LA INTEGRAL DEFINIDA: UNA HERRAMIENTA COGNITIVA PODEROSA PARA MODELAR Y RESOLVER PROBLEMAS ECONÓMICOS.

Ana Ida Vilier
ivilier@cug.co.cu
Rafael Cardoza Gámez
cardoza@fce.cug.co.cu
Universidad de Guantánamo

Resumen:

Considerando las palabras del matemático francés Julio Enrique Poincaré (1854-1912), quien sostenía que: "Toda ciencia tiene de ciencia lo que tiene de Matemática", en este artículo, mediante la modelación y resolución de problemas que exigen la aplicación de la integral definida, se ha tratado de significar la importancia que tiene esta herramienta cognitiva poderosísima para los economistas.

Introducción: Es en el siglo XIX a través de la Revolución Marginalista cuando las matemáticas adquieren relevancia en la Ciencia Económica, pues León Walras establece la Teoría de Equilibrio de mercado y esto lo hace matemáticamente. Pero además, el desarrollo de los mercados financieros ha sido crecientemente gobernado por modelos matemáticos, hecho que ha determinado que las matemáticas necesariamente sean consideradas para analizar este tipo de mercados, convirtiéndolas en una herramienta esencial para transmitir ideas económicas

Desarrollo

En una sociedad, los individuos tomados tanto en forma aislada como en su conjunto, tienen necesidades materiales (vivienda, alimentación, etc) y no materiales (salud, recreación, etc.).Pero, ¿cómo las satisfacen si cuentan con recursos que son escasos o limitados? El camino es el de realizar actividades productivas.

En ese marco se define la **Economía:** como la ciencia que se encarga de distribuir en forma conveniente los recursos escasos de una sociedad, con el objeto de producir bienes que permitan satisfacer directa o indirectamente los deseos o necesidades de los individuos. Los economistas son los encargados de encontrar las respuestas al problema que surge entre deseos y necesidades ilimitadas, frente a recursos que son escasos. Para intentar entender como funcionan estas relaciones utilizaremos modelos matemáticos.

Un modelo es una abstracción simplificada de una realidad más compleja y desde el punto de vista matemático, modelar significa llevar una situación de la realidad objetiva al lenguaje de las matemáticas, claro para ello se necesita tener un sistema de conocimientos matemáticos previos, que en este caso constituyen las herramientas cognitivas que les permitan al que modela traducir del lenguaje común al matemático, además de resolver el problema. Estos robustecen al economista, y le permiten conocer que las matemáticas son aplicables a diferentes contextos.

La modelación de problemas económicos se sustenta de las matemáticas, por lo que se han considerado en este artículo, algunos contenidos esencialmente de la práctica contable que se nutren de la misma para ser resueltos, en especial de la integral definida y con ello mantener el antiguo status de la matemática, esto es: **el de ser la herramienta cuantitativa más importante de la práctica económica.** (MATTESICH 1964: 14,15), además de demostrar que la modelación matemática de los fenómenos económicos, ayudará a una mejor formulación y a una resolución sistemática (es decir: ordenada y efectiva) de los problemas que la Economía necesita que sean resueltos, pretendiendo además que sirva de ayuda para preparar a los contadores desde una perspectiva de las ciencias económicas.

Se hace énfasis dentro del proceso, precisamente en el modelado, pues la resolución puede ser auxiliada con el uso de las nuevas tecnologías (TIC).

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real, desde el tamaño de la población, hasta fenómenos físicos como la velocidad, aceleración o densidad. El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro. El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:

1. Poseer un problema del mundo real

2.Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática (Traducir el problema en términos matemáticos, entonces se dice que se tiene el modelo matemático)

3. Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas (Obtener la solución del problema).

4. Comparar los datos obtenidos como predicciones con datos reales. Si los datos son diferentes, se reinicia el proceso (Interpretar la solución matemática obtenida, en términos del problema original).

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real, de hecho, se trata de una idealización.

¿Cómo puede el economista aplicar esta herramienta e interpretar económicamente el resultado obtenido, si desconoce el concepto de algunos elementos involucrados en estos tipos de problemas?, por tanto es necesario que este rememore previo a afrontar los mismos, algunos conocimientos que serán expuestos a continuación:

Definición: (**Integral definida** de una función).

$\int_a^b f(x)dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, donde $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in (a,b)$.

Esta definición no requiere que a < b. Sin embargo, si a > b y f(x) es positiva en el intervalo [b, a], entonces $\int_b^a f(x)dx$ es un número negativo.

Se ha introducido el concepto de integral definida sin necesariamente darle una interpretación geométrica, la razón está dada en que pueden existir varias interpretaciones, en dependencia del contexto tratado. Por ejemplo si $f(r)$ es una función de densidad de la renta, entonces $\int_b^a f(r)dr$ es la proporción de personas con rentas ente a y b.

