Revista Académica: CONTRIBUCIONES A LA ECONOMÍA
Grupo eumednet

ISSN: 1696-8360

REDUCCIÓN DE VARIABLES EN LA BÚSQUEDA DE EXTREMOS CONDICIONADOS DE FUNCIONES ECONÓMICAS MULTIVARIANTES

Josep Maria Franquet Bernis
Dr. Ingeniero Agrónomo. Dr. en Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Campus del Nordeste. Centro Asociado de Tortosa (Tarragona). director@tortosa.uned.es.

RESUMEN

El método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange para la resolución de los problemas de extremos condicionados de varias variables, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de "ensilladura") o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo o económica a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida de reducción o eliminación de variables para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar. Para una mayor claridad del proceso, se desarrollan varios ejercicios y casos prácticos representativos de las ventajas que ofrece la técnica en cuestión.

Palabras clave: extremos - ecuación condicionante - función objetivo o económica - operador de Lagrange - determinante funcional - variable independiente - punto crítico.

Códigos identificativos según el *Journal of Economic Literature* (JEL): C30, C61.

SUMMARY / ABSTRACT

The traditional method of multipliers or Lagrange's operators to the resolution of the problems in conditional ends of several variables, or the jacobians determinants, they are only needed in the presence of points of chair (or "tack") either when the implied form of the constraint prevents clear or variables that you want to replace in the objective function to optimize. It can also happen that expressed methods do not provide definitive solutions and have to resort, precisely, to the aforementioned technique of reduction or elimination of variables to effectively solve the problem, as we will have opportunity to see. For greater clarity in the process, develop several representative exercises and a practical cases of the advantages offered by the technology in question.

***Key words**: ends - determinant equation - objective function - Lagrange's operator - independent variable - functional determinant - critical point.*

***Journal of Economic Literature* (JEL) Classification Codes:** C30, C61.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema que se presenta con frecuencia en el Análisis Matemático (anteriormente denominado "Cálculo Infinitesimal") estriba en determinar los extremos relativos o locales (máximos y/o mínimos) de una función real cuyas variables reales no son independientes sino que se encuentran ligadas por una o más ecuaciones condicionantes. Decimos, entonces, que se trata de un problema de "extremos ligados o condicionados".

Suelen presentarse en algunos problemas de la Física, la Economía o la Ingeniería. Entonces, el método tradicional de los multiplicadores u operadores de Lagrange, o el de los determinantes jacobianos, son sólo necesarios en presencia de puntos de silla (o de “ensilladura”) o bien cuando la forma implícita de la restricción impide despejar la o las variables que interese substituir en la función objetivo o económica a optimizar. Puede suceder, también, que los expresados métodos no ofrezcan soluciones definitivas y haya que recurrir, justamente, a la técnica referida para solventar eficazmente el problema planteado, como tendremos ocasión de comprobar.

En efecto, supongamos que la ecuación condicionante permita despejar una de las variables en función de las otras, por ejemplo, en la forma: $z = \Phi(x,y)$, y substituyéndola en la función objetivo a optimizar se obtiene:

$$u = f\,[x,y,\ \Phi(x,y)] = F(x,y),$$

y el problema consistirá en buscar los valores extremos de F(x,y) cuyas variables ya son independientes, para lo cual se pueden aplicar los criterios clásicos establecidos.

Pues bien, por tratarse de una cuestión que, generalmente, no se halla contemplada expresamente en los tratados de análisis matemático al uso, hemos creído conveniente su desarrollo con la apoyatura de algunos ejemplos generales y casos prácticos de teoría microeconómica que juzgamos suficientemente representativos al respecto.

2. METODOLOGÍA Y BASE TEÓRICA

2.1. Método de los operadores de Lagrange

Sea la función z = f(x,y) sujeta a la condición g(x,y) = 0. Para obtener los máximos o mínimos condicionados, se forma la función de Lagrange:

$$\phi(x,y) = f(x,y) + \lambda\cdot g(x,y).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Los extremos buscados resultan del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = f'_x(x,y) + \lambda\cdot g'_x(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} = f'_y(x,y) + \lambda\cdot g'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formando ahora la diferencial segunda:

$$d^2\phi(x,y) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^2,$$ con la condición:

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0\cdot$$

Entonces, la función tiene un máximo si $d^2\phi < 0$ y un mínimo si $d^2\phi > 0$ (García y Rodríguez, 1985 : 406). Si $d^2\phi = 0$ es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

Esta condición de segundo grado u orden puede discriminarse, frecuentemente, mediante la formación del denominado “hessiano orlado relevante”, que ofrece los siguientes valores:

$$H(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}\Phi''_{x^2} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{x\lambda}\\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{y^2} & \Phi''_{y\lambda}\\ \Phi''_{x\lambda} & \Phi''_{y\lambda} & \Phi''_{\lambda^2}\end{vmatrix}\left\langle\begin{matrix}>0\rightarrow \text{MÁXIMO} \quad (2 \text{ var iables})\\ <0\rightarrow \text{MÍNIMO}\end{matrix}\right.$$

donde siempre $\Phi''_{\lambda^2}=0$. Este proceso se generaliza *n* variables, así:

MÍNIMO → siempre H < 0.

MÁXIMO → 3 variables → H < 0 → u = f (x, y, z)
4 variables → H > 0 → u = f (x, y, z, t)
5 variables → H < 0 → u = f (x, y, z, t, s)
………………….(y así alternativa y sucesivamente). Con H = 0 es un caso dudoso y hay que seguir investigando.

En la mayoría de los problemas prácticos no resulta necesario efectuar esta distinción, pues a simple vista se conoce la naturaleza del punto extremo o crítico en cuestión.

2.2. Método de los determinantes jacobianos

Sea, en el caso de 2 variables, la función objetivo: z = f(x,y) y la ecuación de condición: g(x,y) = 0. El sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{array}\right. \qquad [I]$$

representará, en general, una curva en el espacio afín tridimensional euclídeo y los valores que toma *z* serán los de la función *f* a lo largo de la curva *g*. Por tanto, razonando como se hace para la obtención de los extremos ordinarios, la condición necesaria para la existencia de extremo condicionado en un punto será la anulación, en dicho punto, de z'_g.

Luego, para la obtención de los posibles puntos extremos, formaremos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} z'_s=\dfrac{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y}}=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$$

O bien, como $\sqrt{g'^2_x+g'^2_y}$ es siempre positivo (obsérvese que ambas derivadas, si el sistema [I] representa una curva, no son idénticamente nulas, simultáneamente) el sistema es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=J(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$$

siendo J(x,y) el determinante funcional jacobiano.

Para deducir las condiciones suficientes o de segundo grado, bastará con estudiar el signo de z''_{g^2}. Recordando que:

$$z'_g=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot g'_y-\frac{\partial z}{\partial y}\cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y}}=\frac{J}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y}}\text{, se tendrá que: } z''_{g^2}=\frac{\frac{\partial z'_g}{\partial x}\cdot g'_y-\frac{\partial z'_g}{\partial y}\cdot g'_x}{\sqrt{g'^2_x+g'^2_y}}\,,$$

que, en los puntos en que se anula J(x, y), se convierte en:

$$z''_{g^2} = \frac{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y}\cdot J'_x\, g'_y - \sqrt{g'^2_x + g'^2_y}\cdot J'_x\, g'_y}{(g'^2_x + g'^2_y)^{3/2}} = \frac{\frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)}}{g'^2_x + g'^2_y}\ .$$

Por tanto, si en un punto de los hallados:

$$\begin{cases} z'' > 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} > 0, \text{ existe un mínimo relativo} \\ \\ z'' < 0 \rightarrow \dfrac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} < 0, \text{ existe un máximo relativo} \end{cases}$$

NOTA: El método expuesto resulta generalizable a *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si se trata de obtener los extremos de $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con las (n-1) restricciones:

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ ;\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ ;\ \ldots;\ g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ ;$$

se resuelve el sistema formado por las *n* ecuaciones siguientes:

$$J = \frac{\partial(f, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0\ ;\ g_1 = 0\ ;\ g_2 = 0\ ;\ \ldots;\ g_{n-1} = 0\ ;$$

y para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula en cada uno de los puntos hallados el signo de:

$$J_1 = \frac{\partial(J, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\ ,$$

resultando un máximo local si $J_1 < 0$ y un mínimo local si $J_1 > 0$ (García y Rodríguez, 1985 : 411).

