición $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ a la posición $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$. Elegiremos los ejes de coordenadas de modo que el eje $0z$ esté dirigido verticalmente hacia arriba como mostramos a continuación:



En este caso $\mathrm{P}_x = 0, \mathrm{P}_y = 0$ y $\mathrm{P}_z = -\mathrm{P}$ teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} \left(\vec{\mathrm{P}}_x dx + \vec{\mathrm{P}}_y dy + \vec{\mathrm{P}}_z dz \right) = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} \vec{\mathrm{F}}_z dz =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} (-\mathrm{P})dz = -\mathrm{P}\int_{z_0}^{z_1} dz = -\mathrm{P}(z]_{z_0}^{z_1} = -\mathrm{P}(z_1 - z_0) =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)} = \mathrm{P}(z_0 - z_1)$$

$$\text{Donde}: z_0 - z_1 = \mathrm{h}, \text{ y} \quad \text{como}: \mathrm{P} = \mathrm{m}\, g, \text{entonces}:$$

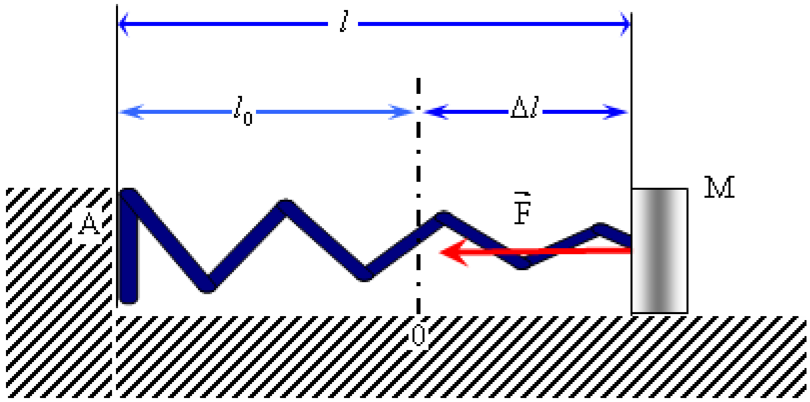
$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)} = \mathrm{m}\, g\, \mathrm{h}$$

Por la ecuación que se dedujo con anterioridad podemos afirmar que el trabajo de la fuerza de gravedad es igual al módulo de la fuerza por el desplazamiento vertical de su punto de aplicación, tomado con el signo más $(+)$ o menos $(-)$. El trabajo es positivo cuando el punto inicial se encuentra por encima del punto final y viceversa.

Del resultado obtenido es fácil deducir que el trabajo realizado por la fuerza de gravedad no depende de la trayectoria del cuerpo, sino de la posición o las coordenadas iniciales y finales del cuerpo durante su movimiento mecánico provocado por la acción de esta fuerza. **Las fuerzas que poseen tal propiedad se llaman Potenciales o Conservativas.**

- **Trabajo de la Fuerza Elástica**

Para ello supongamos que una carga de masa m situada sobre un plano horizontal y fijado al extremo libre de un resorte como mostramos a continuación:

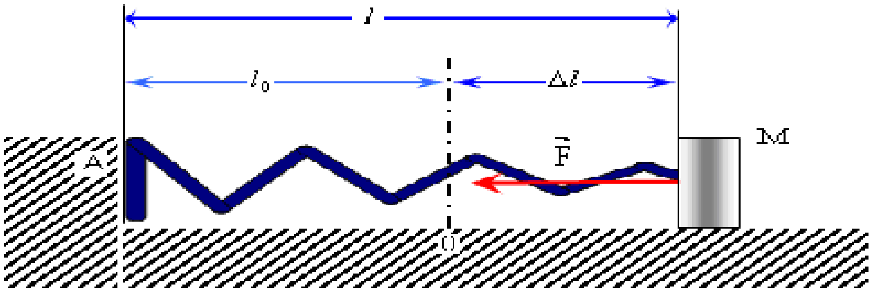


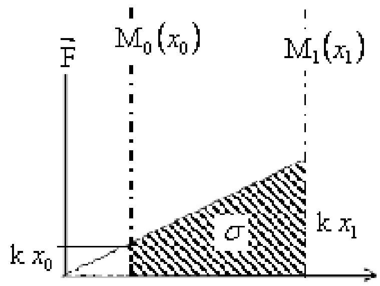
Señalaremos con el punto 0 la posición que ocupa en el extremo del resorte cuando este no está ni estirado ni contraído (libre), o sea, $\overline{A0} = l_0$ es la longitud del resorte estando libre y tomaremos este punto como origen de coordenadas. Si movemos la carga de la posición de equilibrio o la sacamos de la posición 0 de modo que estiramos el resorte hasta una magnitud l, sobre la carga m, actuará una fuerza $\vec{F}$ de elasticidad del resorte dirigida hacia el punto 0. De acuerdo con la Ley de Hooke (Esta Ley nos plantea que la fuerza elástica con que el cuerpo se deforma es proporcional a la magnitud de la deformación) el valor de esta fuerza es proporcional al alargamiento del resorte $\Delta l = l - l_0$. Como en este caso $\Delta l = x$, entonces el módulo de esta fuerza será:

$$F = k|\Delta l| = k|x|$$

El coeficiente k se llama coeficiente de rigidez del resorte y este depende de las características químicas del mismo, o sea, de la estructura de la sustancia con la que está fabricado. En la práctica habitualmente el valor de k se mide el N/m, considerando que el coeficiente k es numéricamente igual a la fuerza que debe aplicarse a un resorte para extenderlo $1\ \mathrm{m}$.

Ahora estamos listos para hallar el trabajo que realiza la fuerza de elasticidad al desplazar la carga desde la posición $M_0(x_0)$ hasta la posición $M_1(x_1)$, para ello hagamos un análisis de la siguiente figura:





Como podemos observar en este caso $F = -F = -k\,x; F_y = F_z = 0$, por lo que podemos plantear que si:

$$\int_{M_0}^{M_1} d\,W = \int_{M_0}^{M_1} \left(\vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz \right)$$

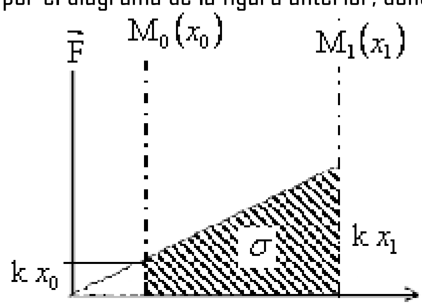
$$W_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} \left(-k\,xdx + k\,ydy + k\,zdz \right) = -k \int_{x_0}^{x_1} xdx =$$

Obtenemos :

$$W_{(M_0M_1)} = -k\left(\frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^{x_1} = -\frac{k}{2}\left(x_1{}^2 - x_0{}^2 \right) =$$

$$W_{(M_0M_1)} = \frac{k}{2}\left(x_0{}^2 - x_1{}^2 \right)$$

Este resultado también puede ser obtenido por el diagrama de la figura anterior, donde se representa F en función de x, o sea:



Del gráfico anterior es fácil deducir que el área bajo la curva σ será el trabajo realizado por la fuerza elástica para desplazar el cuerpo de masa m desde la posición $M_0(x_0)$ hasta la posición $M_1(x_1)$, o sea:

$$\sigma = W_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} (-k\,xdx + k\,ydy + k\,zdz) = -k\int_{x_0}^{x_1} xdx =$$

$$\text{Como}\ \ M_0(x_0)\ \text{y}\ M_1(x_1), \text{entonces:}$$

$$W_{(M_0M_1)} = -k\left(\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1} = -\frac{k}{2}\left(x_1^{\ 2} - x_0^{\ 2}\right) =$$

$$W_{(M_0M_1)} = \frac{k}{2}\left(x_0^{\ 2} - x_1^{\ 2}\right)$$

En este caso hemos calculado el área del trapecio sombreado σ, en esta fórmula podemos ver que si $\Delta l_0 = x_0$, entonces $\Delta l_1 = x_1$ por lo que: $x_0^{\ 2} = \Delta l_0^2$ y $x_1^{\ 2} = \Delta l_1^2$ de aquí que:

$$W_{(M_0M_1)} = \frac{k}{2}\left(\Delta l_0^{\ 2} - \Delta l_1^{\ 2}\right)$$

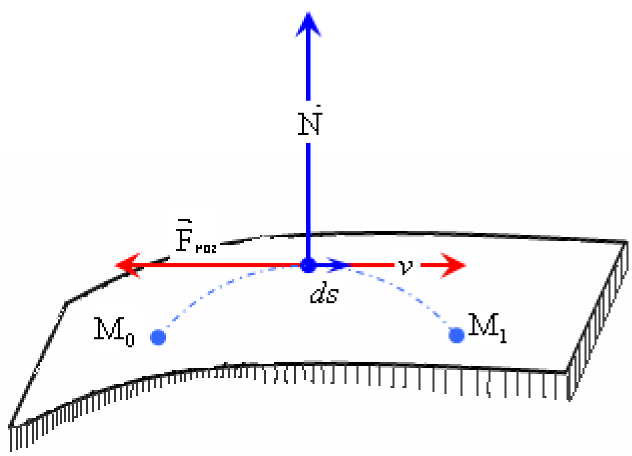
Es decir, el trabajo realizado por la fuerza de elasticidad o elástica es igual al semiproducto del coeficiente de rigidez o constante elástica por la diferencia de los cuadrados de alargamiento inicial y final (o comprensiones del resorte).

El trabajo será positivo cuando $\Delta l_0^{\ 2} > \Delta l_1^{\ 2}$ ó $x_0^{\ 2} > x_1^{\ 2}$ y viceversa.

