

# “O QUE DESCOBRIRAM?” TAREFAS E DISCUSSÕES COLETIVAS USANDO DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DURANTE E APÓS ESTUDOS DE AULA

Paula Gomes, João Pedro da Ponte e Marisa Quaresma

*Com base num estudo de caso, procuramos compreender em que medida a participação de uma professora em estudos de aula tem reflexos na sua prática letiva. A recolha de dados incluiu observação participante (com realização de diário de bordo e gravações áudio/vídeo), recolha documental (tarefas e planos de aula) e entrevista. Os resultados indicam que participar em estudos de aula, planeando discussões coletivas a partir das respostas dos alunos, contribuiu para mudanças na prática da professora. Ela propôs uma tarefa que permitiu aos alunos estabelecerem conexões entre representações, e, na discussão coletiva, incentivou a participação de vários alunos e desafiou-os a ir além da tarefa, o que não fez nos estudos de aula.*

**Palavras-chave:** Discussão coletiva; Estudo de aula; Prática letiva; Representações; Tarefas

“What did you find out?” Tasks and whole-class discussions using several representations during and after lesson study

*Based in a case study, we seek to understand to what extent a teacher’s participation in lesson studies influences her teaching practice. Data collection included participant observation (doing a research journal and audio/video recording), document collection (tasks and lesson plans) and interview. The results suggest that participating in several lesson studies, planning whole-class discussions from the students’ answers, influenced the teachers’ practice. She proposed a task that allowed students to make connections between representations, as in the lesson studies, and, in the whole-class discussion, she encouraged several students to participate and challenged them to go beyond the task, which she did not do in the lesson studies.*

**Keywords:** Lesson study; Representations; Tasks; Teaching practice; Whole-class discussion

Gomes, P., Ponte, J. P. e Quaresma, M. (2023). “O que descobriram?” Tarefas e discussões coletivas usando diferentes representações durante e após estudos de aula. *PNA 18*(1), 77-103. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.27033>

“¿Qué habéis descubierto?” Tareas y discusiones colectivas utilizando diferentes representaciones durante y después de los estudios de clases

*Con base en un estudio de caso, pretendemos comprender en qué medida la participación de una profesora en estudios de clases se refleja en su práctica. La recogida de datos incluyó observación participante (diario de bordo y grabaciones de audio/vídeo), recopilación documental (tareas y planes de clase) y entrevista. Los resultados indican que participar en estudios de clases, planeando discusiones colectivas a partir de respuestas de los alumnos, aportó cambios en la práctica de la profesora. Ella propuso una tarea que permitió a los alumnos hacer conexiones entre representaciones y, en la discusión colectiva, incentivó la participación de varios alumnos y les desafió a ir más allá de la tarea, lo que no hizo en los estudios de clases.*

*Términos clave:* Discusión colectiva; Estudio de clases; Práctica docente; Representaciones; Tareas

A prática do professor assenta em dois pilares: as tarefas que propõe e a forma como gere a comunicação, em particular, como conduz discussões coletivas. A tarefa, como ponto de partida do trabalho dos alunos, pode potenciar a discussão de ideias matemáticas importantes e promover a aprendizagem dos alunos (Chapman, 2013; Ponte e Quaresma, 2016). Contudo, a seleção de tarefas coloca desafios ao professor, como saber se os alunos podem usar diferentes representações e estratégias (Chapman, 2013; Ponte et al., 2013). O uso de diversas representações permite aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, sendo importante que as tarefas possam incluir diferentes representações (Friedlander e Tabach, 2001; Mainali, 2021) e que os alunos sejam capazes de fazer transformações entre diferentes modos de representação (Mainali, 2021). Não sendo de esperar que os alunos desenvolvam espontaneamente essa competência, precisam de ser incentivados a usar diferentes representações (Friedlander e Tabach, 2001) quando trabalham nas tarefas propostas pelo professor, quando apresentam e explicam as suas respostas ou quando questionam as ideias dos colegas.

Conduzida a partir das respostas dos alunos, a discussão coletiva assume um papel fundamental na aprendizagem, sobretudo quando os alunos trabalham em tarefas em que podem usar várias representações, pois cria oportunidades para eles aprenderem ideias, conceitos e procedimentos matemáticos a partir da apresentação e análise do seu trabalho e dos colegas (Ponte, 2005; Takahashi, 2008). Contudo, o facto de os alunos usarem diferentes representações dificulta o trabalho do professor, quer quando os acompanha e tem de compreender as suas ideias e decidir que estratégias seleccionar, quer quando os convida a partilhar as

suas respostas e tem de decidir como conduzir a discussão considerando os objetivos de aprendizagem que definiu (Inoue, 2011; Stein et al., 2008).

Planejar detalhadamente a aula, antecipando estratégias e representações dos alunos, selecionando e ordenando as que considera importante explorar com a turma, ajuda o professor a estar mais preparado para conduzir a realização da tarefa e a discussão coletiva (Stein et al., 2008; Takahashi, 2008). Esse trabalho, assim como a seleção ou elaboração da tarefa, pode ser feito, de forma colaborativa, nas sessões de planejamento de um estudo de aula (EA). Os professores têm depois oportunidade de conduzir e observar a aula que planejaram e de refletir sobre o trabalho e as aprendizagens dos alunos (Fujii, 2016). Participar em EA cria oportunidades para os professores repensarem a sua prática, nomeadamente a seleção de tarefas e a condução de discussões coletivas (Ní Shúilleabháin, 2018; Quaresma e Ponte, 2016), mas um aspeto pouco investigado é o impacto dessa participação na sua prática letiva (Gomes et al., 2022; Olson et al., 2011). Assim, o nosso objetivo é compreender em que medida a participação de uma professora em estudos de aula tem reflexos na sua prática letiva posterior. Pretendemos responder à seguinte questão: qual foi o contributo dos estudos de aula para a prática da professora, nomeadamente na seleção de tarefas e na condução de discussões coletivas?

