FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
VOLUMEN VI, PÁGINAS 231-251
ISSN: 1885-2912

# ALGUNAS CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS DEL USO DE UN ENTORNO DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Agustín Morales González

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

## Resumen

En este artículo, en primer lugar, describimos los procesos de resolución de dos problemas presentados por el profesor Dr. D. Luz Manuel Santos Trigo, investigador del CINVESTAV (México), a nuestros alumnos de 2º curso de la titulación de Maestro Especialista en Educación Primaria en un Seminario que les impartió en abril de 2004.

El primero de ellos fue precedido de una explicación sobre las características del software y de los problemas que podían resolverse con éste y el problema fue resuelto en su totalidad por dicho profesor en el Aula Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas a la vez que explicaba los pasos que iba realizando a los alumnos que se limitaban a comprender lo explicado.

El segundo, llevado a cabo en el Aula de Informática, en una sesión de dos horas, los alumnos, en grupos de dos, fueron resolviendo el problema siguiendo los pasos que en cada momento se les indicaba. Ambos problemas presentaban una cierta complejidad, dado que su resolución requería usar muchas de las herramientas del programa, incluso la de "Lugar Geométrico".

En segundo lugar, a partir de los informes que nos presentaron los distintos grupos de alumnos sobre lo realizado, tratamos de analizar ciertas características, tales como la forma de expresión de los elementos y relaciones que aparecen, así como detectar posibles dificultades en la compresión de conceptos.

## Abstract

Firstly, in this article, we describe the solving processes of two problems that were presented by professor Luz Manuel Santos Trigo (PhD), investigator from the CINVESTAV, to our pupils of the second course of Primary Education of the Teacher Training in a Seminary developed in April 2004.

The first problem was preceded by an explanation on the characteristics not only of the Dynamic Geometry software but also of the problems that can be solved with it. The

whole problem was solved and explained by the aforementioned professor while the pupils just follow his clear indications.

The second problem was carried out in the Computer Classroom, in a two hours session, it was also solved by the professor but, at the same time, the pupils, working in pairs, were following his explanations. Both problems can be considered complicated because they required the use of many commands of the programme.

Secondly, from the reports made later by the different groups of pupils, we try to analyse the language that they use to describe the elements and relationships that appear, as well as to detect the difficulties in the comprehension of the concepts.

## Introducción

En los últimos años hemos incorporado en el programa de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II", que se imparte, en la Facultad de Formación del Profesorado de la ULPGC, en el segundo curso de la titulación de "Maestro Especialista en Educación Primaria", el estudio y la utilización de un entorno de Geometría Dinámica, en concreto, el Cabri Géomètre II, cuyas posibilidades didácticas contribuyen a mejorar tanto la calidad de los contenidos que impartimos como la motivación de una buena parte de los alumnos. Pensamos que ello se debe a que dicho software nos permite llevar a cabo un planteamiento innovador en la enseñanza que impartimos.

A este respecto recordamos las palabras del NCTM (2000) para el que, con el uso tecnología, los alumnos pueden generar muchos ejemplos como un medio de establecer y explorar conjeturas, aún cuando el generar muchos ejemplos de un determinado fenómeno no constituye una demostración. Sin embargo aconseja que se utilice la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

En el segundo cuatrimestre del curso 2003-2004 contamos, en la Facultad de Formación del Profesorado, con la presencia del profesor Dr. D. Luz Manuel

Santos Trigo, investigador del CINVESTAV (México) y experto en resolución de problemas, en especial los que requieren utilizar software educativo y, en concreto, entornos de Geometría Dinámica. El profesor Santos impartió un breve seminario los días 26 y 27 de abril, dirigido a nuestros alumnos de 2º curso de la especialidad de Educación Primaria que habían asistido previamente a varias clases en las que se les explicaron las características básicas del Cabri Géomètre II, pero que carecían de práctica. Como ya se ha indicado, la resolución paso a paso de los dos problemas fue precedida de una charla en la que, entre otras cosas, se les explicó a los alumnos que:

a) El software de Geometría Dinámica ofrece la posibilidad de construir representaciones conocidas previamente algunas de sus propiedades.

b) Dichas representaciones permiten al estudiante formular preguntas y explorar posibles respuestas.

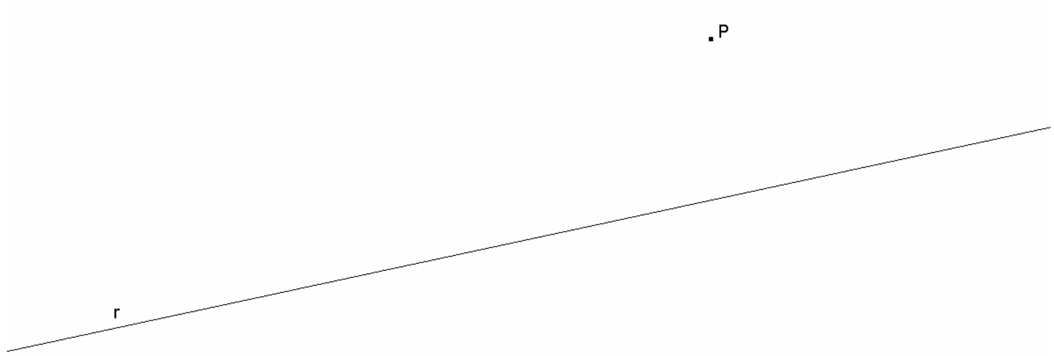
c) Resultan especialmente importantes los procesos de identificación de conjeturas y la exploración y presentación de argumentos que expliquen y validen los teoremas, así como la comunicación de los resultados.

d) Con este tipo de software los alumnos pueden realizar modelizaciones, estudiar fenómenos de variación, usar tablas, ordenar, calcular y medir, estudiar las formas geométricas, buscar patrones, considerar varias vías para la resolución de un problema, etc.