- **Trabajo de la Fuerza de Rozamiento.**

En este caso analizaremos las características cualitativas y cuantitativas del trabajo que realiza la fuerza de rozamiento que es una fuerza tal que siempre se opone al sentido del vector desplazamiento de un cuerpo coincidiendo con la dirección de dicho desplazamiento.

Examinemos un cuerpo puntual que se mueve por una superficie rugosa o curva, como lo mostramos a continuación:

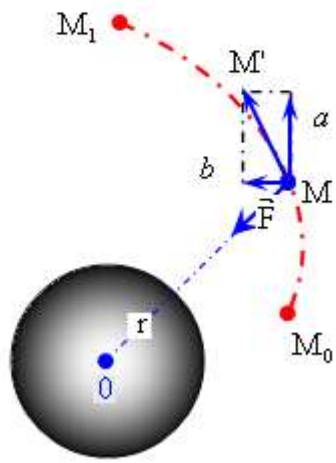


El módulo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo puntual es $\mu\left|\vec{N}\right|$, donde μ es el coeficiente de rozamiento y $\vec{N}$ es la reacción normal de la superficie- la fuerza de rozamiento está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento del cuerpo. Por consiguiente $\vec{F}_{roz} = -\mu\left|\vec{N}\right|$, por lo que sustituyendo en la ecuación analítica elemental de trabajo, nos queda:

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}_{roz}\, d\,s = -\mu\int_{M_0}^{M_1} \left|\vec{N}\right| d\,s$$

Donde s es la longitud de arco de la curva M_0M_1, por lo que podemos deducir que la fuerza de rozamiento no es una fuerza conservativa.

- ***Trabajo de la fuerza de Gravitación.** Si la Tierra (Nuestro planeta) se considera una esfera homogénea (o una esfera formada por capas homogéneas concéntricas), sobre un cuerpo puntual M de masa m que se encuentre fuera de la esfera (Tierra), actuará una fuerza de gravitación (atracción) $\vec{F}$ dirigida hacia el centro 0 de la esfera, como lo mostramos a continuación.



En virtud de la Ley de Gravitación Universal la fuerza de gravitación varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r desde el cuerpo M de masa m que se encuentre fuera de la esfera hasta el centro 0, o sea:

$$F = K\frac{m}{r^2}$$

Donde K es el coeficiente de proporcionalidad que puede determinarse a partir de las siguientes condiciones: cuando el cuerpo se encuentra sobre la superficie terrestre entonces $r = \Re$, donde $\Re$ es el radio de la Tierra, la fuerza de atracción es igual a mg, donde g es la aceleración en caída libre o aceleración de la fuerza de gravedad sobre la superficie terrestre. Entonces es válido plantear que:

$$mg = K\frac{m}{\Re^2}\bigg| * \frac{\Re^2}{m}$$

$$K = g\Re^2$$

Primero calcularemos el trabajo elemental de la fuerza $\vec{F}$. La figura anterior muestra que el desplazamiento elemental $\overline{MM'}$ del cuerpo puntual M puede descomponerse en el desplazamiento $\overline{Ma}$ numéricamente igual al incremento $d\,r$ de la distancia $\overline{0M} = r$ y dirigido a lo largo de $\overline{0M}$ y el desplazamiento $\overline{Mb}$ perpendicular a $\overline{0M}$ y por lo tanto, a la fuerza $\vec{F}$. Ya que en este segundo desplazamiento $\overline{Ma}$ está dirigido e sentido contrario a la fuerza, entonces el trabajo elemental será:

$$d\,W = -F\,d\,r = -K\frac{m}{r^2}$$

Por lo que si el cuerpo se desplaza desde la posición M_0 a M_1 entonces procederemos a solucionar esta ecuación diferencial como sigue:

$$\int_{M_1}^{M_0} d\,W = \int_{M_1}^{M_0} (-F)d\,r = -\int_{M_1}^{M_0} K\frac{m}{r^2}d\,r =$$

$$\text{Como}: M_0(r_0) \text{ y } M_1(r_1)$$

$$W_{(M_0,M_1)} = -K\,m\int_{r_1}^{r_0}\frac{d\,r}{r^2} = -K\,m\int_{r_1}^{r_0} r^{-2}\,d\,r =$$

$$W_{(M_0,M_1)} = -K\,m\left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_1}^{r_0} = -K\,m\left(\frac{r^{-1}}{-1}\right]_{r_1}^{r_0} =$$

$$W_{(M_0,M_1)} = K\,m\left(r_1^{-1} - r_0^{-1}\right) =$$

$$W_{(M_0,M_1)} = K\,m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) =$$

$$W_{(M_0,M_1)} = \frac{K\,m}{r_1} - \frac{K\,m}{r_0}$$

Donde : $\frac{K\,m}{r} = U$ **Es el potencial del campo gravitacional sobre el cuerpo de masa** m

Esta magnitud es importante desde el punto de vista físico-matemático ya que nos permite valorar el campo gravitacional teniendo en cuenta la posición de un cuerpo respecto a otro de mayor masa, o sea, el trabajo realizado de la fuerza gravitatoria será positivo si $r_0 > r_1$, es decir cuando el cuerpo de menor masa se acerca al de mayor masa (el cuerpo se acerca a la superficie terrestre) y negativo si $r_0 < r_1$ (el cuerpo se aleja de la superficie terrestre). Por consiguiente la fuerza de gravitación es una fuerza potencial.

Energía mecánica

La energía como es sabido por todos, ni se crea ni se destruye, solamente se transforma, por lo que es fácil definir que esta es la magnitud que nos cualifica (o sea, nos dice el tipo de movimiento, mecánico, termodinámico, etc.) y nos cuantifica el movimiento de la materia (o sea, nos expresa cuanto más grande es). En nuestro caso específico nos referiremos al movimiento mecánico y sólo a uno de los tipos de energías mecánicas más conocidas por nosotros, la energía cinética, que es la magnitud escalar (conocida en las ciencias técnicas como fuerza viva), igual al semiproducto de la masa por el cuadrado de la velocidad, o sea: $E_c = \frac{m v^2}{2}$.

Pero también existen otros tipos de energía mecánica que son:

- **Energía Potencial:** se llama energía potencial de un **sistema mecánico** que sólo depende de su configuración, es decir, la posición mutua de las partículas o cuerpos y de sus posiciones en el campo potencial externo. La disminución de la energía potencial al trasladarse el **sistema mecánico** desde una posición arbitraria (x_0, y_0, z_0) a otra posición arbitraria (x_n, y_n, z_n) se mide por el trabajo W_{0n} que realizan al ocurrir esto las **fuerzas potenciales** (internas y externas) que actúan sobre el **sistema mecánico**, por lo que podemos plantear que:

$$E_{P0} - E_{Pn} = W_{0n}$$

Por lo que podemos decir que el trabajo de las **fuerzas potenciales** durante una pequeña variación de la configuración del **sistema mecánico** es igual a: $d\,W = -dE_p$

Observación: Se supone que las fuerzas potenciales externas son **estacionarias**, o sea, pueden variar con el tiempo solamente como consecuencia del cambio de posición del **sistema mecánico** considerado respecto a un sistema de referencia. En caso contrario:

$$d\mathrm{E}_{\mathrm{p}} = -d\,\mathrm{W} + \frac{\partial \mathrm{E}_{\mathrm{p}}}{\partial t}dt$$

En el caso más simple, en que el sistema es un cuerpo puntual situado en un campo de potencial, la relación entre la fuerza F que actúa sobre el cuerpo puntual y la energía potencial E_{p} de este cuerpo puntual en el campo tiene la siguiente forma:

$$\mathrm{F}_x = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} \qquad \mathrm{F}_y = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$$

$$\mathrm{F}_z = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \quad \mathrm{F} = -\mathrm{grad}(\mathrm{U}) = -\nabla\,\mathrm{U}$$

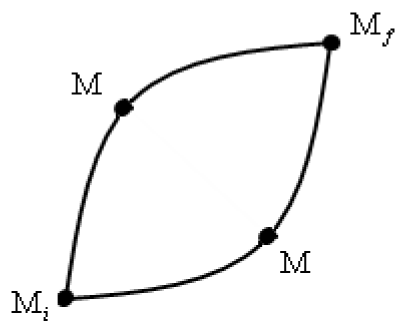
Campo de fuerzas, potencial y función de la fuerza

Supongamos que la fuerza F que actúa sobre un punto depende sólo de la posición de este, es decir:

$$\vec{\mathrm{F}}_x = \overrightarrow{f_x}(x,y,z), \vec{\mathrm{F}}_y = \overrightarrow{f_y}(x,y,z)$$

$$\vec{\mathrm{F}}_z = \overrightarrow{f_z}(x,y,z)$$

El campo de definición de las funciones $\vec{\mathrm{F}}_x, \vec{\mathrm{F}}_y, \vec{\mathrm{F}}_z$ se llama **campo de fuerzas**. Si el punto se desplaza en un campo de fuerzas y el trabajo de las fuerzas del campo no depende de la trayectoria por la cual se desplaza el cuerpo puntual, sino depende solamente de las posiciones inicial M_i y final M_f de este durante su movimiento como mostramos a continuación:



Tal campo de fuerzas se llama potencial. En un campo de fuerzas potencial el trabajo realizado por un contorno cerrado cualquiera es igual a cero (0), esto es demostrado el la teoría de las integrales curvilíneas, por lo que el trabajo elemental de la fuerza F es la diferencial total de cierta función $\varphi_{(x,y,z)}$, o sea:

$$d\,\mathrm{W} = \mathrm{F}_x\,dx + \mathrm{F}_y\,dy + \mathrm{F}_z\,dz = d\,\mathrm{U}$$