2.3. Método de substitución, eliminación o reducción de variables

El problema de los extremos condicionados, generalizado a *n* variables, consiste en hallar los extremos de la función $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen la ecuación condicionante: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Si es posible resolver esta última ecuación para una de las variables, como por ejemplo: $x_1 = h(x_2, \ldots, x_n)$, la solución de x_1 puede substituirse en z resultando: $f\,[h(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$, que es una función de (n-1) variables. Llamemos a esta función $F(x_2, \ldots, x_n)$; la obtención de los extremos de z, sujeta a la condición g anteriormente expresada, resulta equivalente a la obtención de los extremos no condicionados de $F(x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a las variables $x_2, \ldots, x_n$. El problema de extremos condicionados se reduce, de este modo, al de uno no condicionado y con las mismas variables o bien una variable menos, que podemos resolver en la forma acostumbrada. Esto es, que nos permite pasar de un programa de optimización restringida con restricciones de igualdad a una optimización clásica libre sin ningún tipo de restricciones y con el mismo o inferior número de variables, lo que simplifica notablemente el proceso de resolución.

Por el contrario, a este procedimiento se le puede achacar que envuelve una pérdida de simetría debido a que ofrece preferencia a una de las variables de la condición (que, normalmente, será la más sencilla de despejar en función de las otras). En todo caso, para poder efectuar la substitución antedicha en un problema general de este tipo, han de poderse explicitar *m* variables de decisión en función de las (n – m) restantes, que es el números de grados de libertad del problema planteado. Y ello no es siempre posible aunque sí lo es en una gran mayoría de problemas prácticos, razón por la cual se presenta aquí mediante algunos ejemplos aclaratorios que veremos a continuación.

Se supone siempre que el número de variables *n* y el número de restricciones *m* son finitos, y además n > m. Si sucediese que n < m puede resultar que el conjunto de soluciones factibles fuese el vacío o infinito, con lo cual no existe solución, o resulta trivial el problema de optimización.

Por otra parte, las restricciones de igualdad en un problema de optimización "reducen" su dimensión. En general, por cada restricción que se añada se pierde un grado de libertad a la hora de obtener los valores que hacen que la función objetivo o económica alcance su valor óptimo (Guzmán et alt., 1999 : 540).

2.4. Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

En epígrafes anteriores se ha visto que los puntos obtenidos al resolver un programa con restricciones de igualdad llevan asociados los denominados multiplicadores de Lagrange (uno por cada restricción o ecuación condicionante). Nos referiremos, a continuación, al significado de dichos multiplicadores, de especial importancia en sus aplicaciones a la Economía (Balbás y Gil, 2004 : 85).

Para ello, formulemos un programa con restricciones de igualdad, como el siguiente:

Optimizar: $f(x_1,\ldots,x_n)$, sujeto a: $\left.\begin{array}{c} g_1(x_1,\ldots,x_n) = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = b_m \end{array}\right\}$ (I)

Donde se cumple que f: A $\rightarrow$ R y g = ($g_1,\ldots,g_m$): A$\rightarrow$ R^m (n > m) son dos funciones de clase C^2 en el abierto A $\subset$ R^n.

Si suponemos que $b_1,\ldots,b_m$, pueden variar, es claro que el conjunto factible M dependerá de b = ($b_1,\ldots,b_m$), y escribiremos simbólicamente:

$$M(b) = \{x \in A / g(x) = b\}.$$

Intuitivamente, es claro que los puntos óptimos del programa (I) dependerán del valor de b = ($b_1,\ldots,b_m$). Así si dado $\bar{b} = (\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)$ el programa (I) posee un óptimo en el punto: $(\bar{a},\bar{\lambda})(\bar{a} = (\bar{a},\ldots,\bar{a}_n),\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m))$, y podemos establecer una función F: B $\rightarrow$ R (B es un entorno de b), tal que F(b) = f(a), $\forall$b $\in$ B, y *a* es el óptimo del programa para b $\in$ B.

Pues bien, dado un programa como el (I), si para $\bar{b} = (\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)$ la función *f* posee un extremo relativo sobre el conjunto M(b) en el punto $(\bar{a},\bar{\lambda})$ en el que el determinante funcional jacobiano de la función *g* posee rango *m* y el determinante hessiano orlado es no nulo, entonces se cumple que:

$$-\lambda_i = \frac{\partial F(b)}{\partial b_i}.$$

Así pues, este multiplicador asociado a la i-ésima restricción, nos mide la tasa de variación del valor de la función objetivo *f* en el punto óptimo con respecto a su correspondiente b_i, por lo que se le suele denominar "precio sombra".

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange mide el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo con respecto a la variación del término independiente de la k-ésima restricción b_k. Es decir:

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial b_k} = -\lambda_k^*.$$

Pero los multiplicadores de Lagrange λ_i ($\forall$ i = 1, 2, …, m) pueden tener sentido económico, como ya hemos enunciado. Hemos demostrado que los multiplicadores de

Lagrange equivalen a derivadas parciales; y en Economía estas derivadas son sinónimo del término "marginal". Por ello, los multiplicadores λ_i pueden interpretarse como cambios marginales (Sánchez, 2014 : 78). Veámoslo seguidamente en algunas aplicaciones microeconómicas.

1. *En la planificación de la producción*

Así, si tenemos un problema de planificación de producción en donde la función objetivo sea el beneficio a obtener, y las ecuaciones de restricción señalen las disponibilidades de recursos (es decir, las restricciones impuestas por las cantidades limitadas de los factores disponibles b_i), veamos qué medirán entonces los multiplicadores de Lagrange.

El opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange, simbolizado por: $-\lambda_k^*$, nos señala el aumento del beneficio máximo provocado por la disponibilidad de una unidad más del k-ésimo recurso b_k. O dicho de otra manera, nos medirá la *rentabilidad marginal* del recurso o factor b_k.

Por tanto, $-\lambda_k^*$ representa el precio máximo que el empresario está dispuesto a pagar por una unidad adicional del k-ésimo recurso. Y por eso, al multiplicador $-\lambda_k^*$ -opuesto del operador de Lagrange- se le llama en Economía, *precio sombra* del factor productivo b_k. La justificación del apelativo "precio sombra" del factor estriba en considerar el precio del expresado factor como si estuviese a la "sombra", en el sentido de que su precio puede diferir del precio real de mercado de ese factor.

Resulta obvio colegir que si el precio real de mercado es superior a su "precio sombra" no será rentable incrementar la utilización de dicho factor. Por el contrario, si el precio de mercado es inferior a su "precio sombra", sí será rentable aumentar la utilización de dicho factor.

2. *En la maximización de la utilidad*

El consumidor racional desea adquirir aquella combinación de bienes y/o servicios con la que obtenga un nivel de satisfacción más alto; se trata, pues, de un problema de maximización. Sin embargo, su renta es limitada y no puede adquirir una cantidad ilimitada de productos. Así pues, para maximizar la función de utilidad condicionada a la "ecuación de balance", el consumidor debe encontrar la combinación de bienes y/o servicios que satisfaga dicha ecuación y, al mismo tiempo, maximice su función de utilidad (Henderson y Quandt, 1968 : 13).

Consideremos, por ejemplo, la proposición básica en la teoría del consumo consistente en el deseo de los individuos de consumir simultáneamente diversos bienes y/o servicios. Este postulado afirma que la satisfacción, o utilidad derivada de consumir un conjunto de bienes y/o servicios, está en función de los niveles de consumo de cada uno de ellos, a los que puede acceder el consumidor (Guzmán et alt., 1999 : 374).

Así, si suponemos, como se ha dicho, que el consumidor trata de maximizar su función de utilidad $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde los x_i son los niveles de consumo de los *n* bienes o servicios, sujeta a la ecuación de restricción presupuestaria o "ecuación de balance" siguiente: $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$, donde *b* nos señala la renta disponible, ¿qué nos señalaría el multiplicador $-\lambda'$ en este caso?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: $-\lambda^*$, nos medirá la utilidad marginal de la renta en el punto óptimo.