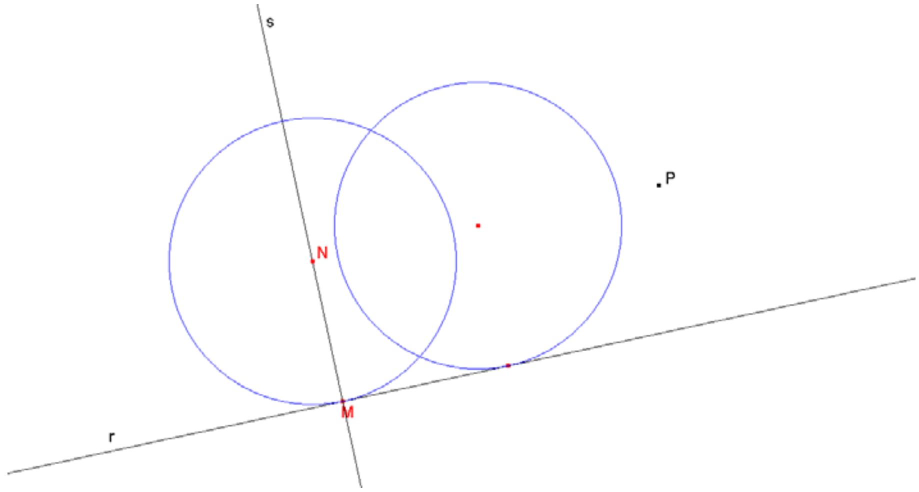
e) En cuanto a la estructura de los problemas es importante considerar el contexto de la actividad, considerar las ideas matemáticas básicas y las estrategias o caminos alternativos de resolución, utilizar otros recursos informáticos, buscar aplicaciones, extensiones y conexiones de la actividad.

**Actividad explicada el primer día: Determinar una circunferencia que sea tangente a una recta r y que pase por un punto P exterior a dicha recta**

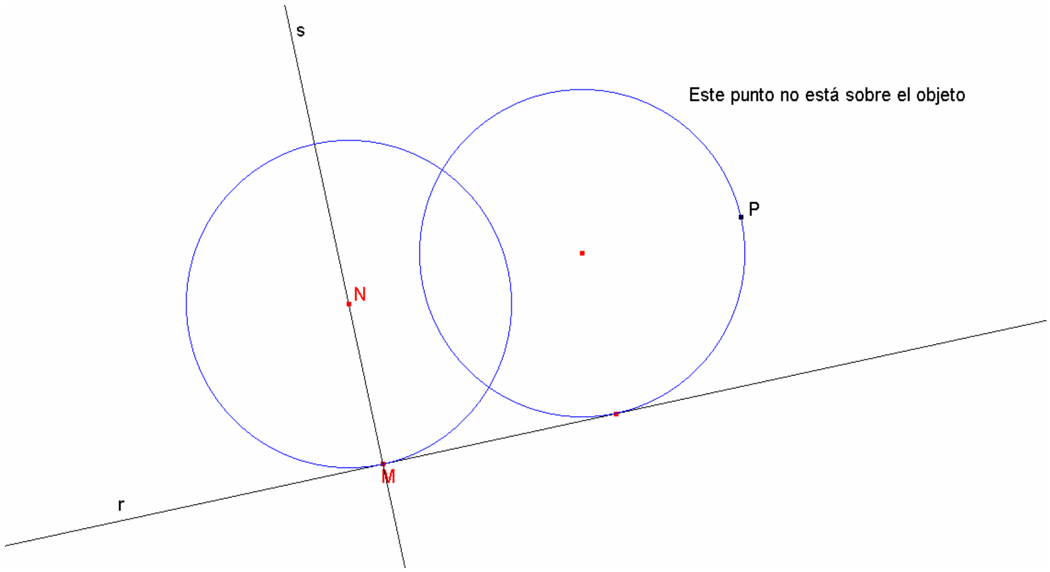
Sean r y P la recta y el punto dados.



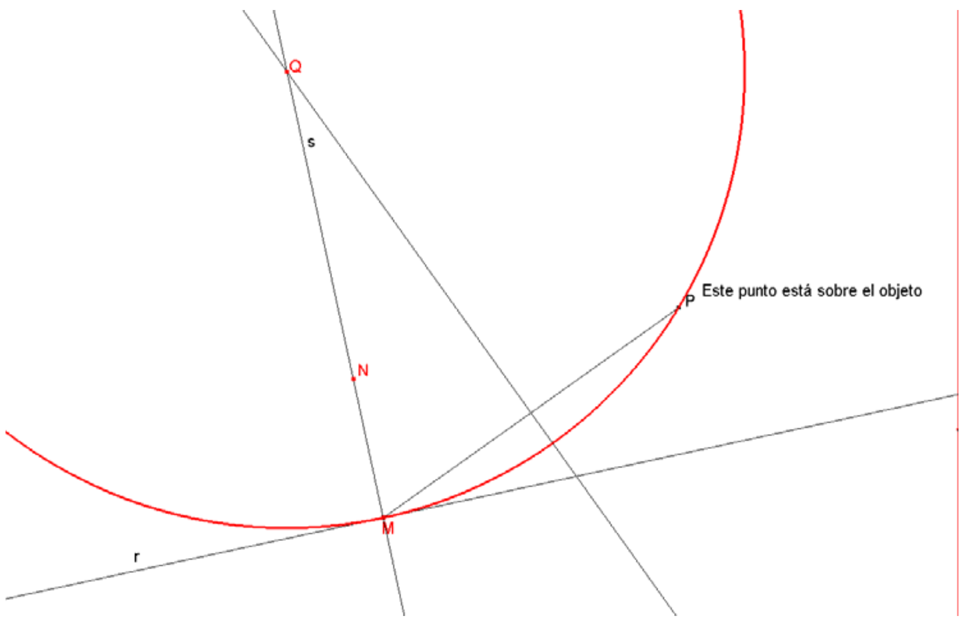

Tomemos un punto cualquiera, M, sobre r y tracemos la recta s, perpendicular a r por dicho punto M. Tomemos ahora un punto N sobre s y tracemos la circunferencia de centro N y radio NM. Cabría pensar que bastaría mover M sobre r hasta obtener la circunferencia que pase por P.