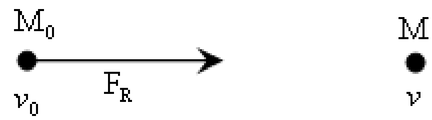
La función $\varphi_{(x,y,z)}$ se llama función de fuerza. Puesto que:

$$d\,\mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}dz$$

De estas dos últimas igualdades y de la independencia de las diferenciales dx, dy, dz tendremos que:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, F_y = -\frac{dU}{dy}, F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Teorema de la variación de la energía cinética de un cuerpo puntual. Tengamos en cuenta un cuerpo cuyas dimensiones se desprecian de masa m bajo la acción de fuerzas aplicadas de manera tal que este se desplaza de la posición M_0, donde tiene una velocidad v_0 (Posición Inicial), a la posición M donde su velocidad es v, como mostramos a continuación:



Para comenzar podemos plantear la ley fundamental de la dinámica en este caso, o segunda ley de Newton:

$$m\frac{dv}{dt} = F_R$$

Donde:

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau$$ **Es la aceleración tangencial**

Esta se pude expresar de la siguiente forma:

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial de la Ley Fundamental de la Dinámica, nos queda que:

$$m\frac{dv}{ds}v = F_R$$

Ahora multiplicaremos ambos miembros de la igualdad anterior por el diferencial ds y pasamos m bajo el signo de diferencial.

$$m\frac{dv}{ds}v = F_R \Big| * ds$$

$$m\,v\,dv = F_R\,ds$$

Teniendo en cuenta por sus estudios de Física Clásica, recordemos que:

$$F_R\,ds = d\,W_R$$

Donde $d\,W_R$ es el trabajo elemental de la fuerza F_R

Por lo que la expresión del teorema de la variación de la energía cinética en forma diferencial será:

$$\mathrm{m}\, v dv = \mathrm{F_R}\, ds$$

$$\mathrm{m}\, v dv = d\, \mathrm{W_R}$$

$$\text{Integramos en ambos miembros :}$$

$$\mathrm{m} \int_{v_0}^{v} v dv = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} d\, \mathrm{W_R}$$

$$\text{y nos queda que :}$$

$$\mathrm{m}\left(\frac{v^2}{2}\right] = (\mathrm{W}]_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}}$$

De aquí que:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0,\mathrm{M})}$$

El resultado anterior nos expresa de forma definida el Teorema de la Variación de la Energía Cinética: *la variación de la energía cinética de un cuerpo puntual en un desplazamiento cualquiera que sea, es igual a la suma algebraica de todos los trabajos de todas las fuerzas que actúan durante dicho desplazamiento.*

Estas condiciones son necesarias y suficientes para que un campo de fuerzas sea potencial

Conservación de la Energía mecánica de un cuerpo puntual durante su movimiento en un campo de fuerzas potencial.
Durante el movimiento de un cuerpo puntual en un campo de fuerzas potencial es teorema de la variación de la energía cinética $\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0,\mathrm{M})}$ a causa de $\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M})} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_x dx + \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_y dy + \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_z dz = \mathrm{U}(x,y,z) - \mathrm{U}(x_0,y_0,z_0)$ puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{U}(x,y,z) - \mathrm{U}(x_0,y_0,z_0)$$

Introduciendo la energía potencial $\mathrm{E_p}(x,y,z)$ del cuerpo puntual como función de signo opuesto al de la función fuerza, o sea:

$$\mathrm{E_p}(x,y,z) = -\mathrm{U}(x,y,z)$$

$$\mathrm{E_p}(x_0,y_0,z_0) = -\mathrm{U}(x_0,y_0,z_0)$$

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = -\mathrm{E_p}(x,y,z) - \left(-\mathrm{E_p}(x_0,y_0,z_0)\right)$$

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = -\mathrm{E_p}(x,y,z) + \mathrm{E_p}(x_0,y_0,z_0) \Big| + \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} + \mathrm{E_p}(x,y,z)$$

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} + \mathrm{E_p}(x,y,z) = \mathrm{E_p}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{E_p}(x_n,y_n,z_n) + \frac{\mathrm{m}v_n^2}{2} = \mathrm{cte}$$

Del resultado obtenido con anterioridad podemos afirmar teniendo en cuenta para reducir la ecuación que:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} = \mathrm{E_c}, \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{E_{c_0}}$$

Podemos escribir que: $\mathrm{E_c} + \mathrm{E_p} = \mathrm{E_M}$ que nos expresa que la Energía Mecánica Total del cuerpo puntual es igual a la suma de de sus energías potencial y cinética y nos expresa la Ley de Conservación de la Energía Mecánica Total del cuerpo puntual en un campo de fuerzas potencial. Este es un caso particular de la Ley de conservación y transformación de la energía que se estudia en la Física General y tiene una gran importancia filosófica como una de las leyes más importantes de la Teoría del Universo, ya que es una manifestación proporcional por las Ciencias Naturales y Exactas de la idea materialista de la indestructibilidad del movimiento, por lo que constituye el fundamento científico natural de la concepción materialista dialéctica del mundo.

Resolución de problemas: Para comenzar la resolución de un problema hace falta, ante todo, averiguar o comprobar si se puede aplicar uno de los teoremas demostrados con anterioridad y luego saber, ¿cuál es el adecuado? Para lograr esto debemos tener en cuenta lo siguiente:

Con ayuda del teorema de la variación de la energía cinética se resuelven fácilmente los problemas, en los cuáles

1º. Las fuerzas efectivas son constantes o dependen solamente de la distancia.
2º. Las magnitudes dadas o las incógnitas están comprendidas entre: la fuerzas efectivas, el desplazamiento del cuerpo puntual y las velocidades al comienzo y al final del movimiento (es decir las magnitudes F, t, v_0, v_1)

El orden de resolución puede ser el siguiente:

1. Utilizando los datos del problema, determinar el teorema que puede ser aplicado para su solución.
2. Representar el dibujo siempre que sea posible del cuerpo puntual en movimiento en una posición arbitraria y mostrar todas las fuerzas activas y relaciones de ligadura que actúan sobre el cuerpo puntual (si el movimiento no es libre)
3. Con ayuda de las fórmulas correspondientes calcular los impulsos y el trabajo de todas las fuerzas durante el movimiento.

Los teoremas demostrados y temas tratados con anterioridad nos permitirán resolver los ejemplos que a continuación trataremos y otras situaciones que se presente en su futura vida profesional.

Ejemplos:

EI. Un cuerpo cuyo peso es $\mathrm{p} = 0{,}1\ \mathrm{N}$ se mueve uniformemente por una circunferencia con una velocidad $v = 2\ {}^{\mathrm{m}}\!/\!_{\mathrm{s}}$. Determine el impulso y el trabajo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo durante el tiempo en que este recorre una cuarta parte de la circunferencia.

Resolución:

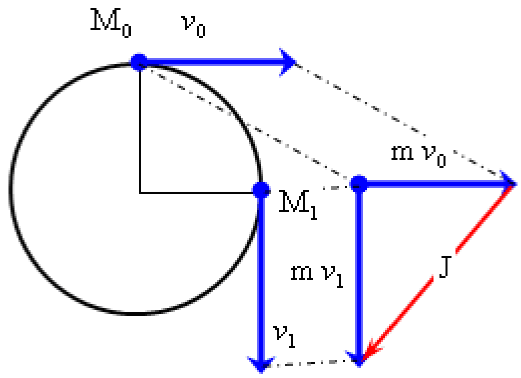
Según el teorema de la variación del impulso:

$$d\,\mathrm{J} = \mathrm{F}\,dt$$

$$\int_0^t d\,\mathrm{J} = \int_{v_0}^{v} \mathrm{F}\,dt =$$

$$\mathrm{J} = \mathrm{m}v - \mathrm{m}v_0$$

Ahora para poder hallar la diferencia entre los momentos lineales construimos el gráfico aproximado del problema planteado:



Del triángulo rectángulo obtenido hallamos:

$$J = m v_1 - m v_0 =$$

$$J^2 = (m v_1)^2 + (-m v_0)^2 = m^2 v_1{}^2 + m^2 v_0{}^2 =$$

$$J^2 = m^2 \left(v_1{}^2 + v_0{}^2\right)$$

$$\therefore J = \sqrt{m^2 \left(v_1{}^2 + v_0{}^2\right)} =$$

$$J = m\sqrt{v_1{}^2 + v_0{}^2}$$

Según los datos del problema las condiciones establecen que $v_0 = v_1 = v$ y $p = mg \therefore m = \frac{p}{g}$ por lo que nos quedará que:

$$J = \frac{p}{g}\sqrt{v^2 + v^2} = \frac{p}{g}\sqrt{2v^2} = \frac{p}{g}\sqrt{2}\left(\sqrt{v^2}\right) =$$

$$\text{Como}: \sqrt{v^2} = v, \text{entonces}:$$

$$J = \frac{p}{g} v\sqrt{2}$$

Ahora sustituimos por los valores conocidos, o sea $p = 0{,}1\ \text{N}$, $v = 2\ {}^{m}\!/_{s}$ y la aceleración en caída libre $g = 9{,}80665\ {}^{m}\!/_{s^2}$ por lo que:

$$J = \frac{0{,}1\ \text{N}}{9{,}80665\ {}^{m}\!/_{s^2}}\left(2\ {}^{m}\!/_{s}\right)\sqrt{2} =$$

$$\text{Como}: 1\ \text{N} = 1\ \text{Kg}\ {}^{m}\!/_{s^2}, \text{entonces}: \text{Kg}\ {}^{m}\!/_{s^2} * {}^{s^2}\!/_{m} = \text{Kg}$$

$$J \cong 0{,}0101\ \text{Kg}\left(2\ {}^{m}\!/_{s}\right)(1{,}4142) \cong$$

$$J \cong 0{,}0288\ \text{Kg}\ {}^{m}\!/_{s} \text{ ó } 0{,}0288\ \ \text{Ns}$$

Para determinar el trabajo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo durante el tiempo en que este recorre una cuarta parte de la circunferencia, utilizaremos el teorema de la variación de la energía cinética en forma diferencial:

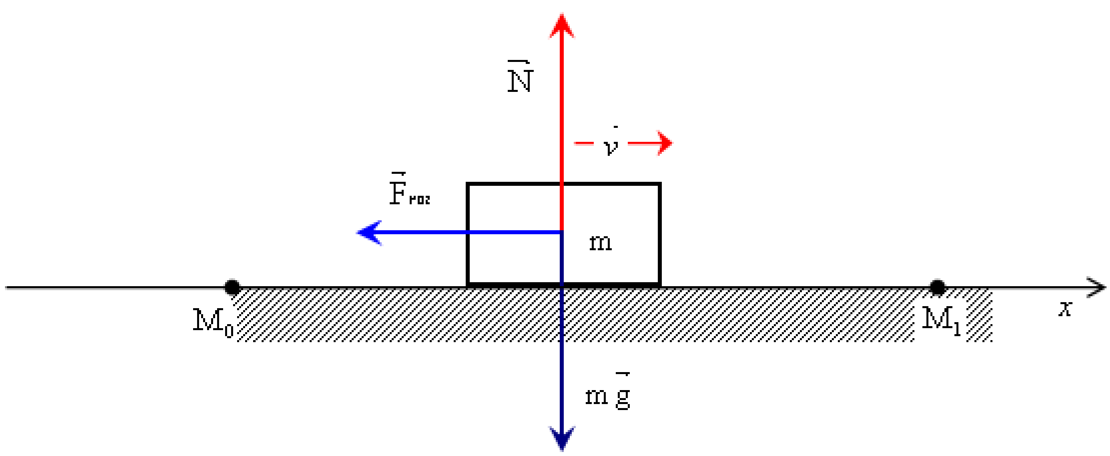
$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = W_{(M_0, M)}$$

Como $v_0 = v_1 = v$, entonces nos queda que:

$$\frac{\mathrm{m}}{2}\left(v^2 - v^2\right) = \mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0,\mathrm{M})} = 0$$

Como podemos apreciar este resultado nos muestra que el trabajo realizado por una fuerza para trasladar un cuerpo de una posición a otra es numéricamente igual a la variación de la energía cinética del cuerpo y en este caso es cero (0) ya que e cumple uno de los axiomas de ligaduras de acuerdo con el cuál: **todo cuerpo puntual no libre puede considerarse como libre después de despreciar la ligadura y reemplazar su acción por la reacción de esta ligadura, por lo que, el trabajo de la reacción de una superficie (o curva) inmóvil y lisa será igual a cero para todo desplazamiento.** Por consiguiente, durante el desplazamiento por una superficie (o curva) inmóvil y lisa la variación de la energía cinética del cuerpo puntual es igual a la suma de los trabajos de todas las fuerzas **activas** que actúan sobre el cuerpo puntual durante el desplazamiento. Es importante que usted conozca que todo cuerpo cuyos desplazamientos en el espacio se ven restringidos, sea por encontrarse enlazado con otros cuerpos, sea por encontrarse en contacto con ellos, se llama **no libre o ligado.**

EII. A continuación mostramos una carga de masa m situada sobre un plano horizontal que se le comunica por medio de un golpe una velocidad v_0.



El movimiento ulterior de la carga se frena por la acción de una fuerza $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{roz}}$ como se muestra en la figura. Determine el tiempo que demora en detenerse y el camino recorrido por la misma hasta detenerse.

Resolución:

Los datos de nuestro problema, nos muestran que para determinar el tiempo del movimiento se puede utilizar el teorema de la variación del momento lineal, por lo que le proponemos proceder como sigue:

$$\mathrm{m}v_1 - \mathrm{m}v_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{J}}_i$$

Como la carga se desplaza por el eje x entonces nos queda:

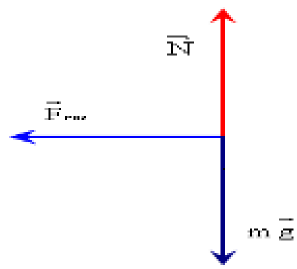
$$\mathrm{m}v_{1x} - \mathrm{m}v_{0x} = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathrm{J}}_{ix}$$

$$\mathrm{m}v_{1x} - \mathrm{m}v_{0x} = \mathrm{J}_x$$

Como: $\int_0^{t_1} d\vec{\mathrm{J}}_x = \sum \int_0^{t_1} \mathrm{F}_x\, dt$ entonces podemos plantear que:

$$\mathrm{m}v_{1x} - \mathrm{m}v_{0x} = \sum \int_0^{t_1} \mathrm{F}_x \, dt$$

Ahora podemos analizar las fuerzas resultantes que provocan que el cuerpo de masa m se detenga, para que sea más fácil tomemos de la figura aquellas fuerzas que actúan sobre la carga, o sea:



Sobre la carga como podemos apreciar actúan; la fuerza de gravedad $\mathrm{m}\vec{\mathrm{g}}$, la reacción del plano $\vec{\mathrm{N}}$ y la fuerza de frenado o fuerza de rozamiento $\vec{\mathrm{F}}_{\text{roz}}$. En el caso presente también es importante analizar que $v_{1x} = 0$ ya que la carga se detiene y $v_{0x} = v_0$ que es la velocidad que se le comunica por medio de un golpe a la mencionada carga. Solamente $\vec{\mathrm{F}}_{\text{roz}}$ nos da un proyección no nula sobre el eje $0x$ que se por donde se desplaza el cuerpo de masa m. Como esta es constante entonces podemos plantear que:

$$\mathrm{J}_x = \mathrm{F}_x \int_0^{t_1} dt = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \int_0^{t_1} dt =$$

$$\mathrm{J}_x = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \left(t\right]_0^{t_1} = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \left(t_1 - 0\right) =$$

$$\mathrm{J}_x = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1$$

Teniendo en cuenta que:

$$\mathrm{m}v_{1x} - \mathrm{m}v_{0x} = \mathrm{J}_x$$

Igualamos ambas ecuaciones y nos quedará que:

$$\mathrm{m}v_{1x} - \mathrm{m}v_{0x} = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1$$

$$\mathrm{m}\left(v_{1x} - v_{0x}\right) = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1$$

Como: $v_{1x} = 0$ y $v_{0x} = v_0$ entonces:

$$\mathrm{m}\left(0 - v_0\right) = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1$$

$$-\mathrm{m}v_0 = -\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1 \Big| * -1$$

$$\mathrm{F}_{\text{roz}} \, t_1 = \mathrm{m}v_0 \Big| \div \mathrm{F}_{\text{roz}}$$

$$t_1 = \frac{\mathrm{m}v_0}{\mathrm{F}_{\text{roz}}}$$

Y esta será la ecuación para determinar el tiempo que demora en detenerse.

Ahora procederemos a calcular el camino recorrido por la carga hasta detenerse, por lo que utilizaremos el teorema de la variación de la energía cinética:

$$\frac{\mathrm{m}v_1^{\,2}}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0,\mathrm{M})}$$

Donde teniendo en cuenta que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es:

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1)} = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} \vec{\mathrm{F}}_{\text{roz}} \, d\,\mathrm{s} = -\mu \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1} \left|\vec{\mathrm{N}}\right| d\,\mathrm{s}$$

Y en este caso como la fuerza de rozamiento es constante $M_0 = s_0 = 0$ y $M_1 = s_1$, siendo este el camino recorrido en un tiempo t_1 nos quedará que:

$$W_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}_{roz} d\,s = -F_{roz} \int_{s_0}^{s_1} d\,s =$$

$$W_{(M_0M_1)} = -F_{roz} (s]_{s_0}^{s_1} = -F_{roz} (s_1 - s_0) =$$

$$W_{(M_0M_1)} = -F_{roz} s_1$$

Ahora podemos igualar ambas ecuaciones obtenidas ya que para $t_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$ y para $t_1 \Rightarrow s_1$, o sea en el inicio los parámetros se corresponden al igual que al final o al detenerse el cuerpo, por lo que el camino recorrido hasta detenerse $v_1 = 0$ se calculará de la siguiente forma:

$$\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = -F_{roz} s_1$$

$$\text{Como}: v_1 = 0$$

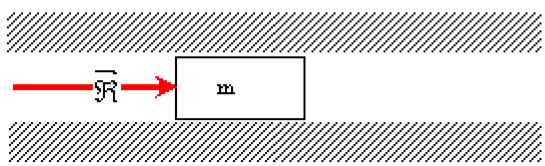
$$-\frac{m v_0^2}{2} = -F_{roz} s_1 \Big| * -1$$

$$F_{roz} s_1 = \frac{m v_0^2}{2} \Big| \div F_{roz}$$

$$s_1 = \frac{m v_0^2}{2 F_{roz}}$$

Por lo que esta ecuación obtenida nos permitiría determinar el camino recorrido por el cuerpo puntual hasta detenerse.

EIII. A continuación mostramos un pistón sobre el que actúan fuerzas cuya resultante $\vec{\Re}$ varía durante cierto intervalo de tiempo según la ley $\Re = 0{,}4\,mg(1 - \psi t)$. Donde $m = 0{,}25$ kg, $g = 9{,}80665$ m/s^2 y el coeficiente $\psi = 1{,}6\ \frac{1}{s}$ es una constante de proporción que depende del material de construcción del pistón.



Si consideramos que t es el tiempo en segundos. Determine la velocidad del pistón en el instante $t_1 = 0{,}5$ s, si en el instante $t_0 = 0$ su velocidad $v_0 = 0{,}2$ m/s .