3. *En la minimización de costes*

Si una empresa desea minimizar su función de costes, estando éstos sujetos a una correcta restricción de producción (donde nos indica el nivel de producto), ¿qué nos señala el multiplicador $-\lambda^*$?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange: -λ^*, nos medirá el coste marginal de producir una unidad de producto más, a partir del punto óptimo (Sánchez, 2014 : 79).

3. ALGUNOS EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Ejemplo 1

Hallar, por el método de los multiplicadores de Lagrange, los extremos condicionados de la función: $z = x\cdot y$, si $x + y = 1$.

a) La función de Lagrange o *lagrangiana* es:

$$\phi(x,y) = x\cdot y + \lambda(x + y - 1), \text{ de donde:}$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y + \lambda = 0\,;\; \frac{\partial\phi}{\partial y} = x + \lambda = 0\,;\; x + y = 1,$$

de donde, para $\lambda = -\frac{1}{2}$, se obtiene: $x = y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si es máximo o mínimo, haremos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0\,;\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = (\text{lema de Schwartz}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = 1;\; \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0\,,$$

luego, substituyendo: $d^2\phi = 0\cdot dx^2 + 2\cdot 1\cdot dx\, dy + 0\cdot dy^2$,

y como: $x + y = 1$, $dx + dy = 0$, o sea, $dy = -dx$.

Substituyendo nuevamente, se tendrá que:

$$d^2\phi = 2\cdot dxdy = 2\cdot dx\,(-dx) = -2\cdot dx^2 < 0.$$

Por ser negativa $d^2\phi$, en el punto P(½,½,¼) existe, pues, un máximo relativo o local.

b) Otra manera bastante más inmediata de solucionarlo, por el método de reducción de variables que aquí se propugna, conduciría a la siguiente función de una sola variable:

Como: $y = 1 - x$; $z = x(1 - x) = x - x^2$; y entonces:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 1 - 2x = 0;\; 2x = 1;\; x = ½\,;\;\; y = 1 - ½ = ½\,.$$

Del mismo modo: $z = ½ \cdot ½ = ¼$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Y como: $z''_{x^2} = -2 < 0 \rightarrow$ MÁXIMO local, llegando a la misma conclusión, aunque de modo más simple que operando por el procedimiento anterior.

Ejemplo 2

Hallar los extremos relativos de: $z = x \cdot y^2$, si $x + y = 6$, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

a) La función de Lagrange o auxiliar es, en este caso:

$$\phi(x,y) = x \cdot y^2 + \lambda(x + y - 6).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Derivando parcialmente: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 + \lambda = 0$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy + \lambda = 0$,

que, con la condición $x + y = 6$, forman un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \text{Para } \lambda = 0: & \Rightarrow \quad x = 6,\ y = 0. \\ \text{Para } \lambda = -16: & \Rightarrow \quad x = 2,\ y = 4. \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

La diferencial segunda de ϕ es: $d^2\phi = 2y \cdot dx \cdot dy + 2x \cdot dy^2$,

y como de la ecuación de condición se deduce que: $dx + dy = 0$, se obtiene también $dy = -dx$, y se tiene que: $d^2\phi = (-2y + 2x)dy^2$. Entonces:

$$\begin{cases} \text{Para } x = 6,\ y = 0:\ d^2\phi = 12dy^2 > 0; \text{ luego en } (6, 0, 0) \text{ hay un mínimo local.} \\ \text{Para } x = 2,\ y = 4:\ d^2\phi = -4dy^2 < 0; \text{ luego en } (2, 4, 32) \text{ hay un máximo local.} \end{cases}$$

b) Alternativamente, por reducción de variables se llegará a las mismas conclusiones, puesto que de la ecuación condicionante se tendrá: $y = 6 - x$; y substituyendo este valor en la función objetivo resultará:

$$z = x(6 - x)^2 = x(36 + x^2 - 12x) = x^3 - 12x^2 + 36x ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 3x^2 - 24x + 36 = 0 ;\quad x^2 - 8x + 12 = 0 ;$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} 6 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{matrix} \right. . \text{ Hay, pues, 2 puntos críticos: } \left\langle \begin{matrix} P_1(6,0) \\ P_2(2,4) \end{matrix} \right. .$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 6x - 24$, $\rightarrow$ en P_1 es $12 > 0 \Rightarrow$ MÍNIMO en P_1 (6, 0, 0)

$\rightarrow$ en P_2 es $-12 < 0 \Rightarrow$ MÁXIMO en P_2 (2, 4, 32)

Ejemplo 3

Obtener los extremos de la función $z = x^2 + y^2$, con la condición siguiente: $x + y - 2 = 0$, aplicando diversos procedimientos.

a) Aplicando el método de los jacobianos, se empieza por resolver el sistema:

$$\begin{cases} J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$, que en el presente caso resulta ser:

$$\begin{cases} J = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y = 0 \\ g = x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

que, resuelto, proporciona los valores: $x = 1$, $y = 1$.

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo, se calcula:

$$\frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

resultando, por tanto, un mínimo local en $x = 1$, $y = 1$, $z = 1 + 1 = 2$.

b) Aplicando, ahora, el método de los multiplicadores de Lagrange, empezaremos por formar la función de Lagrange o auxiliar siguiente:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

Anulando sus dos primeras derivadas parciales, se tendrá:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \end{cases}$$

de donde $x = y$, que con $x + y - 2 = 0$ proporciona $x = 1$ e $y = 1$.

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para determinar si esta solución corresponde a un máximo o a un mínimo, se obtiene $d^2\phi$, y según que sea: $d^2\phi > 0$ o $d^2\phi < 0$ se tratará de un mínimo o de un máximo, respectivamente. En nuestro caso sucede que:

$$d^2\phi = 2dx^2 + 2dy^2,$$

y como de la condición: $dx + dy = 0$ se tiene: $d^2\phi = 4dx^2$, que en todos los casos es positiva, luego se trata de un mínimo local, cuyo valor es $z = 2$.

c) El problema planteado también puede resolverse directamente por reducción de variables, quedándonos una sencilla función objetivo de una sola variable independiente, ya que:

$$z = x^2 + y^2 \text{ ; si: } x + y - 2 = 0 \text{ ; } y = 2 - x \text{ ;}$$

$$z = x^2 + (2 - x)^2 = x^2 + 4 + x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + 4 \text{ ;}$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$z'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \text{ ; } z = 1 + 1 = 2.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$z''_{x^2} = 4 > 0 \Rightarrow \text{Luego se trata de un MÍNIMO, en el punto (1, 1, 2).}$$

Ejemplo 4

Determinar, por diversos procedimientos, los extremos de la función siguiente: $z = x^2 + y^2$, con la condición $x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225 = 0$.

a) Método de los jacobianos. Calculemos el jacobiano de las funciones f y g, así:

$$J = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(2x^2 + 3x\cdot y - 2y^2)\cdot$$

Resolvamos el sistema J = 0, g = 0:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x\cdot y - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando por -2 la segunda ecuación y sumando, se obtiene:

$13x\cdot y + 16y^2 = 450$, de donde: $x = \dfrac{450 - 16y^2}{13y}$ [I]

y substituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene:

$$y^4 + 25y^2 - 900 = 0,$$

que es una ecuación bicuadrada, que proporciona: $y^2 = \dfrac{-25 \pm 65}{2} = \left\langle \begin{matrix} 20 \\ -45 \end{matrix} \right.$.

De la primera solución se deduce que $y = \pm 2\sqrt{5}$, que substituida en [I] da, para valores de x: $x = \pm\sqrt{5}$.

De la segunda raíz no se obtiene solución real.