## QUADRO TEÓRICO

### **Tarefas e representações matemáticas**

As tarefas propostas pelo professor são centrais na aprendizagem da Matemática, pois são a base para o trabalho dos alunos (Chapman, 2013; Ponte e Quaresma, 2016). Diferentes oportunidades de aprendizagem emergem do trabalho com tarefas de natureza diversa, como exercícios, problemas, investigações ou explorações, com diferentes graus de abertura e com vários graus de desafio (Ponte, 2005). Uma tarefa pode ter várias questões, começando por questões mais simples e terminando com questões mais desafiantes. Importa saber que tarefas o professor deve selecionar, considerando os interesses e os conhecimentos prévios dos alunos, pois uma tarefa pode ser demasiado desafiante para alguns e um simples exercício para outros (Chapman, 2013; Ponte, 2005). Outros aspetos que o professor deve considerar são o trabalho e as aprendizagens que estabelece para os alunos. Vai propor tarefas para promover novas aprendizagens, para os levar a consolidar conhecimentos, ou ainda para verificar se dominam certos conhecimentos? Os alunos poderão resolver essas tarefas usando várias estratégias ou representações? Que dificuldades poderão ter?

É importante que os alunos trabalhem em tarefas que os ajudem a desenvolver a competência para trabalhar com diferentes representações (Friedlander e Tabach, 2001) e a fazer transformações entre diferentes modos de representação (Mainali, 2021). Sobre os tipos de representação mais comuns, Mainali (2021) refere: (i)

representação gráfica, onde inclui imagens, diagramas, planos de coordenadas e outras representações que usem figuras; (ii) representação numérica, onde se considera a apresentação de ideias ou conceitos matemáticos, organizados, ou não em listas ou tabelas; (iii) representação algébrica, usando símbolos ou fórmulas; e (iv) representação verbal, onde inclui a utilização da linguagem natural, oral e escrita. Trabalhar com várias representações permite aos alunos compreender ideias e conceitos matemáticos que não tenham compreendido numa só representação e escolher a representação que preferem ou selecionar a mais eficaz para resolver uma tarefa (Friedlander e Tabach, 2001; Mainali, 2021). Assim, além de propor tarefas em que os alunos possam usar diferentes representações, é importante que o professor os incentive a usá-las e que as use na sua prática letiva (Rocha, 2016).

Contudo, a seleção de tarefas coloca diversos desafios ao professor, como identificar tarefas que permitam o uso de diferentes representações e que proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, considerando as orientações curriculares e as capacidades e interesses dos seus alunos (Chapman, 2013; Ponte et al., 2013). Além disso, “há um escasso número de investigações que expliquem a escolha das representações para ensinar e aprender Matemática” (Mainali, 2021, p. 18) e o professor pode selecionar apenas as estratégias e representações que mais valoriza. Rocha (2016) analisou a prática de uma professora no ensino e aprendizagem de funções, focando-se nas representações obtidas com a calculadora gráfica. Concluiu que a professora usou sobretudo as representações gráfica e algébrica, começando a discussão coletiva por uma delas, sem uma ordem particular, e que a representação tabelar foi intencionalmente a menos usada. Assim, as aprendizagens dos alunos também são influenciadas pela forma como o professor conduz a realização da tarefa e como conduz a discussão coletiva a partir das respostas dos alunos, dando-lhes oportunidade para apresentarem as suas ideias e refletirem sobre as dos colegas (Chapman, 2013; Fujii, 2016).

### **Planear e conduzir discussões coletivas**

Conduzir uma discussão coletiva, uma forma particular da comunicação matemática, é outro elemento-chave do trabalho em sala de aula (Quaresma e Ponte, 2016; Takahashi, 2008), nomeadamente quando se usa uma abordagem exploratória (Ponte e Quaresma, 2016). Nesta abordagem, em vez de a aula se basear numa exposição/explicação do professor, apresentando exemplos e propondo exercícios para praticar, o trabalho desenvolve-se a partir de uma tarefa que os alunos são desafiados a realizar usando os seus conhecimentos prévios. Depois de os alunos trabalharem na tarefa de modo autónomo, na discussão coletiva eles têm oportunidade de partilhar, explicar, clarificar e justificar as estratégias que seguiram e as representações que usaram, ouvir, analisar e questionar as ideias dos seus colegas, e concordar ou discordar com as ideias apresentadas (Ponte e Quaresma, 2016; Stein et al., 2008; Takahashi, 2008). A

discussão coletiva é um importante momento para a negociação de significados e para a construção de novo conhecimento, a partir da reflexão dos alunos sobre o trabalho que realizaram (Ponte, 2005).

Ao professor cabe monitorizar o trabalho dos alunos para perceber como pensaram e como pode apoiá-los, mas também para decidir que estratégias e representações pode selecionar para a discussão e como ordená-las, ou se precisa de introduzir outras, considerando os objetivos da aula (Stein et al., 2008; Takahashi, 2008). Cabe-lhe, também, convidar os alunos a partilhar as suas estratégias, decidindo se irá incluir contribuições incorretas ou incompletas, pedir-lhes para justificarem as suas estratégias ou clarificarem aspetos das respostas para os colegas, ou desafiá-los a irem além do trabalho que fizeram quando resolveram a tarefa (Franke et al., 2007; Kooloos et al., 2020; Ponte e Quaresma, 2016). O professor pode ainda incentivar os alunos a continuar a participar, encaminhando-os na resolução da tarefa, ou convidar outros alunos a intervir na discussão ou a reagir, explorando desacordos entre eles ou dando-lhes oportunidade para formularem justificações alternativas (Kooloos et al., 2020; Ponte e Quaresma, 2016). Como os alunos nem sempre explicam as suas ideias com clareza nem usam corretamente a linguagem matemática, o professor pode reformular as ideias destes, encorajando-os a continuar a explicar ou a clarificar o que disseram, ou destacando para toda a turma aspetos importantes das respostas (Franke et al., 2007; Inoue, 2011). Também importante é o estabelecimento de conexões entre as diferentes estratégias ou representações usadas pelos alunos, considerando a sua eficácia para resolver outras tarefas e os objetivos da aula (Stein et al., 2008).