Resolución:

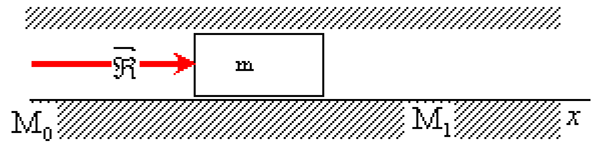
Los datos de este problema son:

$$t_0 = 0,\ v_0 = 0{,}2\ m/s,\ m = 0{,}25\ \text{kg},\ g = 9{,}80665\ m/s^2\ \ \psi = 1{,}6\ \frac{1}{s}$$

Donde:

$$\Re = 0{,}4\,mg(1 - \psi t)$$

Es una fuerza que depende del tiempo, o sea, no es constante, por lo que procederemos analizando el gráfico como sigue:



El movimiento del pistón ocurre desde M_0 hasta M_1 a lo largo del eje $0x$ (horizontal) desde $t_0 = 0$ hasta $t_1 = 0{,}5\ \text{s}$, comenzando con una velocidad $v_0 = 0{,}2\ \text{m}/\text{s}$ hasta que pasan $\Delta t = 0{;}5\ \text{s} = t_1$, por lo que es válido para nosotros emplear la ecuación del teorema de la variación del momento lineal en el eje $0x$:

$$\text{m}v_{1x} - \text{m}v_{0x} = \text{J}_x \Big| + \text{m}v_{0x}$$

$$\text{m}v_{1x} = \text{J}_x + \text{m}v_{0x}$$

Ahora de manera análoga al ejercicio anterior teniendo en cuenta que:

$$\Re = 0{,}4\,\text{mg}(1 - \psi t)$$

$$\text{J}_x = \int_0^{t_1} \text{F}_x\, dt =$$

Donde en nuestro caso :

$$\text{J} = \int_0^{t_1} \Re dt = \int_0^{0{,}5\,\text{s}} 0{,}4\,\text{mg}(1 - \psi t)dt =$$

$$\text{J} = 0{,}4\,\text{mg} \int_0^{0{,}5\,\text{s}} (1 - \psi t)dt = 0{,}4\,\text{mg}\left[\int_0^{0{,}5\,\text{s}} dt - \psi \int_0^{0{,}5\,\text{s}} tdt\right] =$$

$$\text{J} = 0{,}4\,\text{mg}\left[(t]_0^{0{,}5\,\text{s}} - \psi\left(\frac{t^2}{2}\right]_0^{0{,}5\,\text{s}}\right] = 0{,}4\,\text{mg}\left[(0{,}5\ \text{s}) - \frac{\psi}{2}(0{,}5\,\text{s})^2\right] =$$

$$\text{J} = 0{,}4\,\text{mg}\left[(0{,}5\ \text{s}) - \frac{\psi\, 0{,}25\,\text{s}^2}{2}\right] =$$

Sustituyendo por los datos conocidos:

$$\text{J} = 0{,}4(0{,}25\ \text{kg})\left(9{,}80665\ \text{m}/\text{s}^2\right)\left[(0{,}5\ \text{s}) - \frac{\left(1{,}6\ \frac{1}{\text{s}}\right)0{,}25\,\text{s}^2}{2}\right] =$$

$$\text{J} = 0{,}980665\ \text{N}\left(0{,}5\ \text{s} - \frac{0{,}4\ \text{s}}{2}\right) = 0{,}980665\ \text{N}(0{,}5\ \text{s} - 0{,}2\ \text{s}) =$$

$$\text{J} = 0{,}980665\ \text{N}(0{,}3\ \text{s}) =$$

$$\text{J} = 0{,}2941995\ \ \text{Ns}$$

Ahora teniendo en cuenta que:

$$\text{m}v_{1x} = \text{J}_x + \text{m}v_{0x}$$

Y como en nuestro caso $v_{1x} = v_1, v_{0x} = v_0 = 0{,}2\ \text{m}/\text{s}$ entonces:

$$\mathrm{m}v_1 = \mathrm{J} + \mathrm{m}v_0 \,\Big|\, \div \mathrm{m}$$

$$v_1 = \frac{\mathrm{J} + \mathrm{m}v_0}{\mathrm{m}}$$

Ahora sustituimos con todos los valores conocidos:

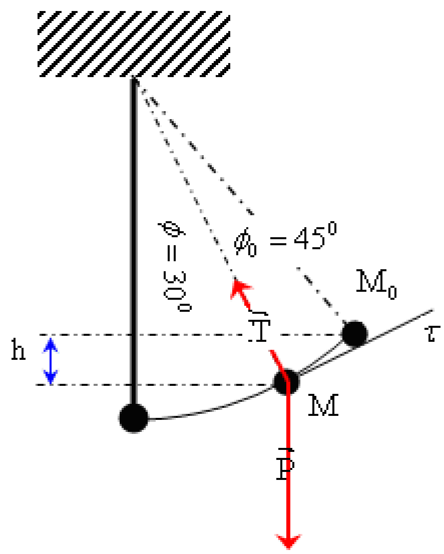
$$v_1 = \frac{0{,}2941995 \;\; \mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s} + 0{,}25\ \mathrm{kg}\left(0{,}2\ \mathrm{m}/\mathrm{s}\right)}{0{,}25\ \mathrm{kg}} = \frac{0{,}2941995 \;\; \mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s} + 0{,}05\ \mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}{0{,}25\ \mathrm{kg}} =$$

$$v_1 = \frac{0{,}3441995 \;\; \mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}{0{,}25\ \mathrm{kg}} =$$

$$v_1 = 1{,}376798\ \mathrm{m}/\mathrm{s}$$

La velocidad del pistón en el instante $t_1 = 0{,}5\ \mathrm{s}$ **, es** $v_1 = 1{,}376798\ \mathrm{m}/\mathrm{s}$ **.**

EIV. A continuación mostramos una carga suspendida por un hilo de longitud $l = 19{,}6133\ \mathrm{m}$ se desvía de la vertical un ángulo $\phi_0 = 45^0$ y luego se suelta sin velocidad inicial.



Hallar la velocidad de la carga en el instante que el hilo forma un ángulo $\phi = 30^0$ con la vertical.

Resolución:

En las condiciones de este problema se toman en cuenta los siguientes parámetros: el desplazamiento de la carga, que se determina por el ángulo de desviación del hilo, y las velocidades v_0 y v, por lo que para solucionar el mismo podemos emplear el teorema de la variación de la energía cinética:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} - \frac{\mathrm{m}{v_0}^2}{2} = \sum \mathrm{W}_{(\mathrm{M_0 M})}$$

Sobre la carga actúan la fuerza de gravedad $\mathrm{P} = \mathrm{m}g$ y la tensión del hilo T. El trabajo de la fuerza es nulo, porque $\mathrm{N}_\tau = 0$

Donde según las condiciones iniciales $v_0 = 0$ de aquí que:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M_0 M})} = \int_{\mathrm{h_0}}^{\mathrm{h}} \mathrm{P}d\,\mathrm{h} =$$

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} = \mathrm{P}\int_{\mathrm{h_0}}^{\mathrm{h}} d\,\mathrm{h} = \mathrm{P}(\mathrm{h})\Big]_{\mathrm{h_0}}^{\mathrm{h}} =$$

Si $\mathrm{h_0} = 0$ y $\mathrm{h} = l\cos\phi - l\cos\phi_0$ entonces podemos escribir que:

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} = \mathrm{P}(\mathrm{h} - 0) = \mathrm{P\,h}$$

$$\frac{\mathrm{m}v^2}{2} = \mathrm{P}(l\cos\phi - l\cos\phi_0) = \mathrm{P}l(\cos\phi - \cos\phi_0)\Big| * \frac{2}{\mathrm{m}}$$

$$v^2 = \frac{2\mathrm{P}l(\cos\phi - \cos\phi_0)}{\mathrm{m}}$$

Como es sabido $\mathrm{P} = \mathrm{m}\,g$, y nos quedará que:

$$v^2 = \frac{2\,\mathrm{m}\,gl(\cos\phi - \cos\phi_0)}{\mathrm{m}} = 2gl(\cos\phi - \cos\phi_0)$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\phi - \cos\phi_0)}$$

Ahora sustituimos por los valores conocidos:

$$\mathrm{g} = 9{,}80665 \ \mathrm{m/s^2} \quad l = 19{,}6133 \ \mathrm{m} \quad \phi_0 = 45^0 \quad \phi = 30^0$$

Y nos queda que:

$$v = \sqrt{2\left(9{,}80665 \ \mathrm{m/s^2}\right)(19{,}6133 \ \mathrm{m})\left(\cos 30^0 - \cos 45^0\right)} =$$

$$v \cong \sqrt{\left(19{,}6133 \,\mathrm{m/s^2}\right)(19{,}6133 \ \mathrm{m})(0{,}866 - 0{,}707)} \cong$$

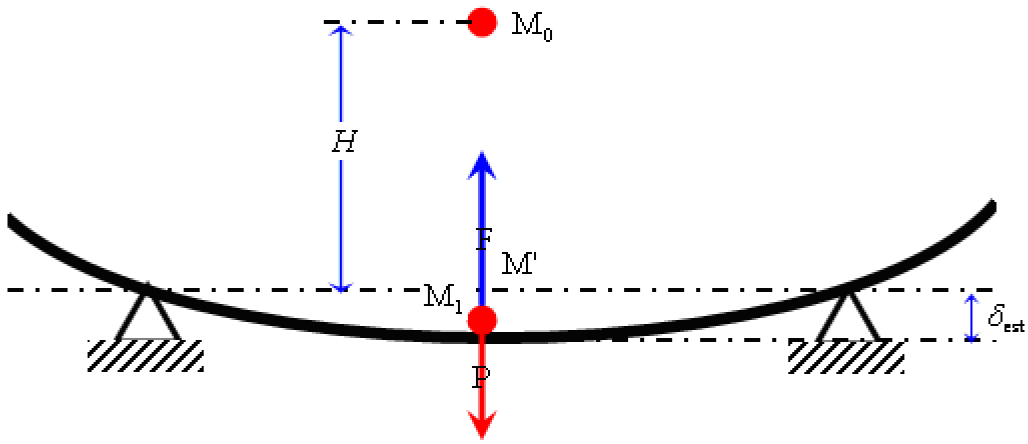
$$v \cong \sqrt{(19{,}6133)^2\left(\mathrm{m^2/s^2}\right)(0{,}159)} \cong$$

$$v \cong 19{,}6133\sqrt{0{,}159}\,\mathrm{m/s} \cong$$

$$v \cong 19{,}6133(0{,}39)\,\mathrm{m/s} \cong$$

$$v \cong 7{,}649187 \quad \mathrm{m/s}$$

EV. Una carga se encuentra colocada en la parte media de una viga elástica flexionándola hasta una magnitud δ_{est} (flexión estática de la viga) como mostramos a continuación:



Despreciando el peso de la viga, determinar la flexión máxima $\delta_{\text{máx}}$ si la carga cae sobre la viga desde una altura H como se indica el la anterior figura.