Para precisar si se trata de máximos o de mínimos, se obtiene:

$$J_1(x,y) = \frac{\partial(J,g)}{\partial(x,y)} = 8\begin{vmatrix} 4x+3y & 3x-4y \\ 2x+8y & 8x+14y \end{vmatrix} = 8(26x^2 + 64x\cdot y + 74y^2),$$

y como tanto $J_1(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ como $J_1(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ son positivos, en ambos puntos existen mínimos relativos de valor:

$$z = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{20})^2 = 5 + 20 = 25.$$

b) Este mismo problema, resuelto por el método de reducción de variables, queda establecido así:

$$[OPT]\ z = x^2 + y^2,$$

con la condición: $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$; luego substituyendo en la función objetivo, resultará:

$$z = 225 - 8x\cdot y - 6y^2 ;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} z'_x = -8y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z'_y = -8x - 12y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$z''_{x^2} = 0$; $z''_{xy} = z''_{yx} = -8$; $z''_{y^2} = -12$; luego formaremos el determinante funcional hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = -64 < 0,$$

que ofrece un "punto de silla", y el problema debe ser resuelto por otros métodos. En este caso, pues, el método de reducción de variables no ha resultado efectivo para la resolución del problema planteado.

c) Resolveremos, ahora, el problema aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange. Formando la correspondiente función de Lagrange y anulando sus derivadas primeras, tendremos:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ \phi'_y = 2y + 8\lambda x + 14\lambda y = 0 \\ \phi'_\lambda = x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225 \end{cases}$$

Podríamos eliminar λ entre las dos primeras ecuaciones, pero, en este caso, es preferible obtener los posibles valores de λ, imponiendo la condición de compatibilidad del sistema anterior, esto es:

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & 8\lambda \\ 8\lambda & 2(1+7\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{, de donde se obtiene: } 9\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0,$$

que proporciona las raíces: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1/9$. Para $\lambda_1 = 1$, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones del sistema anterior, se encuentra $x = -2y$, valor que, al ser sustituido en la ecuación de condición, conduce a:

$$4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = 225,\ -5y^2 = 225, \text{ de donde: } y = 3i\cdot\sqrt{5}\,,$$

solución imaginaria pura que no proporciona extremos.

Para $\lambda_2 = -1/9$, análogamente, se encuentra $y = 2x$ y al substituir en la ecuación de condición resulta:

$$x^2 + 16x^2 + 28x^2 = 225,\quad 45x^2 = 225, \text{ o bien:}$$

$$x = \pm\sqrt{5} \quad \text{y, por tanto,} \quad y = \pm 2\sqrt{5}\,, \quad z = 25.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Para precisar si se trata de máximos o mínimos se obtiene:

$$d^2\phi = 2(1 + \lambda)dx^2 + 16\lambda\cdot dx\cdot dy + 2(1 + 7\lambda)dy^2\ .$$

De la ecuación de condición, por diferenciación, se obtiene *dy* en función de *dx*:

$$(2x + 8y)dx + (8x + 14y)dy = 0.$$

Substituyendo *dy* por su valor y para $y = 2x$, $\lambda = -1/9$, se obtiene:

$d^2\phi = \frac{25}{9}dx^2$, que al ser positivo nos dice que en ambos puntos críticos existen mínimos relativos.

De pretender resolverlo alternativamente formando el hessiano orlado relevante, se tiene, a partir de la función auxiliar:

$$\phi = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8x\cdot y + 7y^2 - 225) \ ;$$

$$\phi''_{x^2} = 2 + 2\lambda \ ; \quad \phi''_{xy} = 8\lambda = \phi''_{yx} \ ; \quad \phi''_{x\lambda} = 2x + 8y \ ;$$

$$\phi''_{y^2} = 2 + 14\lambda \ ; \quad \phi''_{y\lambda} = 8x + 14y \ ; \quad \text{y resultará el hessiano:}$$

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & 8\lambda & 2x+8y \\ 8\lambda & 2+14\lambda & 8x+14y \\ 2x+8y & 8x+14y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) + 8\lambda(2x +$$

$$+ 8y)(8x + 14y) - (2x + 8y)^2(2 + 14\lambda) - (2 + 2\lambda)(8x + 14y)^2 =$$

$$= 16\lambda(8x + 14y)(2x + 8y) - (4x^2 + 64y^2 + 32xy)(2 + 14\lambda) - (2 + 2\lambda)(64x^2 +$$

$+ 196\ y^2 + 224\ xy) = \ldots\ldots$, de resolución harto laboriosa, al que habrá que sustituir los valores obtenidos de λ, x e y, por lo que resulta más práctico hallar el valor numérico del determinante funcional hessiano para ambos puntos críticos obtenidos. Y así, para $(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(\sqrt{5},2\sqrt{5},-1/9) = \begin{vmatrix} 16/9 & -8/9 & 18\sqrt{5} \\ -8/9 & 4/9 & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = -18000 < 0,$$ luego se trata de un mínimo relativo o local. Del mismo modo, para $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$ se tendrá:

$$H(-\sqrt{5},-2\sqrt{5},-1/9) = \begin{vmatrix} 16/9 & -8/9 & -18\sqrt{5} \\ -8/9 & 4/9 & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = -18000 < 0,$$ con lo que también se tratará de un mínimo relativo, c.s.q.d.

Ejemplo 5

Hallar, por diversos procedimientos, los máximos y mínimos de la función: $u = x\cdot y^2\cdot z^3$, con la condición $x + y + z = 12$, siendo x, y, z positivas.

a) Emplearemos, en primer lugar, el método de los operadores de Lagrange. Siendo x, y, z positivas, los extremos de la función u, coincidirán con los de la función ln u, donde por ln denotamos el logaritmo neperiano o natural. Por tanto, la función de Lagrange o auxiliar será:

$$\Phi\ (x, y, z) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z + \lambda\ (x + y + z - 12).$$

- Condiciones necesarias o de primer grado:

Sus derivadas parciales igualadas a cero proporcionan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{1}{x} + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = \dfrac{2}{y} + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = \dfrac{3}{z} + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{, o bien, } -\frac{1}{\lambda} = x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3},$$

que con la condición x + y + z = 12, nos proporcionan, en definitiva, los valores:

$$x = 2, \quad y = 4, \quad z = 6, \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

- Condiciones suficientes o de segundo grado:

Si ahora calculásemos en dicho punto la diferencial segunda de u, encontraríamos que en (2, 4, 6) existe un máximo. Sin embargo, vamos a partir del determinante funcional hessiano orlado relevante, con lo que:

$$\left| \begin{array}{l|l|l|l} \Phi''_{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} & \Phi''_{y^2} = -\dfrac{2}{y^2} & \Phi''_{z^2} = -\dfrac{3}{z^2} & \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = 0 & \Phi''_{yx} = 0 & \Phi''_{zx} = 0 & \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{xz} = 0 & \Phi''_{yz} = 0 & \Phi''_{zy} = 0 & \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 & \Phi''_{y\lambda} = 1 & \Phi''_{z\lambda} = 1 & \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array} \right|$$

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2}{y^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{desarrollando por los elementos de la 4ª fila}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3}{z^2} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{2}{x^2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{6}{y^2 z^2} - \frac{3}{x^2 z^2} - \frac{2}{x^2 y^2} < 0 \quad (3 \text{ variables}),$$

luego pudiera ser máximo o mínimo.

El mismo problema, resuelto directamente (más largo), ofrece:

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\Phi = x \cdot y^2 \cdot z^3 + \lambda (x + y + z - 12);$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_x = y^2\, z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_y = 2\,x\,y\,z^3 + \lambda = 0 \\ \Phi'_z = 3\,x\,y^2\, z^2 + \lambda = 0 \\ \Phi'_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$y^2\, z^3 = 2x\cdot y\cdot z^3 = 3x\cdot y^2\cdot z^2$; dividido por $y\cdot z^2$: $y\cdot z = 2\cdot x\cdot z = 3\cdot x\cdot y$; $\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ z = 3x \end{array}\right\}$

Entonces: $x + 2\,x + 3\,x = 12 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{array}\right.$, luego en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$ hay un extremo relativo.