Conduzir uma discussão coletiva é, pois, um desafio para o professor que, além de compreender as estratégias dos alunos, deve dar-lhes voz e incentivá-los a ouvir e analisar as estratégias dos colegas (Stein et al., 2008; Takahashi, 2008). Ademais, durante a discussão, é preciso que o professor compreenda as explicações dos alunos e decida quando e como pode desafiá-los ou apoiá-los ou quando precisa de introduzir informação. Para tal, o professor precisa de usar o seu conhecimento matemático e didático e o conhecimento que tem dos alunos e da forma como aprendem (Stein et al., 2008; Takahashi, 2008) para assumir “um papel de moderador, gerindo a sequência de intervenções e orientando, se necessário, o respetivo conteúdo” (Ponte, 2005, p. 16).

Para ajudar o professor a tomar estas decisões no limitado tempo da aula e conduzir uma discussão produtiva Fujii (2016), Takahashi (2008) e Stein et al. (2008) sublinham a importância de preparar essa condução. Sugerem que o professor antecipe as estratégias dos alunos e pense quais as que considera importante discutir com a turma e a ordem pela qual elas podem ser apresentadas, considerando os conhecimentos prévios e as aprendizagens que os alunos devem fazer.

### **O estudo de aula**

Selecionar ou elaborar tarefas e planejar detalhadamente a sua condução, pensando nas intervenções que podem fazer para apoiar os alunos e como podem conduzir a discussão coletiva, é parte do trabalho dos professores num EA. Originário do Japão, o EA é um processo de desenvolvimento profissional em que os participantes planeiam colaborativamente uma aula, a aula de investigação, para ajudar os alunos a ultrapassar um problema de aprendizagem que identificaram. Partindo desse problema, os professores estudam materiais curriculares ou provenientes da investigação (*kyozaikenkyu*), onde se inclui a análise de tarefas, considerando o conhecimento matemático e didático e o conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem (Fujii, 2016; Lewis et al., 2019). De seguida, elaboram a tarefa, pensando na redação das questões, nas representações a usar e nas estratégias e representações que os alunos podem usar, considerando os conhecimentos que eles devem ter e os que devem adquirir (Fujii, 2016). Esse trabalho cria oportunidades para os professores repensarem as tarefas que propõem, como concluíram Quaresma e Ponte (2016) ao analisarem aprendizagens de uma professora num EA. Esta referiu que, com base no trabalho desenvolvido no EA, passou a dar mais atenção à seleção de tarefas que podem ser resolvidas usando várias estratégias. Ní Shúilleabháin (2018) também refere que a participação dos professores em quatro EA, no mesmo ano letivo, levou-os a ficarem mais confiantes para selecionarem tarefas mais desafiantes e para anteciparem, de modo mais aprofundado, possíveis dificuldades dos alunos.

A antecipação de estratégias e dificuldades influencia também a condução da realização da tarefa e da discussão coletiva, pois os professores pensam em formas de ajudar os alunos a ultrapassar possíveis dificuldades e discutem como orquestrar as respostas para ir ao encontro dos objetivos da aula (Fujii, 2016; Inoue, 2011). Assim, o EA cria oportunidades para os professores repensarem a comunicação em sala de aula, discutindo as intervenções que podem fazer para apoiar os alunos sem diminuir o desafio da tarefa e encorajando a participação deles, dando-lhes cada vez mais oportunidades para explicarem as suas ideias ou para fazerem perguntas uns aos outros (Ní Shúilleabháin, 2018; Olson et al., 2011; Quaresma e Ponte, 2016).

A aula é depois conduzida por um dos professores, enquanto os outros observam focando-se no trabalho dos alunos. Com base nessas observações, os professores reúnem novamente para discutirem o trabalho e as aprendizagens dos alunos e para introduzirem alterações na tarefa ou no plano de aula, se necessário. Alguns autores (como, por exemplo, Fujii, 2016) consideram ainda uma outra fase do EA, onde os professores partilham o seu trabalho e as aprendizagens que fizeram.

## METODOLOGIA

### **Participante**

Neste artigo apresentamos um estudo de caso de Luz, uma professora que participou em dois EA, conduzidos na sua escola. Luz lecionava Matemática a alunos do ensino secundário (15-18 anos) e tinha mais de 25 anos de experiência de ensino. Ambos os EA foram conduzidos pela primeira autora deste artigo (investigadora). Luz e mais duas professoras disponibilizaram-se para participar nos EA, depois de terem trabalhado colaborativamente, a convite da investigadora, no planeamento, observação e reflexão sobre aulas quando lecionavam Matemática a alunos do 10.º ano, em 2018/2019. Antes disso, Luz tinha participado em outros processos formativos onde analisou e elaborou tarefas e pensou nos materiais que podia usar, mas não planeou aulas nem as observou ou refletiu sobre elas.

### **Os estudos de aula e a prática letiva posterior**

O primeiro EA (EA1) decorreu entre novembro de 2019 e fevereiro de 2020 e teve 19 sessões. Além de Luz, participaram outras duas professoras (B e S), que lecionavam Matemática A a turmas do 11.º ano (alunos com 16-17 anos) e planearam aulas no tema “Funções reais de variável real”. Depois da primeira aula de investigação, conduzida por B e S nas suas turmas, as três professoras planearam uma nova aula (Tabela 1). Entre setembro e novembro de 2020, S e Luz participaram num segundo EA (EA2) que teve 12 sessões. Planearam aulas para o tema “Probabilidades”, conduzidas por cada uma delas nas suas turmas, com alunos do 12.º ano (Tabela 1). Numa primeira aula, os alunos resolveram a tarefa e enviaram fotografia da sua resposta às professoras e a discussão coletiva aconteceu na aula seguinte.