Resolución:

En este caso se plantea una situación aparentemente difícil, pero, le proponemos utilizar el teorema de la variación de la energía cinética ya que en los cambios de flexión la velocidad inicial de la carga v_0 y su velocidad final v_1 en el momento de flexión máxima de la viga, son iguales a cero, por lo que podemos plantear que:

$$\sum W_R = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} =$$

$$\sum W_R = 0$$

Este trabajo es realizado por la fuerza de gravedad $P = m g$ en el desplazamiento desde M_0 hasta M_1 y la fuerza de elasticidad de la viga F en el desplazamiento $M'M_1$.

Por lo que aquí el trabajo de la fuerza de gravedad será:

$$W_P = \int_{-\delta_{\text{máx}}}^{H} P d s = \int_{-\delta_{\text{máx}}}^{H} P d s = P \int_{-\delta_{\text{máx}}}^{H} d s =$$

$$W_P = P(s]_{-\delta_{\text{máx}}}^{H} = P(H - (-\delta_{\text{máx}})) =$$

$$W_P = P(H + \delta_{\text{máx}})$$

El trabajo de la fuerza de elasticidad de la viga será:

$$W_F = \int_0^{\delta_{máx}} F\,d\,\delta =$$

$$\text{Como}: F = -\kappa\,\delta,\ \text{entonces}:$$

$$W_F = -\kappa\int_0^{\delta_{máx}} \delta\,d\,\delta = -\kappa\left(\frac{\delta^2}{2}\right]_0^{\delta_{máx}} = -\frac{\kappa}{2}\left(\delta_{máx}^2 - 0\right)$$

$$W_F = -\frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2}$$

Ahora como hemos planteado con anterioridad

$$\sum W_R = 0 = W_P + W_F$$

$$P\left(H + \delta_{máx}\right) + \left(-\frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2}\right) = 0$$

$$PH + P\,\delta_{máx} - \frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2} = 0$$

Pero durante el equilibrio de la carga sobre la viga, la fuerza de gravedad se equilibra con la fuerza de elasticidad de la viga, por consiguiente $P = F = \kappa\delta_{est}$, por lo que podemos escribir que:

$$\kappa\,\delta_{est}\left(H + \delta_{máx}\right) - \frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2} = 0 \left| + \frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2}\right.$$

$$\kappa\,\delta_{est}\left(H + \delta_{máx}\right) = \frac{\kappa\,\delta_{máx}^2}{2} \left| * \frac{2}{\kappa}\right.$$

$$\delta_{máx}^2 = 2\,\delta_{est}\left(H + \delta_{máx}\right)$$

$$\delta_{máx}^2 = 2\,\delta_{est}\,H + 2\,\delta_{est}\delta_{máx} \left| - 2\,\delta_{est}\,H - 2\,\delta_{est}\delta_{máx}\right.$$

$$\delta_{máx}^2 - 2\,\delta_{est}\,H - 2\,\delta_{est}\delta_{máx} = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + 2bx + c = 0$ y teniendo en cuenta los datos del problema $\delta_{máx} > 0$ por lo que su solución será:

$$a = 1 \Rightarrow x^2 = \delta_{máx}^2 \therefore x = \delta_{máx}$$

$$2bx = -2\,\delta_{est}\,H \Rightarrow b = -\frac{H}{2}$$

$$\therefore \delta_{máx} = -\left(-\delta_{est}\right) + \sqrt{\delta_{est}{}^2 - 4\left(-\frac{H}{2}\right)\left(\delta_{est}\right)}$$

$$\delta_{máx} = \delta_{est} + \sqrt{\delta_{est}^2 + 2H\,\delta_{est}}$$

Importante: Es interesante percatarse que cuando $H = 0$ resulta que $\delta_{máx} = \delta_{est} + \sqrt{\delta_{est}^2} = \delta_{est} + \delta_{est} = 2\,\delta_{est}$. Por consiguiente, si ponemos la carga sobre la parte media de una viga horizontal, su flexión máxima durante la caída de la carga será igual al doble de la flexión estática. Después la viga con la carga comenzará a realizar oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. Bajo la influencia de la resistencia, estas oscilaciones se amortiguarán y el sistema se detendrá o dejará de oscilar cuando la flexión de la viga sea igual la flexión estática δ_{est}.

EVI. Determine que velocidad inicial mínima v_0 dirigida verticalmente hacia arriba hace falta comunicar a un cuerpo para que este se eleve de la superficie de la Tierra a una altura H. Durante los cálculos desprecie la resistencia del aire.

Resolución:

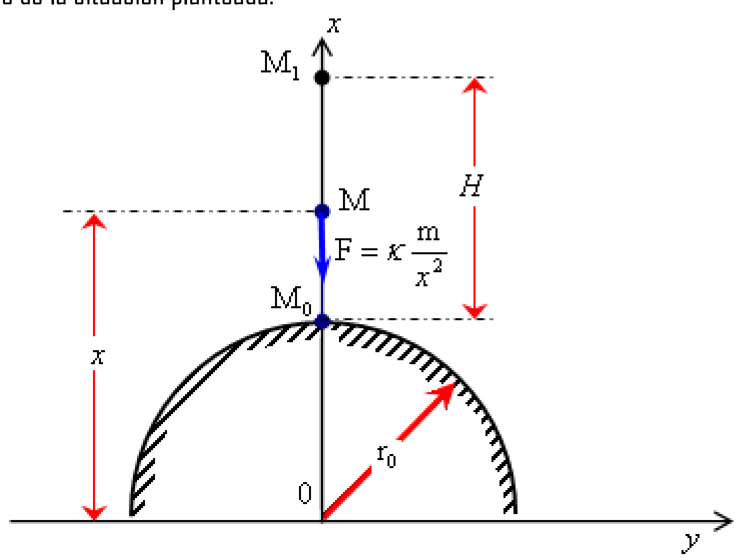
En este ejercicio consideremos el mencionado cuerpo de tal manera que sus dimensiones se desprecien (cuerpo puntual) y sería más fácil resolver la situación partiendo del teorema de la variación de la energía cinética, entonces:

$$\frac{\mathrm{m}v_1^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})}$$

Donde m es la masa del **cuerpo puntual**

Ahora podemos calcular el trabajo de la fuerza F sin utilizar la fórmula $\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{\mathrm{r_1}} - \frac{1}{\mathrm{r_0}}\right) = \mathrm{m}\,g\,\mathrm{R}^2\left(\frac{1}{\mathrm{r_1}} - \frac{1}{\mathrm{r_0}}\right)$, que nos cuantifica y cualifica el trabajo de la fuerza de gravitación, por lo que le proponemos para este caso acorde con los datos conocidos el siguiente método y de esta forma será más fácil la resolución de este ejercicio:

- Construimos un gráfico de la situación planteada:



Hemos puesto intencionalmente el origen de coordenadas en el centro de la Tierra (Centro de Gravitación) y orientamos el eje $0x$ en el sentido del movimiento. El punto M es una posición arbitraria del cuerpo puntual durante su lanzamiento hacia arriba y la fuerza F aplicada a este, de acuerdo con las condiciones del problema será:

$$\mathrm{F} = \kappa\frac{\mathrm{m}}{x^2}$$

El coeficiente de proporcionalidad κ se halla a partir de la condición de que sobre la Tierra (o superficie terrestre) la fuerza de gravitación es igual a $\mathrm{m}\,g$ (donde $\left(\mathrm{g} = 9{,}80665\ \mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)$ es la aceleración en caída libre o aceleración de la fuerza de gravedad sobre la superficie terrestre).

