J 20

TEORIA DE MATRICES

(Exposición Elemental)

Por el Dr. Luis de Greiff Bravo
Profesor de la Facultad

DEFINICIÓN. - Llámase matriz numérica, $m \times n$, a una disposición de números escritos en m filas horizontales, (líneas), y en n filas verticales, (columnas). Los elementos que constituyen las matrices suelen representarse por a_{ij} —en las explicaciones teóricas—, donde el primer índice, a saber, i, designa el orden de la línea; el segundo índice, j, el orden correspondiente a la columna en que se halla el elemento. Así, por ejemplo, a_{34}, es el elemento que ocupa la intersección de la tercera línea y la cuarta columna. Las matrices se escriben en una u otra de las formas siguientes:

$$(1) \qquad A = (a_{ij}) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Se puede decir también, para facilitar la comprensión, que las matrices numéricas son colecciones de números. Estos —los números— son matrices 1 x 1.

IGUALDAD. - Dos matrices A y B son iguales, si, al ser de iguales dimensiones, o sea contener el mismo número de línea y el mismo número de columnas, respectivamente, se verifica para sus elementos,

$$(2) \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

para todos los valores de i y de j.

SUMA. - Por suma de dos matrices A y B, de las mismas dimensiones, a saber,

$$(3) \qquad A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

se entiende la matriz cuyos elementos son la suma de los elementos correspondientes en A y B. O sea que,

$$(4) \qquad A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

Según la definición, como el lector puede comprobar fácilmente, la suma de matrices goza de las propiedades conmutativa y asociativa. A saber,

$$(5) \qquad A + B = B + A$$

$$(6) \qquad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

MATRIZ CERO. - Matriz cero, $m \times n$, es la matriz de estas dimensiones cuyos elementos son el número cero. Se la representa por 0. Para toda matriz A, se verifica,

$$(7) \qquad A + 0 = 0 + A = A$$

PRODUCTO. - Dada una matriz A, $m \times n$, y una matriz B, $n \times p$, se define el producto AB, como la matriz C cuyos elementos c_{ij} se forman según el siguiente esquema,

$$(8) \qquad c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

lo cual, para fijar mejor los conceptos, escribiremos así,

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np} \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mp} \end{Vmatrix}$$

Debemos dar énfasis a la circunstancia de ser posible el producto, o bien, estar definido, únicamente cuando el número de columnas de la primera matriz —*A*— es igual al número de líneas de la segunda —*B*—. Las dimensiones de la matriz producto —*C*— vienen a ser, *m*, número de líneas de la primera, y *p*, número de columnas de la segunda.

VECTOR. - Una matriz de orden $1 \times n$ recibe el nombre de vector-línea de orden *n*. Análogamente, una matriz de orden $m \times 1$, recibe el nombre de vector-columna, de orden *m*. El producto matricial de dos vectores exige, para ser posible, que los órdenes de éstos sean iguales. Sean los vectores,

$$(10) \qquad U = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ ; V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

Se tiene,

$$(11) \qquad UV = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Por otra parte,

$$(12) \qquad VU = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{Vmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \ldots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \ldots & b_2 a_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \ldots & b_n a_n \end{Vmatrix}$$

El primer producto, *UV*, conduce a una matriz 1×1, es decir, a un número; el segundo producto, *VU*, conduce a una matriz

$n \times n$. El producto de un vector-línea por un vector-columna se ha llamado también producto interior o producto escalar.

El producto de matrices no es, en general, conmutativo. Es decir que AB y BA son, en general, distintos. Acabamos de ver cómo son distintos los productos UV y VU. Esto ocurre también en el caso de matrices cuadradas. Veamos el ejemplo siguiente. Sean,

$$(13) \qquad A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Se tiene,

$$(14) \qquad AB = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\| \qquad BA = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

lo cual manifiesta la no conmulatividad del producto.

Podemos ahora dar un nuevo concepto del producto de dos matrices, $AB = C$, atendiendo a la relación (8) que indica la estructura de los términos en la matriz producto. Al efecto, la (8) puede escribirse así,

$$(15) \qquad c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

es decir que, el elemento c_{ij} del producto, se obtiene multiplicando escalarmente el vector-línea, i, de la primera matriz por el vector-columna, j, de la segunda.