Nos EA, as professoras decidiram dar atenção à comunicação matemática, considerando as discussões no seu grupo curricular sobre as tarefas a propor e o feedback a dar aos alunos para desenvolver essa capacidade transversal ao currículo. Assim, nas primeiras sessões de cada EA, a investigadora propôs a análise de artigos sobre comunicação e práticas dos professores em aulas em que são valorizadas as discussões coletivas. Durante as sessões dos EA, prestou-se também particular atenção à elaboração de tarefas e às possíveis ações do professor em diferentes momentos da aula. Discutiui-se uma possível organização das aulas em três fases, com base em Ponte (2005) e Stein et al. (2008). Deu-se também atenção às sugestões dos autores para preparar a discussão coletiva. As professoras foram, então, desafiadas pela investigadora a planejar aulas que começam pelo lançamento da tarefa e terminam com uma discussão coletiva e síntese, partindo do trabalho dos alunos na tarefa proposta pelo professor. Luz não estava familiarizada com aulas com essa organização.

Tabela 1  
*Aulas Observadas Durante e Depois dos EA*

Ano letivo (ano de escolaridade) e tópico	EA1		EA2	Aula observada após os EA
	Aula de investigação 1	Aula de investigação 2	Aula de investigação	
2019/2020 (11.º ano) <i>Tópico:</i> estudo do sinal de funções racionais, dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , em que $P$ e $Q$ são polinómios	B e S			
2019/2020 (11.º ano) <i>Tópico:</i> resolver problemas envolvendo a determinação de intervalos de monotonia e extremos de funções reais de variável real aplicando o conceito de derivada	B, S e Luz			
2020/2021 (12.º ano) <i>Tópico:</i> resolver problemas envolvendo probabilidade condicionada			S e Luz	
2021/2022 (10.º ano) <i>Tópico:</i> relação entre o gráfico de uma função $f$ e os gráficos das funções $f(x) + d$ , $f(x + c)$ , $af(x)$ , $f(bx)$ , com $a$ , $b$ , $c$ e $d$ números reais e $a$ e $b$ não nulos.				Luz

*Nota.* Os nomes das professoras aparecem pela ordem em que conduziram a aula de investigação.

Quando planearam as aulas, as professoras elaboraram tarefas, pensaram em dificuldades possíveis dos alunos e em formas de os apoiar, anteciparam representações e estratégias que os alunos podiam usar e discutiram as que deveriam selecionar, como as ordenar e que conexões estabelecer entre elas, como sugerem Stein et al. (2008). Discutiram ainda se deveriam convidar alunos com respostas incorretas. No EA2, devido à pandemia, as professoras não podiam circular para acompanhar o trabalho dos alunos. Assim, numa primeira aula, pediram aos alunos para lhes enviarem fotografias das estratégias e representações que usaram, sendo a discussão coletiva conduzida na aula seguinte. Entre o trabalho dos alunos e a discussão coletiva, as professoras reuniram para preparar a discussão a partir das respostas dos alunos, discutindo as que deveriam selecionar, como as ordenar, que conexões poderiam estabelecer e que intervenções e ações poderiam fazer durante a discussão. Depois de cada aula, as professoras refletiram sobre o trabalho e as explicações dos alunos e discutiram possíveis alterações à tarefa ou ao plano de aula. Após os EA, as professoras apresentaram o seu trabalho

a colegas da sua escola (EA1) ou de outras escolas (EA2). Esta etapa foi preparada pelas professoras, apoiadas pela investigadora.

Procurando perceber a influência desse trabalho na prática letiva, a investigadora observou uma aula de Luz após os EA, numa data previamente combinada, no domínio “Funções reais de variável real” (Tabela 1). Antes e depois da aula, a investigadora reuniu com a professora para discutir como ela a planeou e para refletir sobre o trabalho dos alunos.

### **Recolha e análise de dados**

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994). A recolha de dados foi feita por observação com gravação áudio das sessões dos EA, das entrevistas semiestruturadas depois de cada EA. Incluiu também gravação vídeo de aulas, durante e após os EA e recolha documental (tarefas e planos de aula). Foram pedidas as devidas autorizações para a recolha de dados e todos os nomes são pseudónimos.

Considerando o objetivo deste artigo, selecionámos momentos das sessões dos EA (SxEAy), das entrevistas semiestruturadas e das conversas antes e depois da aula de Luz após os EA. Selecionámos também momentos das discussões coletivas conduzidas por Luz durante e após os EA, a partir das gravações vídeo (GV), procurando compreender como levou à prática o conhecimento que terá desenvolvido nos EA.

Tabela 2

#### *Subcategorias da Elaboração/Seleção/Adaptação de Tarefas*

Subcategoria	Descrição
Incluir questões com diferentes graus de desafio	Inclui questões com vários graus de desafio e permite aos alunos resolvê-la a partir dos seus conhecimentos prévios e ampliarem os seus conhecimentos matemáticos
Incluir/solicitar o uso de diferentes representações	Inclui mais do que uma representação ou solicita aos alunos que usem mais do que uma
Permitir diferentes estratégias ou representações	Pode ser resolvida usando mais do que uma representação ou seguindo mais do que uma estratégia

A análise de dados foi informada pelo quadro teórico, com foco na elaboração/seleção/adaptação de tarefas e na condução de discussões coletivas, e foi refinada de acordo com os dados. A Tabela 2 indica características de tarefas que podem dar origem a discussões coletivas interessantes: incluir questões com vários graus de desafio, para que todos os alunos possam resolver pelo menos algumas delas; e incluir ou solicitar o uso de diferentes representações ou permitir diferentes estratégias ou representações, para que os alunos possam usar diferentes representações e/ou estabelecer conexões entre elas. As subcategorias da tabela

foram usadas para analisar as discussões sobre a elaboração/seleção/adaptação de tarefas, nas sessões dos EA e na conversa antes da aula observada após os EA. Quando essas conversas foram sobre a preparação de discussões coletivas, analisámos as representações que as professoras anteciparam (EA1) ou que os alunos usaram (EA2).