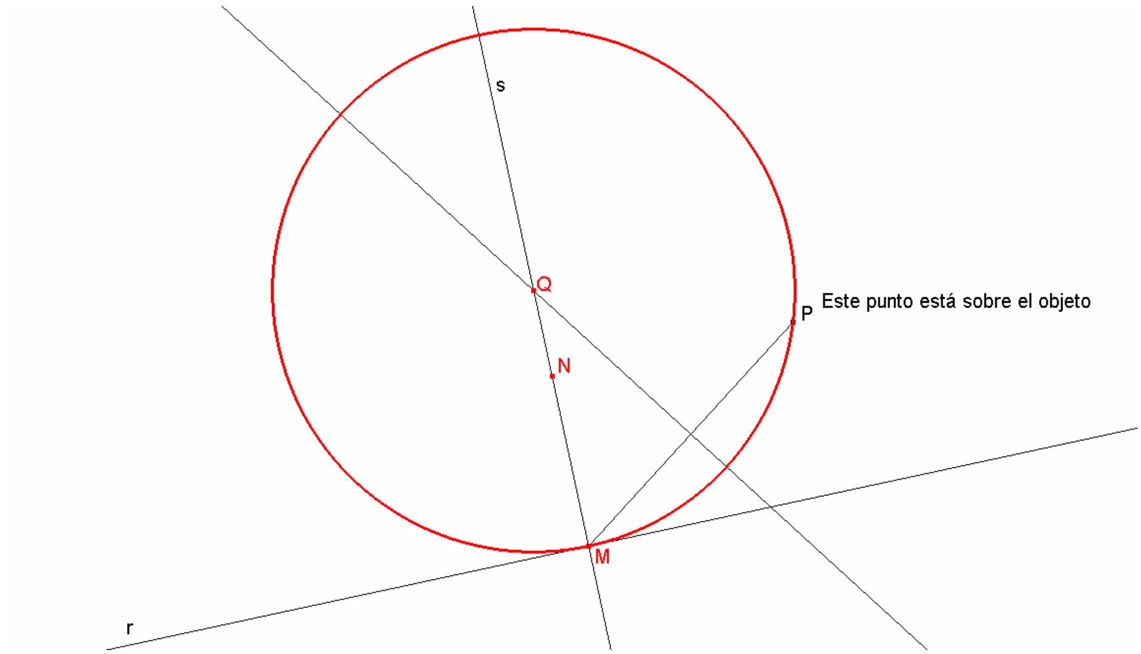

Pero, como puede comprobarse con la opción “Pertenece”, la circunferencia así obtenida no pasa por P.



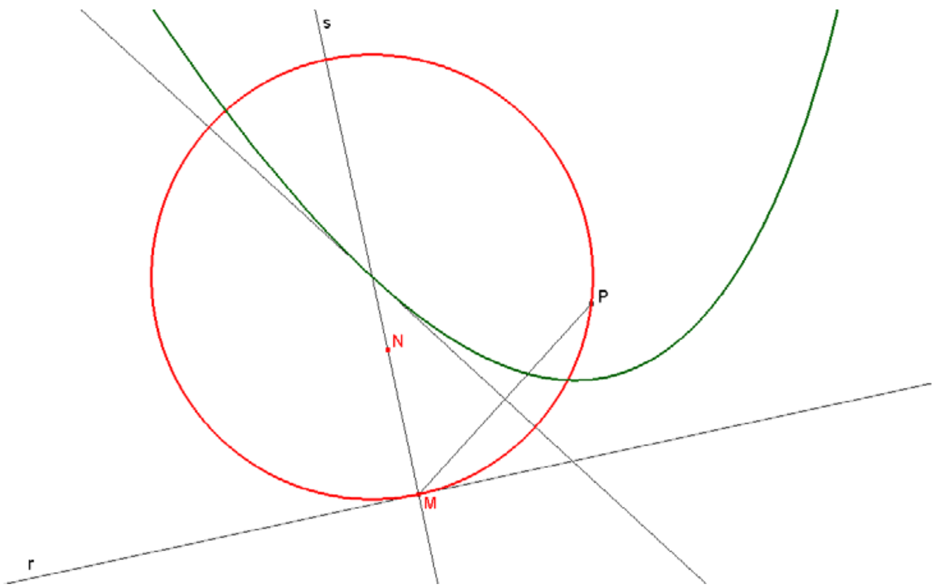

El proceso seguido nos permite comprender que si la circunferencia buscada tiene que pasar por M y por P, su centro tiene que estar sobre la mediatriz de MP. Como, además, debe estar sobre la recta s, bastará tomar el punto de intersección de mediatriz y recta. Obsérvese que para esta posición de M, la circunferencia correspondiente tiene un radio demasiado grande:



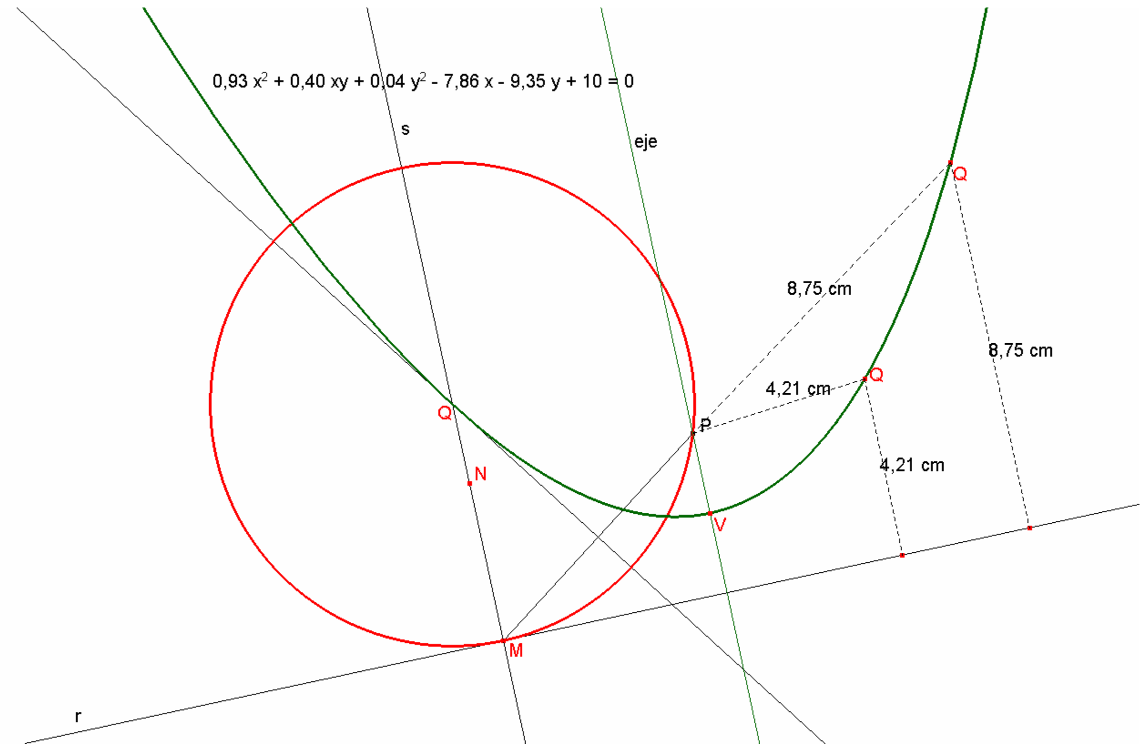
Es claro que, dado que podemos desplazar M sobre r, el problema tendrá infinitas soluciones:



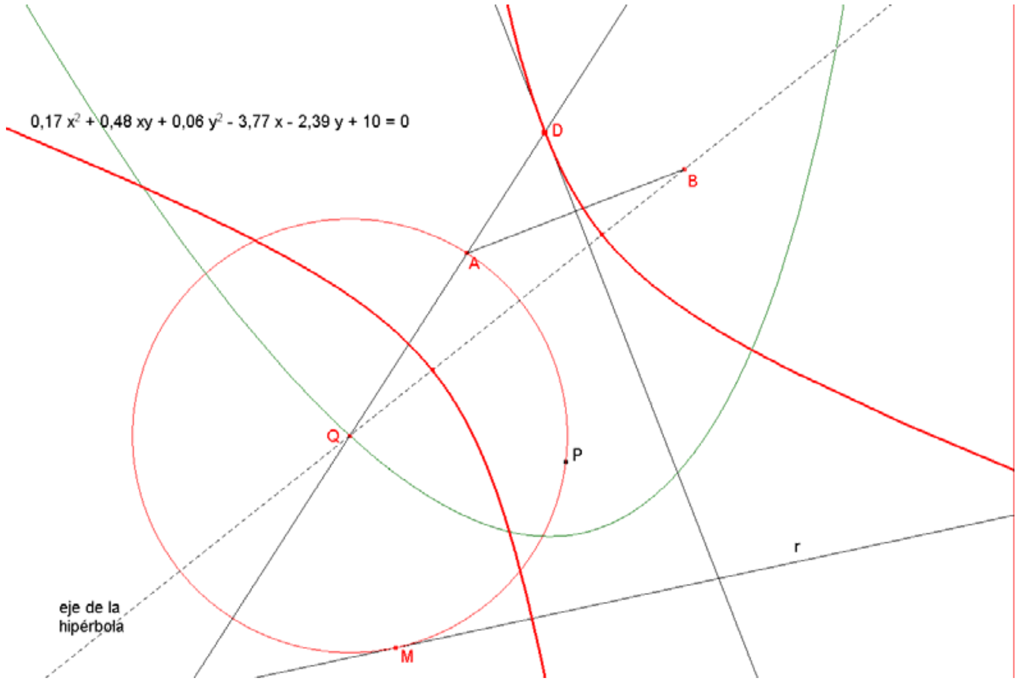

Así, puesto que para cada posición de M se tiene un punto Q, podemos obtener el lugar geométrico de Q cuando M recorre r.



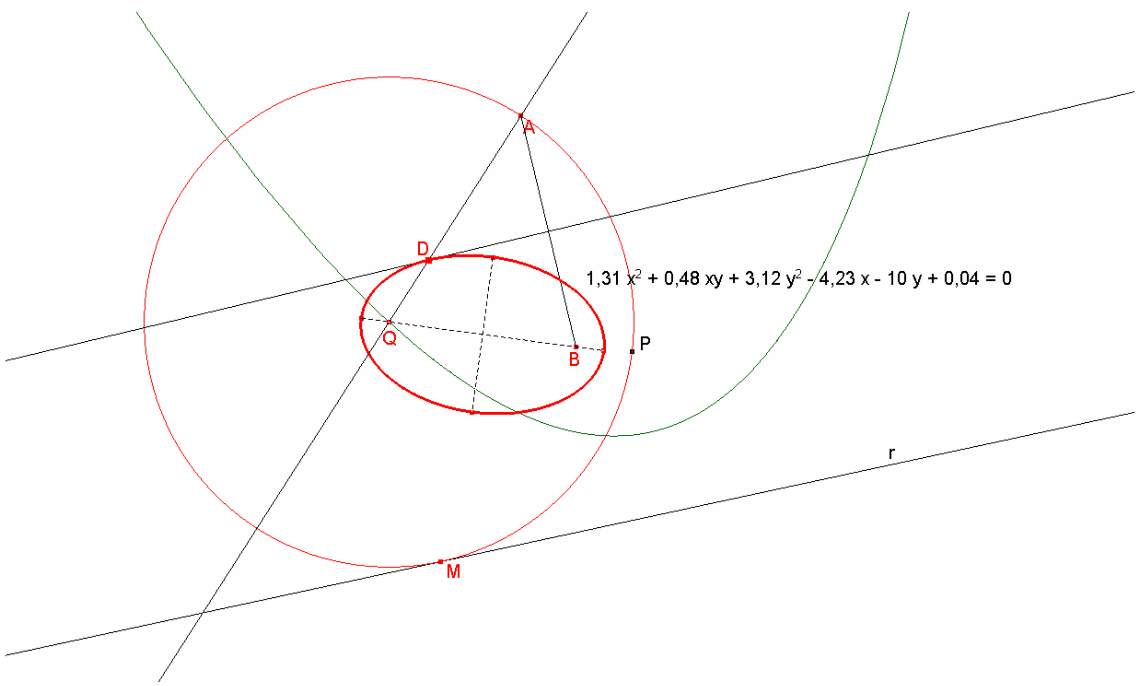
Al ser med(QP) = med (QM), y dada la forma del lugar, es razonable pensar que puede tratarse de una parábola cuyo foco es el punto P y cuya directriz es la recta r. Para verificarlo, comprobaremos que, para cualquier punto Q que tomemos de la supuesta parábola, se verifica que la distancia QP coincide con la distancia desde Q hasta r. Comprobado esto, podemos obtener fácilmente el eje, el vértice, e incluso, la ecuación de la parábola.




Finalmente, tomemos ahora un punto A de la circunferencia y un punto B exterior a ella. Tracemos la recta QA que une el centro de la circunferencia con A, así como la mediatriz del segmento AB. Sea D el punto de intersección de ambas rectas. Pues bien, el lugar geométrico de D cuando A recorre la circunferencia es una hipérbola cuyos focos son los puntos B y Q.




Si, por el contrario, el punto B es interior a la circunferencia, dicho lugar es una elipse cuyos focos son dichos puntos B y Q.