De aquí que:

$$\mathrm{m}\,g = \kappa\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{R}^2}\bigg| * \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{m}}$$

$$\kappa = g\,\mathrm{R}^2$$

Según nuestro gráfico notamos que:

$$\mathrm{F}_x = -\mathrm{F} = -\kappa\frac{\mathrm{m}}{x^2}$$

$$\mathrm{F}_y = \mathrm{F}_z = 0$$

Procederemos a determinar el trabajo según la expresión analítica del trabajo elemental de una fuerza cualquiera:

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M})} = \int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_x dx + \int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_y dy + \int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M}} \vec{\mathrm{F}}_z dz =$$

En nuestro caso nos quedará de la siguiente forma:

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M_1}} \vec{\mathrm{F}}_x dx = -\int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M_1}} \mathrm{F}dx =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = -\int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M_1}} \left(\kappa\frac{\mathrm{m}}{x^2}\right)dx = -\kappa\,\mathrm{m}\int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M_1}} \frac{dx}{x^2} =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = -\kappa\,\mathrm{m}\int_{\mathrm{M_0}}^{\mathrm{M_1}} x^{-2}dx =$$

Del gráfico es fácil percatarse que: $\mathrm{M_0}(\mathrm{R})$ y $\mathrm{M_1}(\mathrm{R}+H)$, por lo que:

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = -\kappa\,\mathrm{m}\int_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+H} x^{-2}dx = -\kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+H} =$$

$$\text{Aplicando la propiedad: } \frac{-\kappa\,\mathrm{m}}{-1} = \kappa\,\mathrm{m} \text{ y } x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \kappa\,\mathrm{m}\left(x^{-1}\right]_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+H} = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{x}\right]_{\mathrm{R}}^{\mathrm{R}+H} =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{\mathrm{R}+H} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right) = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{R}-(\mathrm{R}+H)}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\right) = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{\mathrm{R}-\mathrm{R}-H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\right) =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{-H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\right) =$$

$$\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = -\frac{\kappa\,\mathrm{m}H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}$$

Este resultado también puede ser obtenido utilizando la fórmula $\mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})} = \kappa\,\mathrm{m}\left(\frac{1}{\mathrm{r_1}} - \frac{1}{\mathrm{r_0}}\right) = \mathrm{m}\,g\,\mathrm{R}^2\left(\frac{1}{\mathrm{r_1}} - \frac{1}{\mathrm{r_0}}\right)$, si tenemos en cuenta que e este caso hemos de tener en cuenta que: $\mathrm{r_0} = \mathrm{R}$ y $\mathrm{r_1} = \mathrm{R}+H$ esto es fácil de comprobar en su estudio independiente, sólo tiene que sustituir.

Como en nuestro caso la posición superior $\mathrm{M_1}$, la velocidad del cuerpo puntual $v_1 = 0$, o de lo contrario el cuerpo continuaría alejándose de la Tierra, poniendo el valor hallado del trabajo en la ecuación $\frac{\mathrm{m}v_1^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = \mathrm{W}_{(\mathrm{M_0M_1})}$, nos quedará que:

$$\frac{\mathrm{m}v_1^2}{2} - \frac{\mathrm{m}v_0^2}{2} = -\frac{\kappa\,\mathrm{m}H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}$$

Donde:

$$\frac{\mathrm{m}v_1^2}{2}=0$$

Por lo que:

$$-\frac{\mathrm{m}v_0^2}{2}=-\frac{\kappa\,\mathrm{m}H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\Bigg|*-1$$

$$\frac{\mathrm{m}v_0^2}{2}=\frac{\kappa\,\mathrm{m}H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\Bigg|*\frac{2}{\mathrm{m}}$$

$$v_0^2=\frac{2\kappa H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}\Bigg|\sqrt{f}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2\kappa H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}}$$

Sustituyendo el coeficiente $\kappa = g\,\mathrm{R}^2$ nos queda:

$$v_0=\sqrt{\frac{2g\,\mathrm{R}^2\,H}{\mathrm{R}(\mathrm{R}+H)}}=$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2g\,\mathrm{R}\,H}{\mathrm{R}+H}}$$

Importante: Ahora examinaremos algunos casos particulares:

Primero. Supongamos que H es muy pequeña en comparación con R, o sea, $H<<\mathrm{R}$ En este caso podemos plantear que $\frac{H}{\mathrm{R}}\cong 0$ es una magnitud tan pequeña que su valor es cercano a cero. Dividiendo el numerador y el denominador por R nos quedará de la siguiente forma:

$$v_0=\sqrt{\frac{\frac{2g\,\mathrm{R}\,H}{\mathrm{R}}}{\frac{\mathrm{R}+H}{\mathrm{R}}}}=\sqrt{\frac{2gH}{1+\frac{H}{\mathrm{R}}}}=$$

$$\text{como}:\frac{H}{\mathrm{R}}\cong 0,\ \text{nos queda}:$$

$$v_0\cong\sqrt{\frac{2gH}{1}}$$

$$v_0\cong\sqrt{2gH}$$

De este modo para magnitudes de H muy pequeñas llegamos a la fórmula de Galileo (Compruebe en textos de Física General)

Segundo. Hallemos la velocidad inicial, con la cuál hace falta lanzar un cuerpo para que este se aleje infinitamente de la Tierra, o sea, salga del campo gravitatorio de la Tierra. Dividiendo el numerador y el denominador por H obtendremos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\frac{2g\,\mathrm{R}\,H}{H}}{\frac{\mathrm{R}+H}{H}}} = \sqrt{\frac{2g\,\mathrm{R}}{\frac{\mathrm{R}}{H}+1}}$$

Cuando $H \approx \infty$, considerando el radio de la Tierra $\mathrm{R} \cong 6378$ Km $\Rightarrow 6{,}378.10^6$ m y $\mathrm{g} = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$ hallamos:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g\,\mathrm{R}}{\frac{\mathrm{R}}{H}+1}} \cong \sqrt{\frac{2\left(9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}\right)\left(6{,}378.10^6\ \mathrm{m}\right)}{\frac{6{,}378.10^6\ \mathrm{m}}{\infty}+1}} \cong$$

$$\text{Como}: \frac{6{,}378.10^6\ \mathrm{m}}{\infty} \approx 0$$

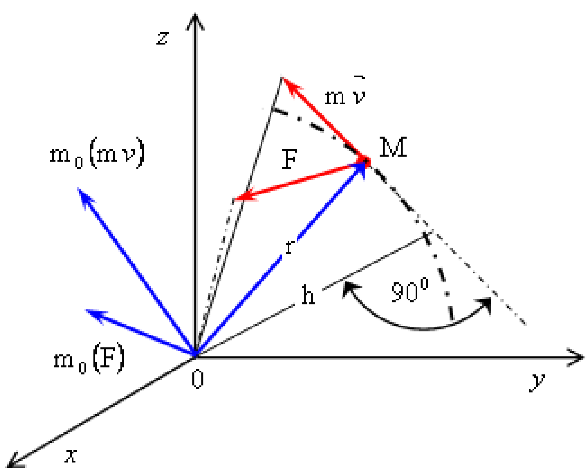
$$v_0 \cong \sqrt{2\left(9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}\right)\left(6{,}378.10^6\ \mathrm{m}\right)} \cong$$

$$v_0 \cong \sqrt{\left(125{,}0936274\ .10^6\ \mathrm{m^2/s^2}\right)} \cong$$

$$v_0 \cong 11{,}18\,.10^3\ \mathrm{m/s}$$

Este resultado es conocido en Cosmología como Tercera Velocidad Cósmica

Teorema de los momentos: De las dos características dinámicas fundamentales (Momento lineal y Energía Cinética de un cuerpo puntual) $\mathrm{m}\vec{v}$ es una magnitud vectorial. A veces durante el estudio del movimiento de un cuerpo puntual, en vez de la variación del propio vector $\mathrm{m}\vec{v}$, resulta necesario examinar la variación de su momento. El momento del vector $\mathrm{m}\vec{v}$ respecto a un centro dado 0 o eje x, y ó z redesigna por $\mathrm{m}_0(\mathrm{m}v)$ o $\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v)$ (respecto a un eje) y se llama respectivamente **momento de la cantidad de movimiento o momento cinético del cuerpo puntual** respecto a este centro (eje). Se calcula el momento del vector $\mathrm{m}\vec{v}$ de la misma manera que el momento de una fuerza. En este caso se considera que el vector $\mathrm{m}\vec{v}$ está aplicado al cuerpo puntual en movimiento como lo mostramos a continuación:



Su módulo es $|\mathrm{m}_0(\mathrm{m}v)| = \mathrm{m}v\mathrm{h}$, donde h es la longitud de la perpendicular trazada del centro 0 a la dirección del vector $\mathrm{m}\vec{v}$.

Teorema de los momentos respecto a un eje. Examinemos un cuerpo puntual de masa m que se mueve bajo la acción de una fuerza F. Hallemos para este cuerpo la relación entre los momentos de los vectores $\mathrm{m}\vec{v}$ y F respecto a un eje inmóvil z. Según la fórmula del momento de fuerza respecto a un eje:

$$\mathrm{m}_z(\mathrm{F}) = x\mathrm{F}_y - y\mathrm{F}_x$$

Por analogía para la magnitud $\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v)$ nos quedará que:

$$\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}\,xv_y - \mathrm{m}\,yv_x$$

$$\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}(xv_y - yv_x)$$

Derivando los dos miembros de la igualdad respecto al tiempo se halla:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}\left(\frac{dx}{dt}v_y - \frac{dy}{dt}v_x\right) + \left(\mathrm{m}\,x\frac{dv_y}{dt} - \mathrm{m}\,y\frac{dv_x}{dt}\right)$$

Como: $\frac{dx}{dt} = v_x$ y $\frac{dy}{dt} = v_y$ nos queda que:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}(v_x v_y - v_y v_x) + \left(\mathrm{m}\,x\frac{dv_y}{dt} - \mathrm{m}\,y\frac{dv_x}{dt}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}(0) + \left(\mathrm{m}\,x\frac{dv_y}{dt} - \mathrm{m}\,y\frac{dv_x}{dt}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \left(\mathrm{m}\,x\frac{dv_y}{dt} - \mathrm{m}\,y\frac{dv_x}{dt}\right)$$

De acuerdo con:

$$\mathrm{m}_z(\mathrm{F}) = x\mathrm{F}_y - y\mathrm{F}_x$$

Y la Ley Fundamental de la Dinámica:

$$\mathrm{m}\,x\frac{dv_y}{dt} = x\mathrm{F}_y$$

$$\mathrm{m}\,y\frac{dv_x}{dt} = y\mathrm{F}_x$$

De aquí que nos quedará:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = x\mathrm{F}_y - y\mathrm{F}_x = \mathrm{m}_z(\mathrm{F})$$

La ecuación obtenida expresa el **Teorema de los momentos respecto del eje:** *la derivada del momento cinético del cuerpo puntual respecto de un eje cualquiera con relación al tiempo, es igual al momento de la fuerza efectiva respecto del mismo eje.*

Existe un teorema análogo para los momentos respecto de cualquier centro 0. Su expresión matemática está dada por la fórmula siguiente:

$$\frac{d[\mathrm{m}_0(\mathrm{m}v)]}{dt} = \mathrm{m}_0(\mathrm{F})$$

De la ecuación $\frac{d}{dt}\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) = \mathrm{m}_z(\mathrm{F})$ es fácil deducir que, si $\mathrm{m}_z(\mathrm{F}) = 0$, entonces $\mathrm{m}_z(\mathrm{m}v) =$ constante (la derivada de una constante es igual a cero), es decir, si el momento de la fuerza efectiva respecto a cualquier eje es igual a cero, el momento cinético del punto respecto al eje es una magnitud constante.