Na análise das discussões coletivas e de momentos das conversas depois da aula observada após os EA e das entrevistas onde é referida a condução dessas discussões, usámos as subcategorias da Tabela 3. Essas subcategorias incluem um conjunto de ações e de práticas que os professores podem usar para conduzir discussões coletivas.

Tabela 3

*Subcategorias da Condução de Discussões Coletivas*

Subcategoria	Descrição	Exemplo
Convidar a participar	Convidar um aluno (ou grupo) a partilhar a sua resposta, ainda que elas não estejam corretas/completas	Em termos de gráfico, o que é que aconteceu? Ricardo, diga lá. (aula observada após os EA)
	Convidar outros alunos a intervir/reagir	Todos concordam? (aula observada após os EA)
Guiar/incentivar a participação	Incentivar o(s) aluno(s) a continuar a participar	Então o que é que teríamos aqui de alterar? ( aula de investigação 2, EA1)
	Pedir a um aluno para justificar o que disse	E quando é que fica contraída e quando é que fica dilatada? (aula observada após os EA)
Desafiar os alunos	Desafiar os alunos a ir além da tarefa	E aqui não temos nenhum valor negativo... e se tivéssemos? (aula observada após os EA)
Redizer/reformular afirmações	Reformular o que um aluno disse ou pedir-lhe para clarificar	Portanto, do enunciado podemos determinar a interseção e estes 50% vinham da probabilidade condicionada, não é? (aula de investigação, EA2)
	Destacar aspetos importantes da resposta para a turma	É conveniente identificar bem os acontecimentos ... e depois a interpretação do enunciado. (aula de investigação, EA2)

Tabela 3

*Subcategorias da Condução de Discussões Coletivas*

Subcategoria	Descrição	Exemplo
Estabelecer conexões	Comparar ou ajudar os alunos a comparar diferentes representações/estratégias, considerando a sua eficácia para outras tarefas	Através do gráfico podemos tirar aqui algumas relações. E temos ali uma explicação a partir do gráfico. Também podemos analisar aqui a tabela, como fizeram ali em texto... A função tem este extremo porquê? (aula de investigação 2, EA1)
	Estabelece conexões entre as respostas dos alunos e ideias matemáticas importantes/objetivos da aula	Esta tabela sintetiza a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função. Uma tabela arruma melhor as nossas ideias. (aula de investigação 2, EA1)

Em convidar a participar, considerámos intervenções em que a professora convidou um aluno, um grupo de alunos ou a turma a partilhar as suas respostas, mesmo que estejam incorretas/incompletas, ou convidou outros alunos a intervir/reagir, considerando que esse convite poderia levar à emergência de desacordos ou à apresentação de respostas alternativas. Quanto a desafiar os alunos, considerámos intervenções em que a professora os desafiou a pensar e explicar aspetos em que não pensaram quando trabalharam na tarefa. Embora pedir justificações possa desafiar os alunos a ir além do que fizeram, considerámos que esses pedidos foram usados para conduzir os alunos a apresentar informação ou incentivá-los a continuar a participar, pelo que incluímos essas intervenções na subcategoria guiar/incentivar a participação. Na subcategoria redizer/reformular afirmações incluímos intervenções em que professora procurou que as explicações dos alunos ficassem claras, reformulando ou pedindo aos alunos para clarificarem as suas explicações, ou destacando, para a turma, aspetos das respostas que considerou importantes. Em estabelecer conexões considerámos momentos em que a professora estabeleceu conexões entre as respostas dos alunos e ideias matemáticas importantes ou objetivos da aula, mas também momentos em foram comparadas diferentes representações, considerando a sua eficácia para resolver outras tarefas.

## RESULTADOS

### **Escrever a representação algébrica e partir das representações algébrica e gráfica**

#### *A tarefa*

Para a aula de investigação AI2 (EA1), as professoras elaboraram uma tarefa que envolvia a construção de caixas sem tampa, cortando quadrados de lado  $x$ , um em cada canto de uma folha de papel. Partindo de uma representação algébrica da função  $V$ , que relacionava a medida da altura da caixa com o seu volume, e da sua função derivada,  $V'$ , e a partir da representação gráfica dessas duas funções, os alunos deviam estabelecer uma relação entre a monotonia de  $V$  e o sinal de  $V'$ . Considerando que era importante os alunos usarem uma tabela para estabelecerem essa relação, Luz trouxe para a S10 o enunciado de uma tarefa que propôs em anos anteriores. Quando o analisaram, as professoras consideraram que, embora solicitasse o uso de diferentes representações, essa tarefa estava demasiado orientada porque os alunos só tinham de completar espaços e as conclusões já estavam escritas no enunciado. Partindo da proposta de Luz, a discussão continuou: deveriam, ou não, dar aos alunos uma tabela para completarem? Luz achava que sim, considerando os objetivos da aula e conteúdos que iriam trabalhar no 12.º ano: “[a tabela] também é importante ... [ao trabalhar] com a concavidade e [com] os pontos de inflexão” (S10EA1). Outra professora discordou porque incluir uma tabela iria diminuir o desafio da tarefa, mas Luz reforçou que “deve de haver algo que sistematize [as aprendizagens]” (S10EA1).

Para não uniformizarem as representações que poderiam surgir, as professoras decidiram não incluir uma tabela no enunciado, mas, se os alunos não a usassem, elas iriam introduzi-la na discussão, por considerarem que seria a representação mais eficaz para este tipo de tarefas. No fim, para promover a generalização, incluíram uma questão onde os alunos tinham de identificar a veracidade ou falsidade de afirmações matemáticas escritas num misto de linguagem natural e simbólica.

Este trabalho trouxe a Luz um novo olhar para a elaboração de tarefas para promover a aprendizagem dos alunos e enriquecer a discussão coletiva: incluir questões com vários graus de desafio, desde a aplicação de regras de derivação a uma conjectura sobre a relação entre o sinal de  $V'$  e a monotonia de  $V$  e à generalização; solicitar o uso de diferentes representações (algébrica e gráfica); e permitir o uso de diferentes representações, como o uso de linguagem natural e simbólica ou de uma tabela.