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\left|\begin{array}{l} \Phi''_{x^2} = 0 \\ \Phi''_{xy} = 2\,y\,z^3 \\ \Phi''_{xz} = 3\,y^2\, z^2 \\ \Phi''_{x\lambda} = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = 2\,x\,z^3 \\ \Phi''_{yx} = 2\,y\,z^3 \\ \Phi''_{yz} = 6\,x\,y\,z^2 \\ \Phi''_{y\lambda} = 1 \end{array}\left| \begin{array}{l} \Phi^2_{z^2} = 6\,x\,y^2\, z \\ \Phi''_{zx} = 3\,y^2\, z^2 \\ \Phi''_{zy} = 6\,x\,y\,z^2 \\ \Phi''_{z\lambda} = 1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \Phi''_{\lambda^2} = 0 \\ \Phi''_{\lambda x} = 1 \\ \Phi''_{\lambda y} = 1 \\ \Phi''_{\lambda z} = 1 \end{array}\right| \text{, con lo cual:}$$

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2\,y\,z^3 & 3\,y^2\, z^2 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 2\,x\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 3\,x^2\, z^2 & 6\,x\,y\,z^2 & 6\,x\,y^2\, z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{(desarrollando por los elementos de la 4ª fila)} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2\,y\,z^3 & 3\,y^2\, z^2 & 1 \\ 2\,x\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 6\,x\,y\,z^2 & 6\,x\,y^2\, z & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3\,y^2\, z^2 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \\ 3\,y^2\, z^2 & 6\,x\,y^2\, z & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2\,y\,z^3 & 1 \\ 2\,y\,z^3 & 2\,x\,z^3 & 1 \\ 3\,y^2\, z^2 & 6\,x\,y\,z^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

= ……………….. (llegando a las mismas conclusiones que mediante el proceso simplificado anterior).

Con $\left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 6 \end{array}\right.$, substituyendo estos valores en el hessiano anterior, se tiene que:

$$H(x, y, z, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1728 & 1728 & 1 \\ 1728 & 864 & 1728 & 1 \\ 1728 & 1728 & 1152 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,985\,984 < 0,$$

luego puede ser máximo o mínimo (3 variables), y seguimos sin encontrar la solución definitiva.

b) Resolviéndolo mediante un ejemplo simple (por tanteo), tendríamos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 5 \\ \underline{z = 6} \\ \sum = 12 \end{array}\right\} u = x\cdot y^2\cdot z^3 = 1 \times 25 \times 216 = 5400 \text{, y alternativamente:}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ \underline{z = 6} \\ \sum = 12 \end{array}\right\} u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912,$$ y así sucederá para todas las combinaciones posibles de tres cantidades positivas que cumplan la restricción impuesta en el enunciado, luego parece obvio que en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$ existe un MÁXIMO RELATIVO.

c) A continuación, ensayaremos el método de reducción de variables, y se tendrá que:

x = 12 – y – z, con lo que substituyendo en la función objetivo, se tendrá:

$\Phi = (12 - y - z) \cdot y^2 \cdot z^3 = 12\, y^2\, z^3 - y^3\, z^3 - y^2 \cdot z^4 = \Phi\,(y, z)$, que ya es un caso de extremos no condicionados y 2 variables.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi'_y = 24\, z^3 \cdot y - 3\, y^2\, z^3 - 2\, y\, z^4 = 0 \\ \Phi'_z = 36\, y^2 \cdot z^2 - 3\, y^3\, z^2 - 4\, y^2\, z^3 = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$$\begin{array}{l} \;\;24 - 3y - 2z = 0 \\ \underline{-36 + 3y + 4z = 0} \\ -12 + 2z = 0 \;\Rightarrow\; z = 6;\quad y = \dfrac{24 - 2\,z}{3} = \dfrac{24 - 12}{3} = 4;\quad x = 12 - 4 - 6 = 2. \end{array}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

Formaremos el hessiano: $H(y, z) = \begin{vmatrix} \Phi''_{y^2} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{yz} & \Phi''_{z^2} \end{vmatrix}$, con los siguientes valores reales:

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi''_{y^2} = 24\, z^3 - 6\, y\, z^3 - 2\, z^4 = 5184 - 5184 - 2592 = -2592 \\ \Phi''_{yz} = 72\, y\, z^2 - 9\, y^2\, z^2 - 8\, y\, z^3 = 10368 - 5184 - 6912 = -1728 \\ \Phi''_{z^2} = 72\, y^2\, z - 6\, y^3\, z - 12\, y^2\, z^2 = 6912 - 2304 - 6912 = -2304 \end{array}\right.$$

$$H(4, 6) = \begin{vmatrix} -2592 & -1728 \\ -1728 & -2304 \end{vmatrix} = 5\,971\,968 - 2\,985\,984 = 2\,985\,984 > 0,$$

$$\text{con}\; \Phi''_{y^2} = -2592 < 0,$$

luego se trata de un MÁXIMO relativo o local en el punto crítico $P_0(2, 4, 6)$, con un valor de la función económica: $u = x \cdot y^2 \cdot z^3 = 2 \times 16 \times 216 = 6912$.

Obsérvese la mayor facilidad de resolución que se obtiene empleando este último procedimiento (reducción o eliminación de variables) en el presente ejemplo comparado con el método de los multiplicadores de Lagrange, así como el hecho que nos ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado como consecuencia de la aplicación de la condición necesaria o de primer grado. De ahí el interés de su empleo en la mayoría de los casos que se presentan en la práctica.

Ejemplo 6

Hallar, por diversos procedimientos, el máximo del producto: $x \cdot y \cdot z$, cuando $x + y + z = a$; siendo x, y, z positivos.

a) Formaremos, en principio, la función auxiliar o lagrangiana siguiente:

$$\Phi = x\cdot y\cdot z + \lambda(x + y + z - a)\ .$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{aligned}\Phi'_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y\cdot z + \lambda = 0\\ \Phi'_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x\cdot z + \lambda = 0\\ \Phi'_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x\cdot y + \lambda = 0\\ \Phi'_\lambda &= \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0\end{aligned}\right\} x = y = z;\ 3\,x = a;$$

, de donde:

$$x = \frac{a}{3};\quad y = \frac{a}{3};\quad z = \frac{a}{3};\ \text{y entonces: } \Phi = x\cdot y\cdot z = \frac{a^3}{27};\ \text{con: } \lambda = -\frac{a^2}{9}\ .$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\left|\begin{array}{l|l|l|l}\Phi''_{x^2} = 0 & \Phi''_{y^2} = 0 & \Phi''_{z^2} = 0 & \Phi''_{\lambda^2} = 0\\ \Phi''_{xy} = z & \Phi''_{yx} = z & \Phi''_{zx} = y & \Phi''_{\lambda x} = 1\\ \Phi''_{xz} = y & \Phi''_{yz} = x & \Phi''_{zy} = x & \Phi''_{\lambda y} = 1\\ \Phi''_{x\lambda} = 1 & \Phi''_{y\lambda} = 1 & \Phi''_{z\lambda} = 1 & \Phi''_{\lambda z} = 1\end{array}\right|\ \text{; el hessiano orlado relevante, será:}$$

$$H(x,y,z,\lambda) = \begin{vmatrix}0 & z & y & 1\\ z & 0 & x & 1\\ y & x & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}z & y & 1\\ 0 & x & 1\\ x & 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & y & 1\\ z & x & 1\\ y & 0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & z & 1\\ z & 0 & 1\\ y & x & 1\end{vmatrix} =$$

$= -(x\,z + x\,y - x^2) + (y^2 - x\,y - z\,y) - (z\,y + z\,x - z^2) =$ (operando adecuadamente) $= -2\,x^2 - 2\,x^2 - 2\,x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = -6\,x^2 + 3\,x^2 = -3\,x^2 = -\frac{a^2}{3} < 0$ (3 variables), luego pudiera ser máximo o mínimo, y habrá que intentar la resolución de este problema por algún otro procedimiento.

b) Método de reducción de variables:

Haciendo la sustitución en la función objetivo: $z = a - x - y$, resulta la función de 2 variables siguiente:

$$\Phi(x,y) = x\cdot y(a - x - y) = a\cdot x\cdot y - x^2\cdot y - x\cdot y^2;$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{aligned}\Phi'_x &= a\,y - 2\,y\,x - y^2 = 0\\ \Phi'_y &= a\,x - x^2 - 2\,y\,x = 0\end{aligned}\right\}\ \text{del que resulta}\ \left.\begin{aligned}a - 2\,x - y = 0\\ a - x - 2\,y = 0\end{aligned}\right\}$$

y, en definitiva, $x = y = z = \frac{a}{3}$ (punto crítico).