Es bueno significar además que:

Si una función positiva *f*(x), definida en un intervalo [a, b], es integrable (existe su integral en $[a, b]$, la integral $\int f(x)\,dx$ que representa el área de la superficie determinada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = a y x = b.

Si la función y = f (x) fuese negativa en el intervalo [*a*, b], la gráfica de la función quedaría por debajo del eje de las abscisas.

Mercado: Es el lugar en donde interactúan vendedores y compradores de distintos bienes para el intercambio de éstos a través de precios y cantidades.

Equilibrio de Mercado: en este contenido son aplicables los modelos lineales y cuadráticos, claro considerando las funciones de igual nombre respectivamente, por cuanto las funciones de oferta y demanda involucradas en el equilibrio se modelan mediante una de esta funciones, en la búsqueda del punto y cantidad de equilibrio, involucradas ellas a su vez en el hallazgo de los excedentes del consumidor y productor respectivamente. En fin existirá una situación de equilibrio entre oferta y demanda cuando los consumidores a los precios de mercado adquieran toda la cantidad que desean y los ofertantes logren vender todas las existencias.

Oferta: Es el conjunto de precios mínimos a los que los productores están dispuestos a ofertar las diferentes cantidades producidas. Depende de varios factores (tecnologías, costos etc.).

Demanda: Es el conjunto de precios máximos que estamos dispuestos a pagar por las diferentes cantidades producidas, depende de diferentes factores (gustos, ingresos precios etc.)

Excedente del Consumidor y Excedente del Productor.

En economía, sabemos que un individuo pierde cuando deja de ganar dinero y gana cuando deja de pagar. No obstante, las ganancias y pérdidas anteriores no son tangibles porque no forman un flujo de dinero como es el caso, por ejemplo, de un flujo de caja en una empresa o una ganancia de una persona en un negocio.

Por ejemplo usted gasta sistemáticamente una cierta cantidad de dinero en un determinado producto y los precios de este disminuyen en un momento dado, entonces lógicamente gastará menos y, dispondrá de más dinero que puede ahora invertir en otros bienes, o sencillamente ahorrarlo.

Por otro lado, si en un mercado aumenta la producción de bienes de tal forma que el precio disminuya, las personas que venían consumiendo dicho producto se benefician porque pagarán menos. Pero no debe olvidarse que cuando hay expansión de la demanda de un bien, esto trae consigo que se beneficien los productores ya que el precio de este bien es superior al anterior.

El excedente del consumidor se define como la diferencia entre lo que estarían dispuestos a pagar los consumidores por una cantidad de producto y lo que realmente pagan.

$EC=\int_0^{q_e} p_d(q)dq - p_e q_e$ Donde p_e es el precio que se paga, q_e la cantidad que se compra y $p_d(q)$ es la ecuación que define a la demanda.

Al establecerse un precio de mercado, todos los productores ofrecen el producto a ese precio, sin embargo existen productores que estarían dispuestos a ofrecer el producto a un precio menor.

El excedente del productor se define como la diferencia entre el precio que recibe el productor y el precio al que estaría dispuesto a ofrecer cada una de las unidades de producto. Son las ganancias adicionales que tienen los productores, ocasionadas por la competencia del mercado.

Al sumar los excedentes, es obtenida la contribución que el mercado hace al bienestar general, que en condiciones de competencia perfecta será máxima.

$EP = p_e\, q_e - \int_0^{q_e} p_o(q)\, dq$ Donde p_e es el precio que se paga, q_e la cantidad que se compra y $p_o(q)$ es la ecuación que define a la oferta.

Importante: Los excedentes pueden ser calculados a través de las áreas de los triángulos o el área bajo la curva de demanda y sobre la curva de oferta.

Ilustremos como aplicar los excedentes, (llamados también superávits), a problemas económicos:

A. Para cierto producto, y en ambiente de competencia pura, la cantidad de unidades y el precio unitario quedan determinados en forma de las coordenadas del punto de intersección de las curvas de oferta y de demanda. Dada la curva de demanda $p = 50 - \frac{x}{20}$ y la curva de oferta $p = 20 + \frac{x}{10}$, calcula el excedente de consumidores y el excedente de productor. Ilustre los resultados con las curvas de oferta y de demanda e identificando los excedentes como áreas.