#### *A discussão coletiva*

*Planear.* Ao planear a discussão coletiva no EA1, as professoras discutiram as aprendizagens que os alunos podem fazer quando apresentam e explicam a forma como pensam. Discutiram também como apoiar os alunos durante o trabalho

autônomo, para não limitarem as representações e estratégias que eles podiam usar. Sobre a seleção dos alunos que seriam chamados a explicar as suas estratégias, uma professora perguntou se deveriam escolher um de cada grupo: “É suposto nós ... escolhermos um [aluno] de cada [grupo] ... mas pedirmos a eles [alunos] para apresentarem, é isso?” (B, S5EA1). Outra professora perguntou: “vamos também apresentar as soluções erradas?” (S, S5EA1).

Retomando artigos analisados nas sessões anteriores, as incertezas das professoras foram o ponto de partida para discutirem a importância de o professor perceber as estratégias e representações que os alunos usam, para decidir as que será mais interessante selecionar e como as pode ordenar. Retomando as intervenções das colegas, Luz afirmou: “Têm é que ir [alunos com] resoluções diferentes... por exemplo, a resolução gráfica e a tabela” (S5EA1). Quanto à exploração de respostas incorretas/incompletas, as professoras decidiram pedir aos alunos que explicassem como pensaram para ajudar outros alunos a não cometerem os mesmos erros ou a completarem as suas respostas.

*Conduzir.* Nas aulas que observou, Luz pôde ver como as outras professoras convidaram ou pediram justificações aos alunos e como compararam diferentes representações, apontando a tabela como a representação mais eficaz para outras tarefas. Depois da aula, Luz referiu: “percebeu-se bem o que eles disseram, sim. E eles viram que podiam ir por dois caminhos” (reflexão pós-aula).

Na aula que conduziu, Luz convidou alunos que usaram a linguagem natural e simbólica e tabelas, como planejaram. Contudo, foi Luz quem explicou as respostas escritas pelos alunos no quadro. Depois, comparou as diferentes representações dos alunos:

*Luz:* Através do gráfico podemos tirar aqui algumas relações. E temos ali uma explicação a partir do gráfico [Figura 1]. Também podemos analisar aqui a tabela [Figura 2], como fizeram ali em texto: quando a derivada for positiva, a função cresce; quando a derivada for negativa, a função decresce. Também podemos tirar uma conclusão desta coluna [aponta para a coluna  $x = 3$ ]. A função tem este extremo porquê?

*Vasco:* Porque a derivada era zero.

*Luz:* Relativamente ao sinal da derivada, o que é que aconteceu? [silêncio]  
Eu posso dizer que tenho um extremo quando a derivada muda de sinal?

*Vários alunos:* Sim.

*Luz:* Vamos ver aqui [aponta para a coluna  $x = \frac{28}{3}$ ]. A função tem um extremo porque a derivada mudou de sinal?

*Vários alunos:* Sim.

*Luz:* Esta tabela sintetiza a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função. Uma tabela arruma melhor as nossas ideias. Já as usávamos para estudar os sinais [de funções] agora é acrescentar informação sobre o sinal da derivada e tirar conclusões. (GV, aula de investigação 2, EA1).

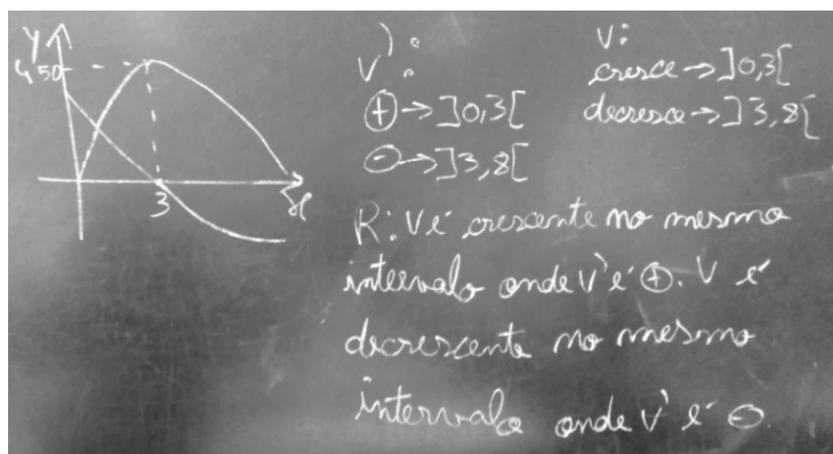


Figura 1. Resposta do Grupo X, no Quadro, Usando Linguagem Simbólica e Natural.

	$-\infty$	$0$	$3$	$\frac{28}{3}$	$+$	$+\infty$
$v$ monotonia		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	
sinais da derivada		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
maximos minimos de $v$			max	min		

Figura 2. Resposta do Grupo Y Usando uma Tabela

Embora centrasse a atenção na tabela, Luz procurou estabelecer conexões entre as representações dos alunos e conhecimentos que eles deveriam adquirir. Contudo, foi a professora quem deu as explicações e os alunos apenas responderam “sim” ou “porque a derivada era zero” às questões da professora. Na sequência, Luz retomou a tabela (Figura 2) porque a resposta estava incompleta:

*Luz:* Esta tabela está bem [no contexto do problema]?

*Frederico:* Não. ... [A tabela] está de  $-\infty$  a  $+\infty$  e o problema é só de 0 a 8 aberto.

*Luz:* Então o que é que teríamos aqui de alterar?

*Frederico:* O 0 e 8, em vez do  $-\infty$  e do  $+\infty$ .

*Luz:* [A professora altera a tabela] Então o meu volume era máximo quando o  $x$  era 3, certo? (GV, aula de investigação 2, EA1)

Desta forma, em vez de dizer como completar a resposta, Luz convidou outros alunos a intervir/reagir e incentivou-os a continuar a participar, como discutiram no EA, ajudando-os a perceber que, nesta e em outras tarefas, teriam de considerar sempre o domínio da função.