- Condición suficiente o de segundo grado:

$$\begin{cases} \Phi''_{x^2} = -2\,y \\ \Phi''_{xy} = \Phi''_{xy} = a - 2\,x - 2\,y \\ \Phi''_{y^2} = -2\,x \end{cases}, \text{ y entonces: } H(x,y,z) = \begin{vmatrix} -2\,y & a-2\,(x+y) \\ a-2\,(x+y) & -2\,x \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2 - 4\,x^2 - 4\,y^2 - 4\,x\,y + 4\,a\,x + 4\,a\,y = -a^2 - \frac{4\,a^2}{3} + \frac{8\,a^2}{3} = \frac{4\,a^2}{3} - a^2 = \frac{a^2}{3} > 0\,;$$

$\Phi''_{x^2} = -2y = \frac{-2\,a}{3} < 0$, puesto que también a > 0, luego hay un MÁXIMO RELATIVO en el punto $P\left(a/3, a/3, a/3\right)$, lo que resuelve eficazmente el problema planteado.

Así pues, al igual que sucede en el ejemplo anterior, el método de reducción de variables o sustitución ha permitido discriminar fácilmente la naturaleza del punto crítico hallado, circunstancia que no se había conseguido por la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 7. Consideremos el programa siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar} & f\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + 2x_2 + 2 \\ \text{sujeta a:} & x_1^3 - x_2 - 2 = 0. \end{array}$$

a) De la restricción dada podemos obtener: $x_2 = x_1^3 - 2,$ y substituyendo en la función objetivo (método de eliminación de variables) tenemos que:

$\Phi\left(x_1\right) = x_1^2 + 2x_1^3 - 2$, que ya es una función real de una sola variable real.
Encontremos, ahora, los extremos de esta función:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = 2x_1 + 6x_1^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1/3 \end{cases}$$

La deriva segunda será:

$$\frac{d^2\Phi}{dx_1^2} = 2 + 12x_1, \quad \frac{d^2\Phi(0)}{dx_1^2} = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\Phi(-1/3)}{dx_1^2} = -2 < 0\cdot$$

Por tanto, en dichos puntos, la función objetivo Φ presenta un mínimo y un máximo relativos, respectivamente.

Substituyendo dichos puntos en $x_2 = x_1^3 - 2$ podemos concluir que (0, -2) y (-1/3, -55/27) son, respectivamente, el mínimo y el máximo relativos del programa original (Balbás y Gil, 2004 : 89).

b) El problema puede también resolverse formulando la correspondiente función lagrangiana: $\Phi = x_1^2 + 2x_2 + 2 + \lambda\left(x_1^3 - x_2 - 2\right)$.

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'_{x_1} = 2x_1 + 3\cdot\lambda\cdot x_1^2 = 0 \\ \Phi'_{x_2} = 2 - \lambda = 0 \\ \Phi'_{\lambda} = x_1^3 - x_2 - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

De la resolución de este sistema, con $\lambda = 2$, surgen los dos puntos críticos: (0, -2) y $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{55}{27}\right)$.

- El punto crítico (0, -2) ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = 2 \times (-2) + 2 = -2 \text{ (MÍNIMO RELATIVO).}$$

- El punto crítico $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{55}{27}\right)$ ofrece un valor de la función objetivo:

$$\Phi = \frac{3}{27} - \frac{110}{27} + \frac{54}{27} = -\frac{53}{27} \approx -1.96 > -2 \text{ (MÁXIMO RELATIVO).}$$

- Condición suficiente o de segundo grado.

Para corroborar lo anterior, formemos el correspondiente hessiano orlado relevante, esto es:

$\Phi''_{x_1^2} = 2 + 12x_1$; $\Phi''_{x_2^2} = 0$; $\Phi''_{x_1x_2} = 0$; $\Phi''_{x_2\lambda} = -1$; $\Phi''_{x_1\lambda} = 3x_1^2$; y entonces:

$$H(x_1, x_2, \lambda) = \begin{vmatrix} \Phi''_{x_1^2} & \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_1\lambda} \\ \Phi''_{x_1x_2} & \Phi''_{x_2^2} & \Phi''_{x_2\lambda} \\ \Phi''_{x_1\lambda} & \Phi''_{x_2\lambda} & \Phi''_{\lambda^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+12x_1 & 0 & 3x_1^2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3x_1^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 12x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{con } x_1 = 0 \Rightarrow H = -2 < 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO LOCAL} \\ \text{con } x_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow H = -2 + 4 = 2 > 0 \Rightarrow \text{MÁXIMO LOCAL} \end{cases}$$

que ofrece el mismo resultado que el que se deducía directamente de la aplicación de la condición necesaria, c.s.q.d.

4. CASOS PRÁCTICOS

A continuación se desarrollan algunos ejemplos que se suelen presentar en la práctica por lo que se refiere, especialmente, a la aplicación de la Teoría Microeconómica.

Caso 1.

Supongamos una empresa dedicada a la producción de un bien. Su función de producción, que relaciona la cantidad (q) producida de dicho bien con la de los factores productivos (x_1 y x_2) empleados para la misma es:

$$q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2.$$

Los precios unitarios de dichos factores son: $p_1 = 2$ u. m. y $p_2 = 4$ u. m., respectivamente. Determínese la cantidad de factores productivos que maximizan la producción con un coste de 68 u. m. (Balbás y Gil, 2004 : 99).

Solución:

a) El problema es de programación con restricciones de igualdad y vamos a resolverlo, inicialmente, por el método de los operadores de Lagrange. Tenemos que el coste de utilizar los factores productivos será: $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = 2x_1 + 4x_2$, que constituye la ecuación condicionante. Así pues, tendremos el siguiente programa:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 4x_2 = 68. \end{array} \qquad \text{(V)}$$

La función lagrangiana es:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + \lambda(2x_1 + 4x_2 - 68).$$

Las derivadas parciales primeras de la misma igualadas a cero junto con la restricción, conforman el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} 60 - 4x_1 + 2\lambda = 0 \\ 90 - 6x_2 + 4\lambda = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 68 \end{array}\right\}$$

que posee una solución ($x_1 = 12$, $x_2 = 11$ y $\lambda = -6$) que es el máximo global del programa, ya que la función objetivo es cóncava en el conjunto factible, que es convexo. Veámoslo.

-El conjunto factible es M = $\{(x_1, x_2) \in \Re^2 / 2x_1 + 4x_2 = 68\}$. Es una recta de $\Re^2$, que, como sabemos, es un conjunto convexo.

-Las derivadas parciales segundas de la función de producción son:

$$\left\{\begin{array}{l} D_{11}q = -4 \\ D_{12}q = D_{21}q = 0 \quad \text{(lema de Schwartz)} \\ D_{22}q = -6. \end{array}\right.$$

La matriz hessiana de q en todo punto de $\Re^2$ es: $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, y, ya que: $H_1 = -4 < 0$ y $H_2 = 24 > 0$, resulta que q es cóncava (estrictamente) en $\Re^2$ y, por tanto, en M.

Así, utilizando 12 unidades del primer factor y 11 del segundo, se maximiza la producción para un coste de 68 u. m. Sustituyendo en la función de producción, tenemos que:

$q = 60x_1 + 90x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 = 60 \cdot 12 + 90 \cdot 11 - 2 \cdot 12^2 - 3 \cdot 11^2 = 1059$ (unidades físicas o monetarias).

Veamos, por otra parte, que el valor del multiplicador λ asociado a la solución óptima es -6. Ésta será la tasa de variación de la producción óptima respecto al coste, de acuerdo con la significación económica de este operador de Lagrange que hemos explicado en este mismo artículo. Por ejemplo, si estuviésemos dispuestos a utilizar factores productivos por valor de 69 u. m., una más que antes, la producción que obtendríamos utilizando óptimamente los recursos será aproximadamente de 1065, seis más que antes, ya que $-\lambda = 6$ (la aproximación realizada es lineal y será mejor cuanto menor sea la variación del coste respecto al inicial de 68). Puede comprobar el amable lector/a que, resolviendo el programa para un coste de 69, el resultado es ahora $x_1 = 12.137$, $x_2 = 11.182$ y $\lambda = -5.727$, siendo el valor resultante de q = 1064.875.

b) El mismo problema resuelto por eliminación o reducción de variables, implica que: $x_1 = 34 - 2x_2$; y entonces:

$q(x_2) = 60(34 - 2x_2) + 90x_2 - 2(34 - 2x_2)^2 - 3x_2^2 = 242x_2 - 272 - 11x_2^2$, que ya es una función de una sola variable real.