MATRICES DIAGONALES. - Se llama así a aquellas matrices cuadradas en las cuales los elementos que están situados fuera de la diagonal principal, son iguales a cero. Tales matrices tienen la particularidad de que su producto es conmutativo. Veamos el ejemplo siguiente:

$$(16) \qquad H = \left\| \begin{matrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 \end{matrix} \right\|, \qquad T = \left\| \begin{matrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_4 \end{matrix} \right\|$$

Se tiene,

$$(17) \qquad HT = \begin{Vmatrix} h_1 t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 t_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 t_4 \end{Vmatrix}$$

por lo cual se ve que es, $HT = TH$.

MATRIZ IDENTIDAD. - Existe una matriz diagonal particular, correspondiente a cada orden, que recibe el nombre de matriz identidad o simplemente idéntica. Es la siguiente:

$$(18) \qquad I_n = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{Vmatrix}$$

El subíndice corresponde al orden de la matriz.

Para todas las matrices A de dimensiones $n \times n$, se cumple la siguiente relación,

$$(19) \qquad A\, I_n = I_n\, A = A$$

Dejamos al lector, como ejercicio, la verificación de lo anterior.

También se puede establecer, designando por O la matriz cero de dimensiones adecuadas a cada caso, que se tiene,

$$(20) \qquad A\ 0 = 0\ A = 0$$

La recíproca de (20) no es cierta. Es decir, el producto de dos matrices puede ser nulo (matriz cero) sin ser nulo uno de los factores. Por ejemplo, si es,

$$(21) \qquad A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A\,B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

DETERMINANTES. - Dado un número complejo, se definen la norma y el módulo como funciones numéricas de los componentes de aquél. De manera análoga, dada una matriz, cuadrada, existe el determinante correspondiente a los elementos de aquélla, dispuestos en el mismo orden. El determinante no es, pues, cosa distinta a una simple función numérica de los elementos de una matriz cuadrada.

Para multiplicar determinantes se puede proceder de dos maneras, una de las cuales coincide con la que se sigue en la multiplicación de matrices.

Dadas dos matrices cuadradas, del mismo orden, y dado el producto, a saber,

$$AB = C \tag{23}$$

y si se designa el determinante de la matriz A por medio de A, etc., se tiene, por otra parte,

$$|A| \, . \, |B| = |C| \tag{24}$$

La relación (24) puede concebirse como consecuencia de la (23) y enunciar el resultado diciendo,

> el determinante del producto de dos matrices cuadradas, del mismo orden, es igual al producto de los determinantes de las matrices factores.

Una matriz cuadrada cuyo determinante sea nulo, recibe el nombre de matriz singular.

Al hablar del determinante correspondiente o asociado a una matriz cuadrada, nos referimos al determinante cuyo orden es igual al de la matriz.

TRANSPUESTA. - Dada una matriz, por ejemplo, la (1), definimos la matriz transpuesta, como sigue:

$$A' = T(A) = (a_{ji}) = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{25}$$

o sea que, la primera, segunda, tercera,... líneas de la primera, se escriben como primera, segunda, tercera,... columnas, respectivamente, en la transpuesta. Esto produce a la vez cambio de las columnas de A en líneas del correspondiente orden, en $T(A)$.

Entre las matrices cuadradas existen las simétricas que son aquellas para las cuales se cumple la relación,

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{26}$$

para todos los valores de los índices.

Puesto que el número de columnas de una matriz, A, es igual por definición al número de líneas de la transpuesta $T(A)$, se concluye que el producto,

$$A\,T(A) \tag{27}$$

existe siempre, viniendo a ser una matriz cuadrada simétrica.

Una matriz-línea (vector línea), tiene por transpuesta una matriz-columna, y viceversa.

Refiriéndonos a los vectores de la relación (11), vamos a demostrar que se tiene,

$$UV = T(V)\,T(U) \tag{28}$$

Al efecto escribimos,

$$T(V) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \tag{29}$$

$$T(U) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \tag{30}$$

Por consiguiente,

$$T(V)\,T(U) = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_n a_n \tag{31}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$
$$= UV$$

lo cual demuestra el aserto. Ahora demostraremos un teorema más general que dice:

La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las transpuestas, en orden contrario. En símbolos, de la relación.

$$AB = C, \tag{32}$$

se deduce,

$$T(B)\;T(A) = T(C) = C_1 \tag{33}$$

DEMOSTRACIÓN. - Por la transposición, ha pasado la columna j de B a ser la línea j de $T(B)$; la línea i de A se ha convertido en la columna i de $T(A)$. Este producto nos da el elemento c_{ji} de C_1 que debe ser igual, según (31), al elemento c_{ij} de C. C_1 es, por consiguiente, la transpuesta de C.