Contudo, preparar a condução de discussões coletivas a partir dos artigos que analisaram e das questões que emergiram nas sessões de planeamento e observar aulas em que as outras professoras convidaram alunos que usaram diferentes representações e lhes pediram explicações não foi suficiente para Luz dar voz aos alunos. É possível que Luz tenha associado essas práticas a uma abordagem de ensino em que o professor propõe tarefas aos alunos e suscita sua participação, mas as questões que lhes coloca não dão um papel central às ideias dos alunos.

Ao refletir sobre a forma como conduziu a discussão coletiva, Luz mostrou preocupação com a clareza e correção matemática das explicações: “se calhar pela correção da matemática, de dizer as coisas ... É que eles [os alunos] dizem no português deles, não é?” (entrevista). A investigadora recordou então um episódio partilhado pela professora, em que os alunos compreenderam mais facilmente as explicações dos colegas do que as suas:

*Ah! Isso foi nas sucessões. Eu estava ali no quadro cheia de explicações, mas estava com a sensação que ... aquilo não estava a entrar. Houve um [aluno] que disse: “Professora, eu posso ir ao quadro?” E eu: “Com certeza”. Lá foi... lá no português deles... e os outros: “Ah Professora! É isso? Ah! Então já está... já percebi” (Luz, entrevista).*

E acrescentou: “Quando queremos ser nós [a explicar] ... é [como] por a pontuação no sítio certo” (entrevista). Assim, a preocupação da professora com a correção matemática do discurso terá influenciado a forma como conduziu a discussão e, talvez por isso, não tenha dado um papel mais ativo aos alunos durante essa discussão.

## **Partir da representação verbal**

### *A tarefa*

Para a aula de investigação AI1 do EA2, as professoras selecionaram uma tarefa, formulada em linguagem natural e que tinha um gráfico circular. Cada um dos setores do gráfico correspondia a reservas efetuadas numa de quatro plataformas online. Os alunos tinham a seguinte informação: o setor de menor amplitude ( $45^\circ$ ) correspondia a reservas na plataforma A; para as reservas na plataforma A, o alojamento é classificado como Muito Bom (MB) em metade dos casos; para

reservas não efetuadas na plataforma A, o alojamento é classificado como MB em um de cada sete casos; e escolheu-se, ao acaso, um alojamento classificado como MB. Os alunos tinham a probabilidade desse alojamento ter sido reservado na plataforma A.

Considerando o trabalho que queriam que os alunos fizessem, as professoras analisaram e resolveram a tarefa e decidiram não a alterar, pois incluía diferentes representações (gráfica e verbal) e os alunos podiam usar diferentes estratégias ou representações: verbal, recorrendo a linguagem simbólica; algébrica, apoiando-se em propriedades das probabilidades; diagrama em árvore; ou uma tabela.

#### *A discussão coletiva*

*Planear.* A discussão foi planeada a partir das estratégias e representações dos alunos. Quando as analisaram, uma das professoras referiu que a maioria dos alunos usou uma tabela, ao que Luz respondeu: “Se calhar, por influência minha. ... Em aula ... faço de uma forma [usando uma tabela] e de outra [usando um diagrama em árvore], mas tenho mais tendência... para uma [tabela] do que outra [diagrama em árvore]” (S8EA2).

Planear a discussão a partir de respostas dos alunos potenciou, assim, a reflexão de Luz sobre a sua prática, nomeadamente sobre a influência que as representações mais usadas pelo professor podem ter no trabalho dos alunos. A outra professora referiu que os alunos podem ter preferência por uma dada representação, mas é importante que trabalhem com diferentes representações para poderem escolher a mais eficaz para resolver a tarefa.

Selecionadas as respostas dos seus alunos, a professora S questionou as colegas sobre as perguntas que lhes poderia fazer depois de explicarem as suas respostas. Com base nesta intervenção, as professoras discutiram possíveis ações dos professores na condução de discussões coletivas, como explorar desacordos ou pedir a outros alunos para intervirem. Depois, analisaram as respostas dos alunos de Luz que sugeriu começar com uma aluna que usou uma tabela e um misto de linguagem natural e simbólica, seguindo-se um aluno que usou um diagrama em árvore (Figura 3) e, por fim, outro que usou uma tabela e linguagem simbólica, como planearam para a aula conduzida por S.

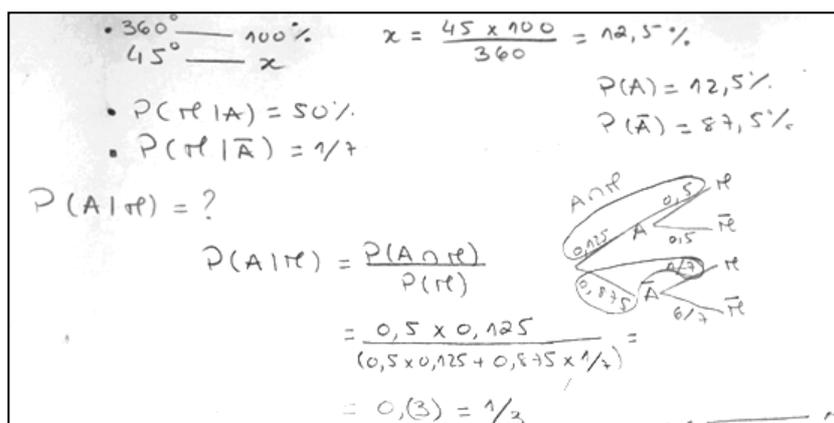


Figura 3. Resposta de um Aluno Usando um Diagrama em Árvore

*Conduzir.* Quando Luz observou a aula da colega, viu como ela reformulou as ideias dos alunos para destacar aspectos que considerou importantes, como lhes pediu justificações ou como estabeleceu conexões e discutiu com os alunos as representações que poderiam ser mais eficazes em outras tarefas. Ao refletir sobre a discussão coletiva, Luz referiu: “eles [os alunos] podem ver as várias [estratégias] e ver qual é que entendem melhor, não é?”