-Condición necesaria o de primer grado:

$$q' = 242 - 22x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 11 \text{ y } x_1 = 34 - 22 = 12.$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

q" = -22, luego, efectivamente, hay un MÁXIMO en el punto (12, 11), y el problema queda resuelto de modo más inmediato.

Caso 2.

Una determinada empresa elabora un producto utilizando dos factores productivos. La función de producción que relaciona la cantidad de bien producido (Q) con los factores productivos utilizados (x,y) es: Q (x,y) = 12x + y.

La función de costes de la empresa es: C (x,y) = $3x^2 + y^2$.

Se pide:

1) ¿Cuáles son las cantidades de factores productivos que consiguen minimizar el coste de producir 49 unidades de producto?.

2) ¿Será rentable producir una unidad más de producto, si el precio unitario de venta de éste fuese de 3 unidades monetarias?.

Solución:

1) El problema se plantea así:

Con la restricción: $\left.\begin{array}{l} \min .3x^2 + y^2 \\ 12x + y = 49 \end{array}\right\}$

a) Para la técnica de los operadores de Lagrange, construyamos la función lagrangiana siguiente:

$$L(x, y) = 3x^2 + y^2 + \lambda (12x + y - 49).$$

Condición necesaria de óptimo o de primer grado:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x + 12\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ g : 12x + y = 49 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación se obtiene directamente que: λ = -2y. Substituyendo en la primera ecuación resulta: 6x – 24y = 0. Si resolvemos esta ecuación con la ecuación de restricción, obtenemos: $x^* = 4$, $y^* = 1$. Y asimismo $\lambda^* = -2y = -2$.

Veamos si el punto crítico es realmente un máximo o mínimo:

Condición suficiente o de segundo grado:

Construyamos el Hessiano orlado relevante. Sabemos que:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 12 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -294 < 0 \cdot$$

En nuestro caso, el número de variables es 2 (n = 2), y el número de ecuaciones de restricción es 1 (m = 1). Debemos estudiar –como ya sabemos- el signo de los (n – m) últimos menores principales orlados. En nuestro caso sucede que: n – m = 2 – 1 = 1 menor principal orlado.

El menor principal orlado, cuyo signo se ha de analizar, es $\overline{H}_{m+n} = \overline{H}_3 = \overline{H}$, siendo $\overline{H}$ el Hessiano orlado anterior, cuyo signo es negativo.

Al ser m = 1 (impar) y $\overline{H} < 0$, tendremos que en P_0 (4,1) hay un mínimo relativo o local.

Así pues, han de utilizarse cuatro unidades del primer factor productivo, y una unidad del segundo factor, si es que deseamos minimizar el coste de producir 49 unidades del producto. Esto implicará un coste mínimo de:

$$C = 3x^2 + y^2 = 48 + 1 = 49 \text{ u.m.}$$

b) De emplear para su resolución el método de reducción de variables, despejando en la ecuación condicionante se tendría que: y = 49 – 12x, y substituyendo en la función objetivo o económica, que ya es una función de una sola variable:

$$L(x) = 3x^2 + (49 - 12x)^2 = 147\, x^2 - 1176x + 2401.$$

Condición necesaria o de primer grado:

$$L'_x = 294x - 1176 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ ; } y = 49 - 48 = 1 \text{ ;}$$

Condición suficiente o de segundo grado:

$$L''_{x2} = 294 > 0 \rightarrow \text{luego hay un mínimo en el punto } P_0(4,1,49).$$

2) A continuación, debe averiguarse cuál sería el coste adicional de producir esta nueva unidad de producto.

Si el precio unitario de venta del producto es de 3 unidades monetarias, ello significa que aumentar la producción en una unidad más, supondrá para la empresa un ingreso adicional de 3 u. m.

Este coste marginal, de producir una unidad adicional más de producto a partir del punto óptimo, coincidirá con el valor opuesto del multiplicador de Lagrange λ^*. Hemos obtenido que $\lambda^* = -2$, luego el coste marginal de producir una unidad más –a partir del óptimo- será de 2 u. m. ($-\lambda = 2$). Luego al ser el ingreso marginal (3 u. m.) superior al coste marginal (2 u. m.), resultará rentable producir una unidad adicional del producto en cuestión.

Caso 3.

Se fabrican dos productos A y B en cantidades *x* e *y* respectivamente. Por la venta de cada unidad A se obtienen 3 euros y por cada unidad de B se obtienen 4 euros. La producción de la empresa ha de adaptarse a la restricción dada por la ecuación: $9x^2 + 4y^2 = 18000$. Calcúlense las unidades que se han de producir de cada producto para maximizar los ingresos (Sánchez, 2014 : 83).

Solución:

a) Se trata de maximizar la función de ingreso: I(x) = 3x + 4y bajo la restricción. $9x^2 + 4y^2 = 18000$, por el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello, en primer lugar, construimos la función lagrangiana:

$$L(x, y) = 3x + 4y + \lambda(9x^2 + 4y^2 - 18000).$$

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 3 + 18\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4 + 8\lambda y = 0 \\ g(x,y) = 9x^2 + 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{3}{18x} \\ \lambda = -\dfrac{4}{8y} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{6x} = \frac{1}{2y} \Rightarrow y = 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 9x^2 + 4y^2 = 18000 \end{cases} \Rightarrow x = 20,\quad y = 60,\quad \lambda = -\frac{1}{120}.$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

A partir del Hessiano orlado, y sus menores principales podremos saber si existe realmente un máximo. Tenemos que hallar el signo de sus *n-m* últimos menores, siendo *n* el número de incógnitas de la función de ingreso y *m* el número de restricciones.

En este caso, n - m = 2 – 1 = 1, de modo que calculamos el signo del último menor:

$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 18x & 8y \\ 18x & 18\lambda & 0 \\ 8y & 0 & 8\lambda \end{vmatrix}$, que en el punto crítico condicionado $\left(20, 60, -\frac{1}{120}\right)$ será:

$$\begin{vmatrix} 0 & 360 & 480 \\ 360 & -\dfrac{3}{20} & 0 \\ 480 & 0 & -\dfrac{1}{15} \end{vmatrix} = (480)^2\,\frac{3}{20} + (360)^2\,\frac{1}{15} = 43200 > 0\,.$$

Como $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1 > 0$ entonces hay un máximo relativo en el punto crítico en cuestión, y las unidades que ha de producir de A y B para maximizar los ingresos son x = 20, y = 60.

b) Resolviendo ahora el mismo problema por la técnica propugnada de eliminación de variables, se tiene que: $3x = \sqrt{18000 - 4y^2}$, con lo que: $L(y) = \sqrt{18000 - 4y^2} + 4y$, que es una función real de una sola variable real, y la condición de extremo necesaria o de primer grado exige que:

$$L'_y = \frac{-8y}{2\sqrt{18000 - 4y^2}} + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}} = -4\text{, de donde:}$$

$$y = \sqrt{18000 - 4y^2} \Rightarrow y^2 = 18000 - 4y^2;\; 5y^2 = 18000\,;$$

$$y = \sqrt{3600} = 60 \Rightarrow x = \frac{y}{3} = \frac{60}{3} = 20\text{, luego (20, 60) es un punto crítico.}$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

Tenemos que: $L'_y = 4 - \dfrac{4y}{\sqrt{18000 - 4y^2}}$, entonces:

$$L''_{y^2} = -\frac{9000}{(4500 - y^2)^{3/2}} = -\frac{9000}{\sqrt{(4500 - y^2)^3}}\text{, y para y = 60, se tiene que:}$$

$L''_{y^2} = -\frac{9000}{\sqrt{900^3}} = -\frac{1}{3} < 0$, luego, efectivamente, se trata de un MÁXIMO.

Caso 4.

La función de utilidad hipotética de un consumidor, con un horizonte de dos períodos, es U = (c_1 + 1000)·(c_2 + 2000), donde c_1 y c_2 representan los gastos de cada período. Las rentas del consumidor son: y_1 = 10000, y_2 = 9000 unidades monetarias. El tipo de interés es del 10%. Determinar el plan de gastos del consumidor en los dos ejercicios.