Ahora escribimos,

$$AT(A) = S \tag{34}$$

con el fin de probar que S es matriz simétrica. Como la transpuesta de la transpuesta es la matriz original, se tiene, transponiendo en (34),

$$AT(A) = T(S) \tag{35}$$

de donde, por tenerse, al comparar (34) y (35),

$$S = T(S) \tag{36}$$

se concluye que S es simétrica.

Digamos ahora que un escalar k se multiplica por una matriz, multiplicando k por cada uno de los elementos de la matriz. Lo mismo puede decirse del producto de una matriz por un escalar.
Se tiene,

$$kA = (k\,a_{ij}) = (a_{ij}\,k) = Ak \tag{37}$$

Es fácil demostrar las siguientes igualdades,

$$(38) \qquad (A + B)\ C = AC + BC$$

$$(39) \qquad C\ (A + B) = CA + CB$$

Hacen ver que el producto matricial goza de la propiedad distributiva respecto de la adición.

MATRIZ ADJUNTA. - Sea la matriz cuadrada,

$$(40) \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Formemos su transpuesta,

$$(41) \qquad T(A) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Se llama matriz adjunta de A, a la matriz formada con los cofactores de la transpuesta. A saber,

$$(42) \qquad adj\ A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

en palabras: es la matriz formada con los cofactores A_{ji} de (a_{ji}).

Supongamos que A es matriz no singular. Al dividir la matriz adjunta, (42), por el escalar $|A|$, determinante de la matriz (40), se obtiene la matriz inversa.

$$(43) \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(A_{ji})$$

A esta matriz se la llama inversa de A, por verificarse la siguiente relación:

$$(44) \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

de grande importancia, la cual pasamos a demostrar.

Al efecto, atendiendo a las relaciones (44), vamos a calcular el término c_{ij} del primer producto. Se tiene,

$$(45) \qquad c_{ij} = (a_{i1}\ ,\ a_{i2}\ ,\ .\ .\ .\ a_{in}) \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{i1} \\ A_{j2} \\ . \\ . \\ A_{jn} \end{bmatrix} \text{ o bien,}$$

$$(46) \qquad c_{ij} = \frac{1}{|A|} (a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{in} A_{jn})$$

Para los términos de la diagonal principal en la matriz producto, se tiene, $i = j$. En este caso, como es bien sabido, el paréntesis, en (46), se reduce al valor del determinante, o sea $|A|$, de donde se deduce que los términos c_{ij}, para $i = j$, valen la unidad. Caso de ser, $i \neq j$, es decir para los términos que están fuera de la diagonal principal el paréntesis vale cero. En consecuencia, se tiene siempre $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$. De manera análoga se demuestra la segunda relación contenida en (44).

ECUACIONES LINEALES. - Caso particular: sistema de Cramer. Sea el sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas y $|A| \neq 0$ (esto equivale a decir que la matriz no es singular):

(47)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{2n} x_n &= b_2, \\ .\ \ .\ \ \ .\ \ .\ \ \ .\ .\ .\ \ \ \ .\ \ .\ &\ .\ . \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ .\ .\ .\ + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

La disposición matricial del sistema de ecuaciones, es la siguiente:

$$(48) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

o también, sintetizando,

$$(49) \qquad AX = B$$

Expresión en la cual A indica la matriz de los coeficientes, (a_{ij}); X, la matriz columna de las incógnitas; B, la matriz columna de los términos conocidos, b_i: La resolución del sistema (47) equivale a la resolución de la ecuación matricial (49), es decir, a la obtención del vector X, lo cual se logra así:

Sea A^{-1} la matriz inversa de A. Multiplicando a izquierda los dos miembros de (49) por A^{-1} y teniendo en cuenta que el producto posée también la propiedad asociativa, o sea que

$$(AB)\,C = A\,(BC) = ABC, \quad \text{se tiene,}$$

$$(50) \qquad A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$(51) \qquad (A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \qquad \text{de donde,}$$

$$I_n X = X = A^{-1}B$$

Las incógnitas son las componentes del vector X, cuyos valores conocemos, como elementos igualmente dispuestos en la matriz columna,

$$A^{-1}B$$

Lo esencial en la resolución es el cálculo de la matriz inversa, lo cual se consigue por procedimientos diversos que no veremos aquí.

Medellín, Julio de 1956