Teorema de los momentos respecto de un centro. Para un cuerpo puntual que se mueve bajo la acción de una fuerza F como la figura anterior, hallemos la dependencia entre los vectores $m\vec{v}$ y F respecto de un centro inmóvil 0. Según la fórmula del momento de fuerza respecto de un centro inmóvil 0:

$$m_0(F) = r \times F$$

Por analogía nos quedará:

$$m_0(m\vec{v}) = r \times m\vec{v}$$

En este caso, el vector $m_0(F)$ está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por el centro 0 y por el vector F, el vector $m_0(m\vec{v})$ está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por centro 0 y por el vector $m\vec{v}$.

Si derivamos la expresión $m_0(m\vec{v}) = r \times m\vec{v}$ respecto al tiempo, nos quedará:

$$\frac{d\left[m_0(m\vec{v})\right]}{dt} = \frac{d(r \times m\vec{v})}{dt} = \left(\frac{d\,r}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(r \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) =$$

$$\frac{d\left[m_0(m\vec{v})\right]}{dt} = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (r \times m\vec{a})$$

Como $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, ya que son vectores paralelos y el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero y $m\vec{a} = F$.

Entonces:

$$\frac{d\left[m_0(m\vec{v})\right]}{dt} = r \times \vec{F}$$

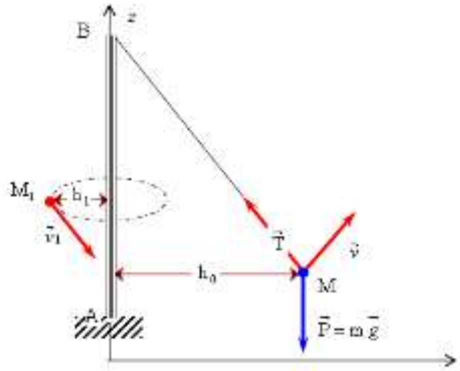
$$\frac{d\left[m_0(m\vec{v})\right]}{dt} = m_0(\vec{F})$$

Esto demuestra el **teorema de los momentos respecto de un centro:** *la derivada del momento cinético de un cuerpo puntual tomado respecto a un centro in móvil, con relación al tiempo, es igual al momento de la fuerza que actúa sobre el punto, respecto a este mismo centro.*

En la práctica, tal resultado es muy importante en el caso del movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza central.

Ejemplos:

(I). A continuación mostramos una bola M está ligada (unida) a un hilo MBA cuya porción BA ha pasado por el interior de un tubo vertical:



En el instante cuando la bola está a una distancia h_0 del eje z del tubo, se le comunica una velocidad v_0 perpendicular al hilo MBA. Al mismo tiempo el hilo empieza a introducirse lentamente en el tubo.

- Hallar la velocidad v_1 que tendrá la bola cuando la distancia al eje z del tubo disminuya hasta h_1.

Resolución:

En este caso le proponemos el siguiente procedimiento:

Sobre la bola actúan la fuerza de gravedad $\vec{P} = m\vec{v}$, la reacción del hilo o tensión $\vec{T}$. Los momentos de estas fuerzas respecto al eje z son iguales a cero (en virtud del teorema de los momentos respecto del eje), porque, la fuerza es paralela al eje z y la fuerza $\vec{T}$ interseca a este eje. Por lo que según el teorema de los momentos respecto a un eje podemos plantear que:

$$\frac{d}{dt}m_z(mv) = 0$$

Donde:

$$m_z(mv) = mvh \Rightarrow \text{constante}$$

Como la masa es constante es fácil deducir que:

$$mv_0 h_0 = mv_1 h_1 \big| \div mh_1$$

$$v_1 = \frac{v_0 h_0}{h_1}$$

Este resultado implica que a medida que la bola se esté acercando $h_1 \to 0$ a l eje z (tubo) la velocidad irá aumentando, o sea:

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{v_0 h_0}{h_1} = \infty$$

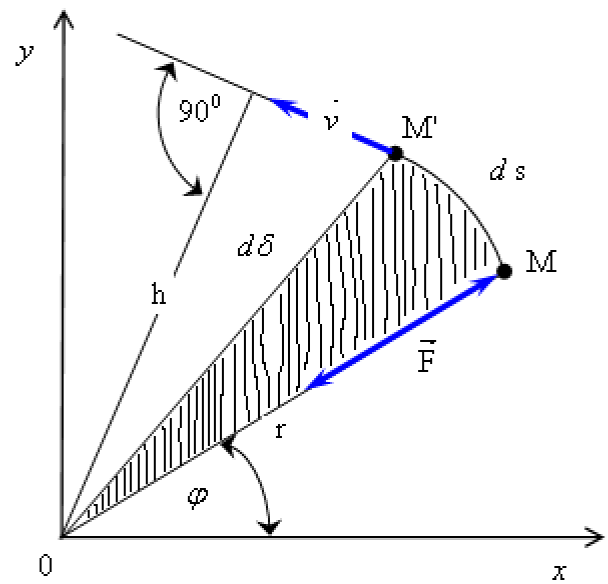
MOVIMIENTO DE UN CUERPO BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL. LEY DE LAS ÁREAS

Este tema es muy importante ya que se aplica en la Cosmología y Astronáutica, por lo que su estudio e interpretación permitió no sólo comprender las características del movimiento de los planetas, satélites y otros cuerpos celeste, sino, también el lanzamiento de estaciones orbitales para estudios científicos sobre muchos fenómenos de nuestro planeta.

La fuerza central es aquella cuya línea de acción pasa todo el tiempo por un centro determinado 0. Como ejemplo de este tipo de fuerza tenemos la fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre la Tierra o cualquier otro planeta del Sistema Solar, o la que ejerce la Tierra sobre cualquier satélite de la misma.
Si utilizamos la ecuación:

$$\frac{d\left[\mathrm{m}_0\left(\mathrm{m}\vec{v}\right)\right]}{dt}=\mathrm{m}_0\left(\vec{\mathrm{F}}\right)$$

Analicemos el movimiento de un punto M sometido a la acción de una fuerza central $\vec{\mathrm{F}}$, como en este caso $\mathrm{m}_0\left(\vec{\mathrm{F}}\right)=0$, entonces $\mathrm{m}_0\left(\mathrm{m}\vec{v}\right)=\mathrm{r}\times\vec{v}=\text{constante}$, es decir, el módulo y la dirección del vector $\mathrm{m}_0\,\vec{v}$ son constantes, para que podamos comprender con más facilidad la situación planteada le mostramos a continuación la representación gráfica del fenómeno que estamos analizando:



Como hemos visto con anterioridad el vector $\mathrm{m}_0\left(\mathrm{m}\vec{v}\right)=\mathrm{r}\times\mathrm{m}\vec{v}$ está dirigido perpendicularmente al plano que pasa por los vectores $\vec{\mathrm{r}}$ y $\vec{v}$. Por lógica si el vector $\vec{\mathrm{r}}\times\vec{v}$ tiene siempre la dirección constante, el radio vector $\vec{\mathrm{r}}=\overline{\mathrm{OM}}$ del punto M y el vector velocidad $\vec{v}$ deben ser todo el tiempo coplanares. De aquí concluimos que la trayectoria del punto M será una curva plana. Además al mismo tiempo se cumplirá $\left|\mathrm{m}_0\,\vec{v}\right|=v\,\mathrm{h}=\text{constante}$.

De este modo, un punto sometido a la acción de una fuerza central se moverá por una curva plana y su velocidad $\vec{v}$ variará de manera tal que el momento del vector $\vec{v}$ respecto del centro 0 permanecerá constante. Este último resultado tiene una interpretación geométrica evidente.

Ya que:

$$v\,\mathrm{h}=\mathrm{h}\frac{d\,\mathrm{s}}{dt}$$

y

$$\mathrm{h}\,d\,\mathrm{s}=2d\delta$$

Donde:

$d\delta$ Es el área de un triángulo elemental $\Delta\mathrm{OMM}'$ implicará que:

$$v\,\mathrm{h}=2\frac{d\delta}{dt}$$

La magnitud $\frac{d\delta}{dt}$ nos determina la velocidad con que aumenta el área que describe el radio vector $\vec{r} = \overline{OM}$ durante el movimiento de un punto (cuerpo puntual) M y de llama velocidad de sector del punto. En el caso que se estudia la velocidad es constante:

$$v\,h = 2\frac{d\delta}{dt}\bigg|\div 2$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2}v\,h$$

$$\text{Como}: v\,h = \left|m_0\,\vec{v}\right|, \text{entonces}:$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{2}m_0\,\vec{v}$$

Por lo que podemos decir con certeza que, *un punto sometido a la acción de una fuerza central se mueve por una curva plana con una velocidad de sector constante, es decir, de tal modo que el radio vector del punto durante su movimiento recorre iguales áreas en iguales intervalos de tiempo* (Ley de las áreas)

Esta Ley tiene lugar durante los movimientos de los planetas alrededor del Sol y en todo sistema gravitacional del universo donde exista un cuerpo al menos que sea satélite de otro. Siendo esta una de la expresiones de Kepler.