Solución:

a) Resolviéndolo inicialmente por el método de los multiplicadores de Lagrange, se tiene la función lagrangiana a optimizar:

$$V = (c_1 + 1000)\cdot(c_2 + 2000) + \lambda\,[(10000 - c_1) + (9000 - c_2)\,1.1^{-1}].$$

Así pues, maximizaremos la función de utilidad con la restricción determinada por la "ecuación de balance", que nos indica que la cantidad que el consumidor gasta en el primer período más la que gasta en el 2º período es igual a su renta. De tal suerte, el consumidor debe encontrar la combinación de gastos que maximice la utilidad (Henderson y Quandt, 1968 : 16).

- Condición necesaria o de primer grado:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial c_1} = c_2 + 2000 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial c_2} = c_1 + 1000 - \lambda \cdot 1.1^{-1} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = (10000 - c_1) + (9000 - c_2)1.1^{-1} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo resulta: λ = 11550; c_1 = 9500 u. m. y c_2 = 9550 u. m. Con ello:

$$U = (10550) \times (11550) = 121\,275\,000 \text{ u. m.}$$

- Condición suficiente o de segundo grado:

$V''_{c_1^2} = 0$; $V''_{c_2^2} = 0$; $V''_{c_1 c_2} = 1$; $V''_{c_2\lambda} = -1.1^{-1}$; $V''_{c_1\lambda} = -1$; formando el hessiano orlado relevante, resulta:

$$H(c_1, c_2, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1.1^{-1} \\ -1 & -1.1^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 1.1^{-1} + 1.1^{-1} = \frac{2}{1.1} = 1.82 > 0$$, luego se trata de un MÁXIMO.

Veamos la representación gráfica correspondiente:

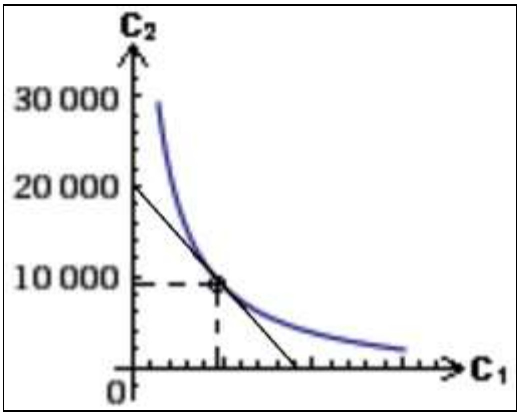

Fig. 1. Curva de indiferencia y ecuación de balance.

En la siguiente figura puede verse, con mayor detalle, el punto de intersección entre la curva de indiferencia[1] y la ecuación de balance[2], que nos determina los valores óptimos buscados, esto es:

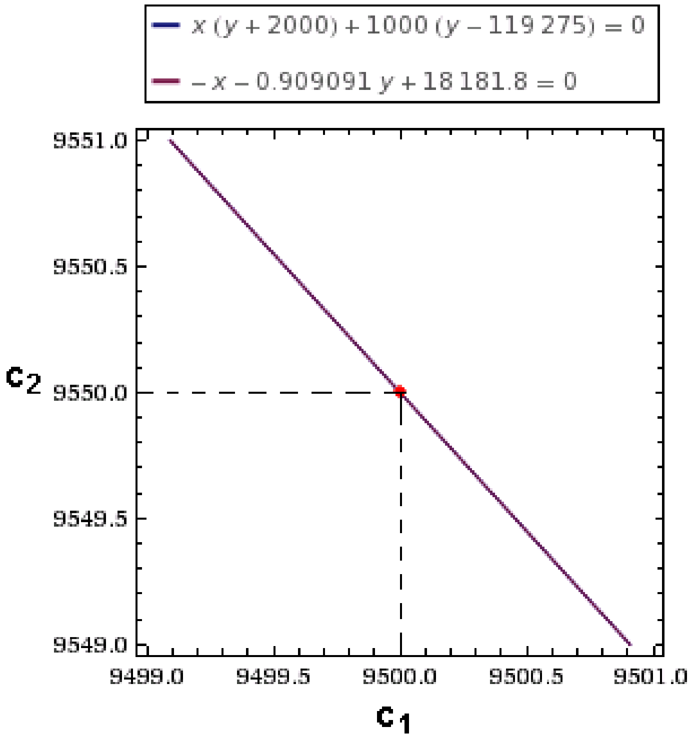

Fig. 2. Detalle de gastos de cada período.

---

[1] Las curvas de "indiferencia" o de "preferencia" son un conjunto de combinaciones de bienes o servicios que proporcionan la misma utilidad al consumidor. Sobre una curva de indiferencia el consumidor es indiferente entre cualquiera de las canastas de bienes o servicios que se le presentan. Es decir, que para todos los puntos pertenecientes a una misma curva, el consumidor no tiene preferencia por la combinación representada por uno sobre la combinación representada por otro. La satisfacción del consumidor se caracteriza mediante la denominada *función de utilidad* en la que las variables son las cantidades de cada bien o servicio representadas por el valor sobre cada eje coordenado. Existen algunas discrepancias entre los autores sobre si la continuidad, derivabilidad y convexidad de dichas curvas están garantizadas y ello posee fuertes implicaciones en la discusión de la existencia o no de puntos de equilibrio. Desde un punto de vista matemático, la discusión implica el axioma de elección.

[2] La "ecuación de balance" es la expresión algebraica a través de la cual se determina una igualdad que corrobora y comprueba que el ingreso o renta del consumidor es exactamente igual al gasto (compra) de bienes o servicios para el periodo determinado de consumo. En otras palabras, al sumar el valor gastado en adquisición de bienes o servicios "x" y bienes o servicios "y". Para tener tales valores basta multiplicar el número de unidades posibles de adquirir - en cada uno de los puntos - por su respectivo precio y luego sumarlos; esto puede hacerse en cualquier punto de la línea de precios.

b) Empleando ahora la técnica de reducción o eliminación de variables, resultará que:

$$10000 - c_1 = (c_2 - 9000)/1.1; \quad 11000 - 1.1c_1 + 9000 = c_2 = 20000 - 1.1c_1.$$

La función de utilidad, entonces, quedará expresada así:

$$U = (c_1 + 1000) \times (22000 - 1.1c_1) = 22000c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000 - 1100\,c_1 =$$
$$= 20900\,c_1 - 1.1c_1^2 + 22\,000\,000.$$

-Condición necesaria o de primer grado:

$$U' = 20900 - 2.2c_1 = 0; \quad c_1 = \frac{20900}{2.2} = 9500 \text{ u. m.}$$

$$c_2 = 20000 - 1.1 \times 9500 = 9550 \text{ u. m.}$$

-Condición suficiente o de segundo grado:

U" = - 2.2 < 0, luego se trata de un MÁXIMO, c.s.q.d.

5. CONCLUSIONES

Los problemas de extremos condicionados de funciones de varias variables, resueltos mediante la sustitución pertinente empleando la técnica que denominaremos de "reducción de variables" (en alguna ocasión ha recibido también el apelativo de "substitución" o "eliminación"), se reducen a otros con las mismas variables o una variable menos y sin condición restrictiva alguna, lo que simplifica notablemente su resolución.

En el presente artículo se han expuesto diversos ejemplos y algunos casos prácticos de microeconomía que ponen de manifiesto, una vez más, la utilidad del procedimiento propuesto de "reducción de variables" en una gran cantidad de casos que se presentan en la práctica de la optimización económica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BALBAS DE LA CORTE, A. y GIL FANA, J.A. (2004). *Programación matemática*. Ed. Paraninfo, S.A. Madrid.
2. GARCÍA SESTAFE, J.V. y RODRÍGUEZ RUIZ, J. (1985). *Curso de matemáticas en forma de problemas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid.
3. GUZMÁN, L., SÁNCHEZ, M. J., MUÑOZ, A. y SANTOS, J. (1999). *Fundamentos matemáticos para la administración y dirección de empresas*. Ed. CEURA, S.A. Madrid.
4. HENDERSON, J.M. y QUANDT, R.E. (1968). *Teoría microeconómica (una aproximación matemática).* Ed. Ariel, S.A. Barcelona.
5. SÁNCHEZ SÁNCHEZ, M. (2014). *Matemáticas avanzadas para la Economía*. UNED. Ed. Sanz y Torres, S. L. Madrid.