**Actividad guiada por el profesor Santos que fue propuesta el segundo día para su realización por los alumnos, individualmente o en grupo.**

Se muestra a continuación un informe de esta actividad, realizado por cuatro alumnos, que consideramos bastante aceptable. Lo que aparece en cursiva respeta estrictamente lo que aparece en el citado informe:

a) Obtención de un triángulo isósceles:

1. *Tomar dos puntos cualesquiera en el plano.*
2. *Etiquetado de dichos puntos. En nuestro caso, los puntos A y B.*
3. *Trazar un segmento entre el punto A y el punto B: extremos del segmento.*
4. *Obtener el punto medio de dicho segmento AB.*
5. *Trazar la perpendicular de dicho segmento AB (del punto medio respecto de dicho segmento).*
6. *Esa perpendicular es, por definición, la mediatriz de dicho segmento: todos sus puntos son equidistantes respecto de A y de B.*
7. *Tomar un punto cualquiera de la mediatriz.*
8. *Etiquetado de dicho punto. En este caso, lo denominamos punto P.*
9. *Trazar un segmento desde el punto A al punto P y otro segmento desde el punto B al punto P.*
10. *Resulta más conveniente utilizar la herramienta triángulo.*
11. *Aumentar el grosor y colorear los segmentos AP, PB y AB.*
12. *Medir la longitud de cada segmento obtenido.*

13. *Por tanto, queda definido un triángulo isósceles, que sería el primer resultado obtenido: Observación de una propiedad de este triángulo: dos de sus lados son iguales (AP y BP).*

La representación gráfica *del conjunto de los pasos seguidos hasta la obtención del triángulo isósceles* se muestra en la figura 1.

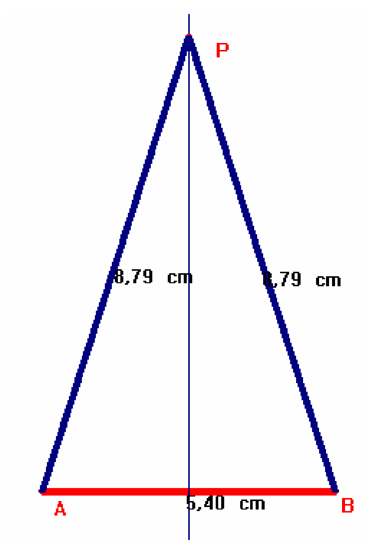



Fig. 1

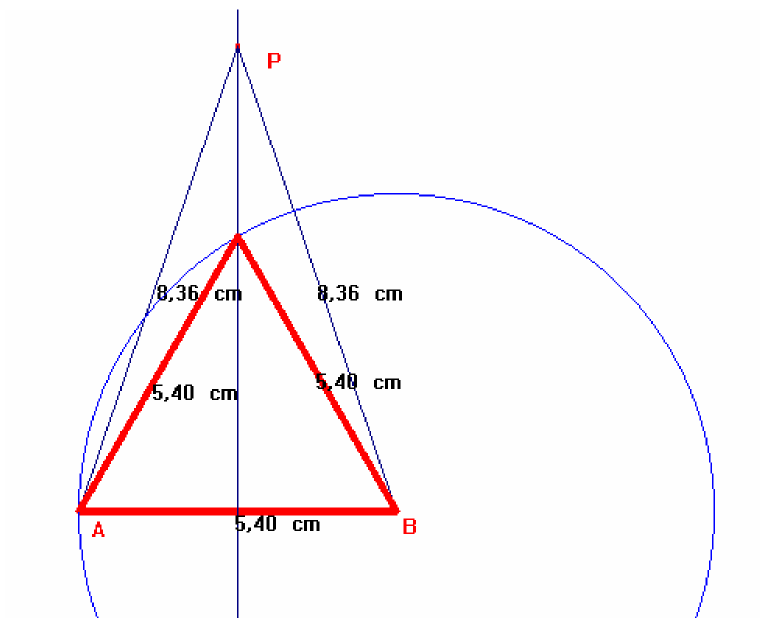



Fig. 2

b) Obtención del triángulo equilátero cuyos lados miden lo mismo que la base (lado horizontal) del triángulo isósceles:

*La siguiente construcción geométrica será a partir del triángulo isósceles ya obtenido: Se observa que cuando movemos el punto P, la medida de la longitud de los lados del triángulo va variando hasta conseguir que todos sus lados tengan igual medida. De esta forma, se obtiene el segundo resultado: triángulo equilátero.*

*Pero ¿cómo podríamos obtener dicho triángulo equilátero sin seguir este proceso?:*

1. *Trazar una circunferencia que tenga como centro el punto B y como radio la distancia desde el centro al punto A.*
2. *Obtener el punto de intersección de la circunferencia con la mediatriz del segmento AB.*
3. *Trazar un segmento desde el punto A hasta el punto de intersección y otro segmento desde dicho punto de intersección hasta el punto B (es más conveniente utilizar la herramienta de triángulo entre esos tres puntos).*
4. *Medir la longitud de cada segmento, es decir, de cada lado del triángulo.*
5. *Se aumenta el grosor y se colorea este nuevo triángulo.*
6. *Se observa que todos los lados tienen la misma medida y, por tanto, se trata de un triángulo equilátero: todos sus lados son iguales, propiedad de dicho triángulo.*

La representación gráfica de la obtención del triángulo equilátero se muestra en la figura 2.

c) Obtención del triángulo rectángulo isósceles cuya base es el segmento horizontal de partida:

*La siguiente construcción geométrica será la de un triángulo con un ángulo de 90º a partir de la construcción anterior: Si medimos el ángulo que forman los lados AP y PB del triángulo isósceles, se puede observar que al mover el punto P, dicha medida va variando hasta conseguir un ángulo de 90º: Tercer resultado: Triángulo isósceles rectángulo ¿Cómo se puede obtener dicho triángulo sin seguir este procedimiento?:*

1. *Trazar una circunferencia cuyo centro sea el punto de intersección de la mediatriz del segmento AB y cuyo diámetro sean los extremos de dicho segmento. Observación: La circunferencia tendrá como radio la distancia desde el punto de intersección hasta el punto A (o el punto B).*
2. *Obtener el punto de intersección de esta nueva circunferencia con la mediatriz del segmento AB.*
3. *Trazar un segmento del punto A hasta el punto de intersección obtenido y otro segmento desde este punto de intersección hasta el punto B. Mejor utilizar la herramienta del triángulo.*
4. *Se ha obtenido el triángulo pretendido.*
5. *Se aumenta el grosor y se colorea este nuevo triángulo.*
6. *Comprobamos la medida del ángulo que forman los lados A-punto de intersección y punto de intersección-B, siendo de 90º. Por tanto, el tercer resultado es un triángulo isósceles rectángulo; uno de sus ángulos mide 90º, propiedad de este tipo de triángulo.*

La representación gráfica de *la obtención del triángulo isósceles rectángulo* aparece en la figuras 3 y 4 que siguen:

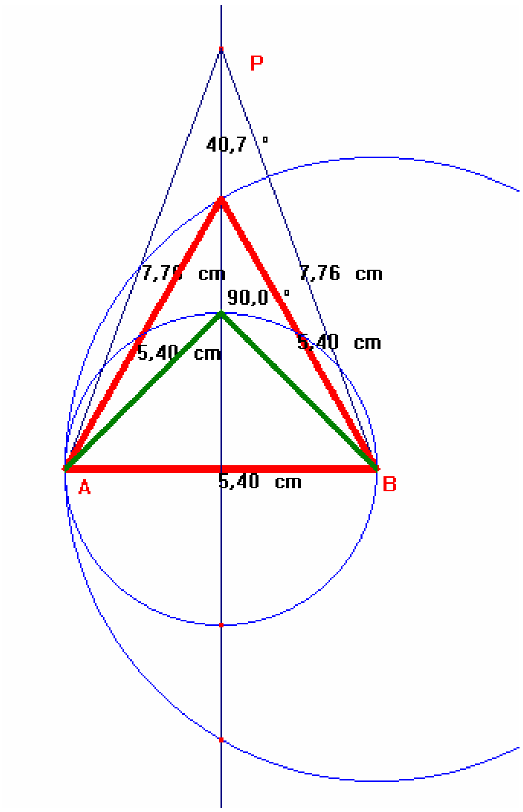



Fig. 3

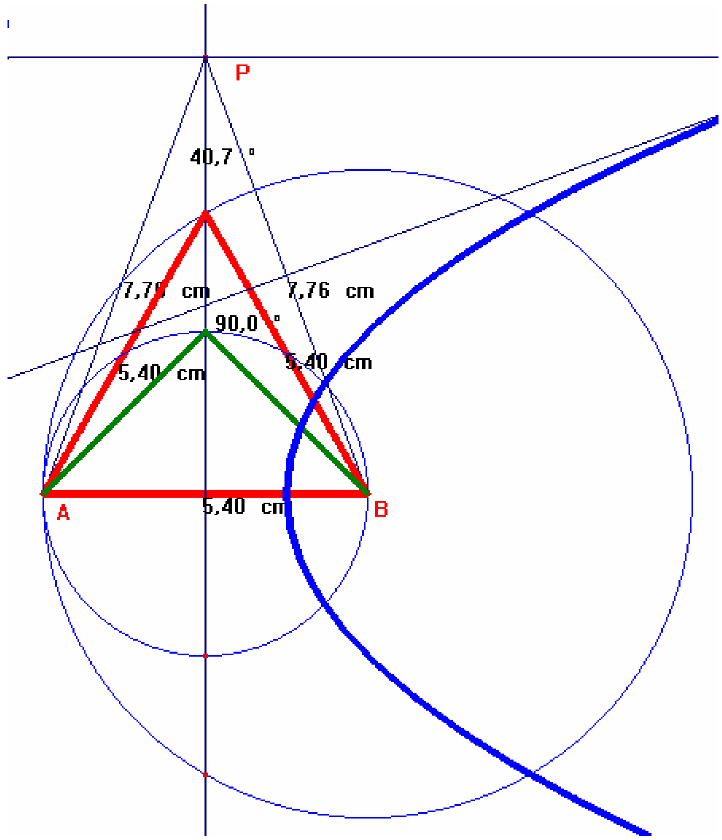



Fig. 4

d) Obtención de un primer lugar geométrico: la parábola

1. *Trazar una recta perpendicular a la mediatriz obtenida anteriormente y que corte por el punto P de dicha mediatriz.*
2. *Obtener la mediatriz del segmento PB (lado del triángulo cuyos extremos son los puntos A, P y B), o también, obtener el punto medio del segmento PB y trazar la perpendicular por dicho punto medio.*

3. *Punto Q de intersección de las dos rectas trazadas: Punto de intersección de la recta perpendicular a la mediatriz que corta por el punto P y la mediatriz del segmento PB.*
4. *Aumentar el grosor del punto de intersección y colorearlo.*
5. *Lugar geométrico del anterior punto de intersección de las dos rectas con respecto al punto P.*
6. *Surge la parábola, que es el cuarto resultado obtenido.*
7. *Se aumenta el grosor y se colorea.*

La *representación gráfica de las construcciones geométricas obtenidas hasta la parábola* se muestra en la figura 4 que aparece arriba. Nótese que en el dibujo que se presenta en dicha figura no aparece el punto Q por caer fuera de los límites del papel.

e) Comprobación de que el lugar es realmente una parábola:

*Se quiere comprobar que la supuesta parábola obtenida es realmente una parábola. Propiedad de la parábola: Cualquier punto de la parábola es equidistante del punto B (punto fijo llamado foco) y de la mediatriz (recta fija llamada directriz):*

1. *Tomamos un punto sobre objeto del lugar geométrico (es un punto móvil sobre la parábola).*
2. *Se aumenta el grosor del punto móvil y se colorea.*
3. *Trazar un segmento desde el punto sobre el lugar geométrico hasta el punto B o Foco.*

4. *Trazar una recta perpendicular a la mediatriz que corte por el punto sobre el lugar geométrico.*
5. *Medir la longitud desde el punto sobre el lugar geométrico hasta el Foco.*
6. *Medir la longitud desde el punto sobre el lugar geométrico hasta la mediatriz (recta fija).*
7. *Ambas medidas son iguales: Comprobación de la propiedad de la parábola.*

La figura 5 que sigue corresponde a la comprobación citada.