Solución:

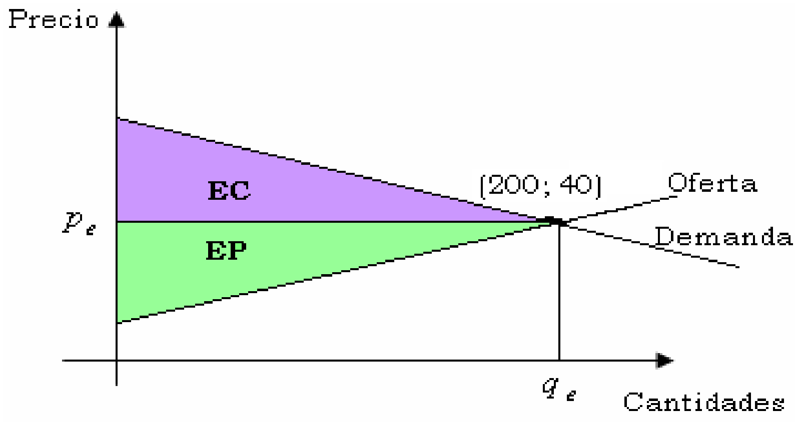
Busquemos el punto de intersección igualando ambas funciones y despejando la variable x, el cual resulta (200, 40). Luego:

EC $= \int_0^{200} \left(50 - \frac{x}{20}\right) dx - 40.200 = \left(50x - \frac{x^2}{40}\right)\Big|_0^{200} - 40.200 = \left(10000 - \frac{40000}{40}\right) - 8000 =$

$9000 - 8000 = 1000\ pesos$

(B). **EP=** $40.200 - \int_0^{200} \left(20 + \frac{x}{10}\right) dx = 8000 - \left(20x + \frac{x^2}{20}\right)\Big|_0^{200} = 8000 - (4000 + 2000) =$

$8000 - 6000 = 2000\ pesos$



q_e **:** Cantidad de equilibrio (200) p_e : Precio de equilibrio (40)

C. Ganancia Total: Se define como la integral de la diferencia entre el ingreso marginal y el costo marginal, (ganancia marginal) evaluado desde una cantidad cero hasta una cantidad para la cual la utilidad de la ganancia resulta ser máxima.

G= IT-CT= P*Q-CT

Relación con el IM y el CM: para maximizar la ganancia, la empresa debe buscar el precio y la cantidad de equilibrio, P* y Q* que le reporten el máximo beneficio, es decir la mayor diferencia entre IT y CT. Este precio y cantidad de equilibrio son aquellos con los que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

IM=CM con una Q* y un P* de máximo beneficio. Veamos como ilustrarlo:

Dadas las funciones de ingreso marginal y costo marginal siguientes:

IM=5000 – 20 x^2 ; CM= 2000 + 10 x^2. Halle la cantidad que debe producirse, para maximizar la utilidad. Determine además la utilidad total en dicho punto (en dólares).

Busquemos la cantidad de equilibrio:

5000 – 20 x^2 = 2000 + 10 x^2 $\leftrightarrow$ x =10 ó x = -10, tomaremos la positiva, porque no existen producciones negativas luego:

$$Utilidad\ total = \int_0^{10} [IT - CT]\, dx = \int_0^{10} \left[\left(5000 - 20x^2\right) - \left(2000 + 10x^2\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^{10} \left(3000 - 30x^2\right) dx = \left(3000x - 10x^3\right)\Big|_0^{10} = 20000\ dólares.$$

D. Formación de Capital.

Si el capital que tiene una empresa en el momento t es $f(t)$, entonces la derivada, $f'(t)$, es llamada **flujo neto de inversión**. Si el flujo neto de inversión es de $\sqrt{t}$ millones de dólares anuales (t representa el número de años), calcule el aumento de (la formación de capital) desde el cuarto hasta el octavo año.

Solución:

$$\int_4^8 \sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_4^8 = 15.084945 - 5.33333 \approx 9.75 \text{ millones de dólares.}$$

Conclusiones:

Los anteriores problemas A, B, C, y D ilustran algunas de las aplicaciones de la integral definida, a la economía, con los cuales puede demostrarse a los economistas la importancia de esta herramienta, además de otras como el ingreso total y la ganancia neta, que también significan la utilidad de la misma.

Todo lo anterior muestra la necesidad de que los economistas conozcan la importancia que reviste la integral definida, pues les permite afrontar situaciones problémicas de la especialidad que necesitan de la modelación a través de esta importante herramienta cognitiva.

Es precisamente a través de la modelación matemática, que se logra todo lo anterior y algo más, vivenciar sus aplicaciones y la integración de esta con otras ramas de la ciencia, además de convertir a los economistas desde esta perspectiva, en intérpretes y usuarios de las matemáticas de una manera consciente.

Bibliografía Utilizada.

1. Barnet Raimond A. Matemáticas para Administración y Ciencias Sociales. 2^a Edición. Nueva Editorial Interamericana S. A. México, 1983.

2. (Camarena 2001).La Transposición Contextualizada

3. (Colectivo de autores). Laboratorio de Matemática Superior

4. JAGDISH C. Arya y Robin W. Lardner. (1992) "Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía".

5. (James Stewart, 2002).Cálculo con Trascendentes Tempranas

6. Petri, F. (2004). General Equilibrium, Capital, and Macroeconomics: A Key to Recent Controversies in Equilibrium Theory. Edward Elgar.
7. (Sydsaeter, Hammond, 2003) .Matemáticas para el Análisis Económico Volumen I.