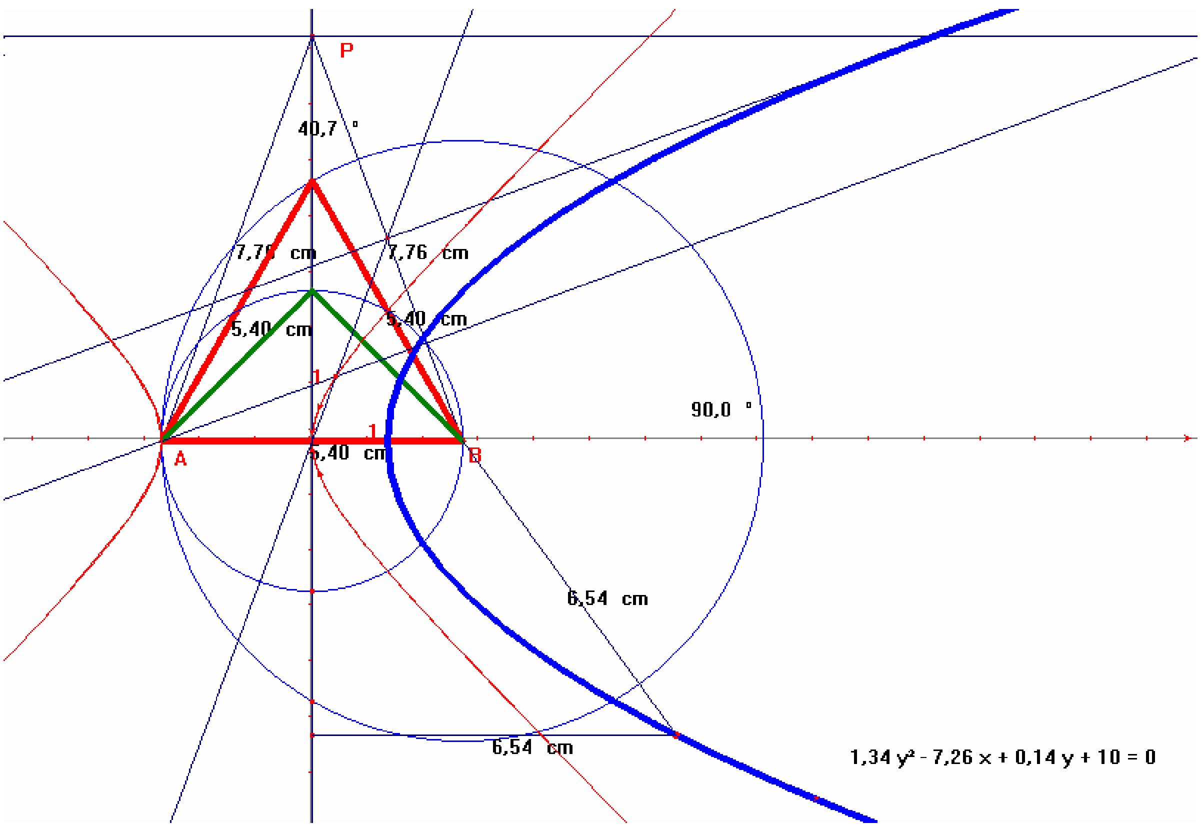



Fig. 5

f) Obtención de un segundo lugar geométrico: la hipérbola

La explicación de los alumnos se muestra a continuación:

1. *Punto de intersección* del *segmento BP* con su *mediatriz.* (herramienta punto de intersección segmento-recta).
2. Trazar una *recta* que tenga entre sus puntos el *punto de intersección* anterior y el *punto medio del segmento AB.*
3. Trazar otra *recta perpendicular* al *segmento BP* y que corte al punto A.
4. *Punto de intersección* de ambas rectas.
5. *Lugar geométrico* del *punto de intersección* de ambas rectas y el *punto P.*
6. *Surge una nueva figura geométrica que parece ser una hipérbola, pero no es continua.*
7. *Se selecciona el lugar geométrico (hipérbola) y se procede de la siguiente forma: En la herramienta opciones, preferencias, opciones para lugares geométricos, el número de objetos en el lugar geométrico se cambia de 50 a 1000, aplicar.*
8. *Aparece la hipérbola de forma continua.*
9. *Se puede aumentar el grosor y colorear.*
10. Se *muestran los ejes y se llevan al punto medio del segmento AB.*
11. *Punto sobre objeto y 5 puntos sobre la parábola.*
12. *Herramienta cónica y pinchar los 5 puntos del lugar geométrico (parábola).*
13. *Se observa que la cónica que aparece coincide con la parábola.*
14. *Herramienta ecuación y coordenadas de la parábola.*

El ejercicio resuelto por nosotros, con el origen de coordenadas en M, queda como sigue:

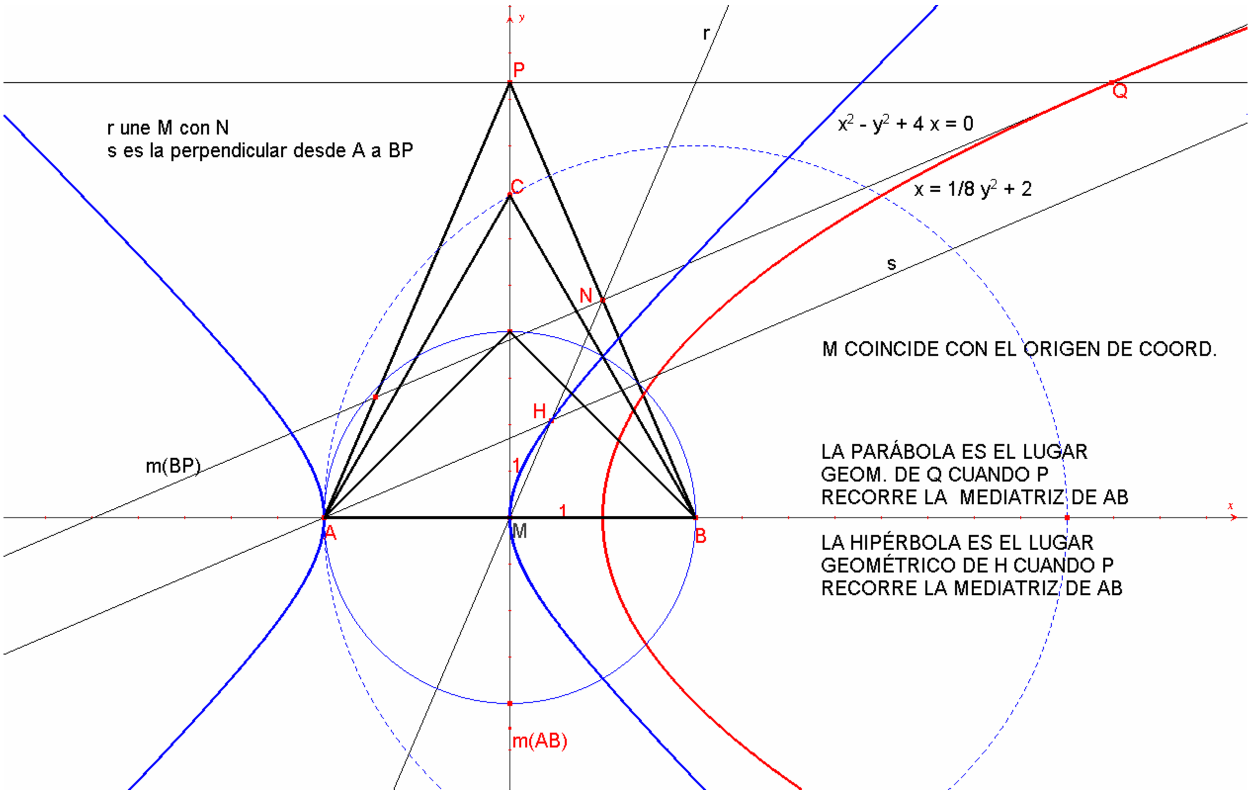



Fig. 6

## Algunas observaciones en relación con los informes

A partir del análisis de las construcciones entregadas por 10 grupos de alumnos que corresponden a las descripciones detalladas de la actividad realizada por alumnos de 2º curso de Educación Primaria siguiendo las indicaciones del profesor Santos, podemos afirmar que:

1. En general, el lenguaje que utilizan en las explicaciones es correcto. Algunas expresiones incorrectas, imprecisas o inadecuadas detectadas han sido:
   - "Hacer un segmento uniendo el punto A y el B".
   - "Trazamos una recta en función del punto de intersección que acabamos de hacer".
   - "Hacer un triángulo que pase por AB y el nuevo punto de la circunferencia".
   - "Medir el ángulo que describen los puntos ABC" (Medir el ángulo ABC).
   - "Hacemos el punto sobre objeto en relación al lugar geométrico".
   - "Lugar geométrico del punto L con respecto al punto P"(Lugar de L cuando P se desplaza sobre…).
   - "Hallar el lugar geométrico desde el punto de intersección de la recta con la mediatriz del segmento PB, y el punto P".
   - "Buscamos el lugar geométrico entre las dos rectas donde se unen a P".
   - "Hallamos el lugar geométrico del punto de intersección de la recta perpendicular por el punto A al segmento BP con la recta que pasa por el punto medio del segmento AB y por el punto de intersección del segmento BP con la mediatriz del mismo segmento".
   - Hipérbole (en vez de hipérbola).

2. Existen algunos errores de concepto, entre ellos:
   - "Una propiedad de la parábola es que su foco equidista de cualquier punto de la misma y de la directriz".

- "Hallamos la recta perpendicular que corta la mediatriz del punto P con respecto al lugar geométrico".

3. Se les han presentado algunas dificultades:
   - "Mediante la opción "punto geométrico" lo aplicamos sobre el punto y obtuvimos una parábola. Utilizamos un método de comprobación (de que se trata de una parábola) que no recordamos".
   - Miden las distancias desde un punto genérico de la parábola al foco y a la directriz, respectivamente, y obtienen la misma medida, pero no relacionan esta igualdad con el hecho de que se trata de una parábola.

4. Algunos comentarios sobre la actividad realizada:
   - "La realización de la práctica nos ha resultado sencilla, a pesar de nuestra escasa experiencia con el Cabri Géomètre II, ya que la actividad se limitaba a repetir los pasos que nos indicaba Don Manuel Santos mediante el cañón. Si bien cabe destacar que algunos conceptos no quedaron claros, como aquellos en que se basaba Don Manuel para justificar la comprobación de la parábola e hipérbole".
   - "Dibujaremos una recta perpendicular a la recta P que ya habíamos creado antes y, posteriormente, crearemos la mediatriz entre P y B y, a partir de ahí, se crearon una serie de puntos de intersección para que diera lugar a una serie de parábolas y figuras cónicas utilizando el punto geométrico, aunque no es una cuestión que nos ha quedado clara".

- "La práctica con el Cabri fue interesante y novedosa. Días anteriores habíamos realizado actividades con el Cabri, pero ninguna tan extensa como esta. Además, Manuel Santos supo explicar con detenimiento y claridad todos los pasos que debíamos hacer, por lo que la actividad fue bastante fácil.

  Pensábamos que la Geometría era difícil de comprender, pero, con la ayuda de este programa informático, hemos conocido muchas formas para realizar figuras geométricas. Además el programa ofrece gran cantidad de posibilidades de cambio y de investigación.

  En conclusión, hemos descubierto que la Geometría es más útil y entretenida de los que pensábamos".

La experiencia realizada y nuestra práctica profesional nos convence en que, en general, alumnos con muy poca familiarización con este tipo de software, son capaces de realizar construcciones de cierta complejidad como las presentadas aquí. Es decir, los alumnos captan rápidamente la función de cada uno de los comandos de Cabri, de modo que les resulta relativamente sencillo utilizarlos siempre que se les especifique al máximo lo que deben hacer en cada paso del proceso de construcción. Ello contrasta con la enorme dificultad que encuentran al principio al utilizar el programa para solucionar actividades "sencillas", sin ningún tipo de ayuda, como por ejemplo: Construir un triángulo isósceles que no pierda el carácter de isósceles al modificar su forma por continuidad, o construir un triángulo rectángulo ídem ídem.

En relación con la descripción de lo hecho por cada grupo, cabe decir que, en general, la expresión es buena y los términos que utilizan son en su mayoría los adecuados. Pensamos que ello se debe a nuestra insistencia en que la expresión fuera correcta y al hecho de que han consultado bibliografía o apuntes de clase para recordar términos que ya tenían olvidados.

Indudablemente, el escaso conocimiento que la mayoría tiene del concepto de lugar geométrico, se ha traducido en que muchos obtienen las cónicas que aparecen en las construcciones anteriores, pero les cuesta mucho comprender, por ejemplo, por qué una curva con forma de parábola es realmente una parábola. Entendemos que se debe a que han olvidado su definición métrica que en su día muchos aprendieron, así como los elementos clave de esta cónica (vértice, foco, directriz, eje, etc.).

## Referencias bibliográficas

Camacho, M.; Santos, L.M. (2004): La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas. *Números*, vol. 58, 45-60.

Del Río, J. (1994): *Lugares Geométricos. Cónicas*, Síntesis. Madrid.

García, I.; Arriero, C. (2000). Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas, *Suma*, vol. 34, 73-80.

González, M.J.; Lupíañez, J.L. (2001). Formación inicial de profesores de Matemáticas en secundaria: actividades basadas en la utilización de «software» de geometría dinámica. *Uno*, vol. 28, 110-125.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston. VA: The Council.

Santos, L.M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las Matemáticas. *Avance y Perspectiva*, vol. 20, 247-258.

Santos, L.M.; Sepúlveda, A. (2004). Hacia la construcción de un ambiente de instrucción basado en la resolución de problemas. En M.M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 323-341. Universidad de La Laguna. Tenerife.