Quando conduziu a discussão, Luz convidou um aluno que usou um diagrama em árvore, como planejaram:

*Luz:* O Ricardo não usou uma tabela, mas usou um diagrama em árvore. Ricardo, diga lá.

*Ricardo:* Primeiro vi a percentagem dos 45 graus que eram os tais 12,5% que era a probabilidade do acontecimento A. Portanto, a probabilidade de não acontecer A era 87,5. Depois nós sabíamos que  $P(M|A)$  era 50%,  $P(M|\bar{A})$  era um  $\frac{1}{7}$  e depois escolhi fazer a árvore porque daí dava para ver a interseção das duas, de  $A \cap M$  e de  $\bar{A} \cap M$ . Depois  $P(M|A)$ ... fiz a fórmula e depois era só fazer as multiplicações e divisão. Portanto, a probabilidade da interseção de A com M ficava em cima e ...

*Luz:* Portanto, do enunciado podemos determinar a interseção [aponta para  $A \cap M$  no diagrama em árvore] e estes 50% vinham da probabilidade condicionada, não é?

*Ricardo:* E aí temos o  $\frac{1}{7}$  que está em baixo. A probabilidade dos muito bons é a soma desses [valores] que eu assinei.

*Luz:* Muito bem. É outra possibilidade de resolução ... [Não] está referido o que é o acontecimento A para si. É conveniente identificar bem os acontecimentos ... escrever o que nos pedem ... e depois a interpretação do enunciado. (GV, aula de investigação, AIEA2)

Durante a explicação, a professora reformulou a afirmação do aluno para a tornar mais clara. Depois, referiu que a resposta estava incompleta, mas não perguntou

ao aluno, ou a outros alunos, como a poderia completar. Ainda que não tenha explicitamente estabelecido conexões entre as diferentes representações, a professora referiu as representações que os alunos usaram: “O Ricardo não usou uma tabela, mas usou um diagrama em árvore... a Dina só usou as propriedades das probabilidades ... a Carolina tem uma resolução sem o uso da fórmula da probabilidade condicionada” (GV, aula de investigação, EA2). Para terminar, a professora destacou aspetos que considerou importantes para resolver esta e outras tarefas com probabilidade condicionada. Embora a maioria dos diálogos fosse sobretudo entre a professora e os alunos, o que não aconteceu na aula que observou, Luz deu-lhes voz para apresentarem e explicarem as suas respostas, o que não fez no EA1.

Ao refletir sobre a aula, Luz referiu:

*“Ah! Este fez tabela, aquele fez árvore...”. Mostrar várias maneiras de fazer e depois salientar pequenos pormenores para uma próxima tarefa: “Isto está bem, mas convém acrescentar...” Eu acho que são dois momentos: um é selecionarmos várias respostas para eles verem ... e outro momento para ressaltar pequenos pormenores: correção da escrita, informação que falta... (reflexão pós-aula)*

Tal como no EA1, a professora apontou momentos em que o professor intervém na discussão para destacar aspetos importantes “para uma próxima tarefa”, como a “correção da escrita, informação que falta...”. Contudo, apontou a discussão coletiva como um momento em que os alunos têm oportunidade de explicar e ver diferentes formas de resolver a tarefa.

## **Partir de uma representação gráfica**

### *A tarefa*

Para a aula observada após os EA, Luz selecionou uma tarefa (Figura 4) que incluía várias representações.

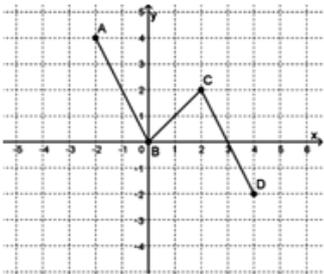
Para resolver a tarefa, os alunos teriam de estabelecer conexões entre diferentes representações: a partir do gráfico de uma função  $f$ , desenhavam vários gráficos, apoiando-se no preenchimento de tabelas dadas no enunciado. Tinham também de identificar o tipo de transformação e, no fim, para promover a generalização, os alunos deviam identificar a influência do parâmetro  $k$  na transformação do gráfico da função  $f: f(x) + k$  e  $f(x + k)$ , sendo  $k$  um número real, e  $kf(x)$  e  $f(kx)$ , sendo  $k$  um número real positivo. Esta tarefa incluía também questões com diferentes graus de desafio: as translações deveriam ser as transformações mais fáceis de identificar, ao contrário das contrações/dilatações verticais/horizontais. A generalização com base em casos particulares também deveria ser desafiante para vários alunos.

As professoras tinham elaborado e proposto essa tarefa em anos anteriores e Luz decidiu propô-la novamente, valorizando as aprendizagens que os alunos fizeram nessa altura:

*É quase imediato eles dizerem “para a esquerda, para a direita” ou “sobe, ou desce” que é a linguagem mais fácil de usar ... Os alunos sabem bem aqueles conteúdos ... Quando estivemos a trabalhar com as funções trigonométricas e as exponenciais, eles sabiam (preparação da aula observada após os EA).*

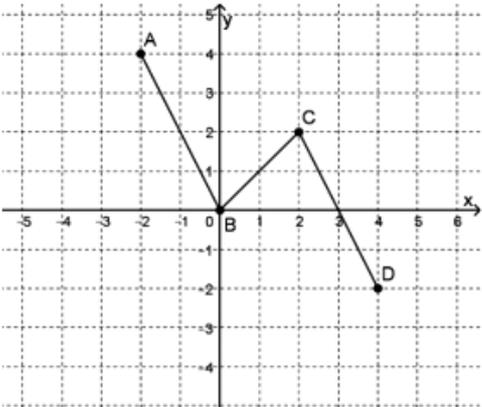
A partir da representação gráfica de  $f$  preenche cada uma das tabelas abaixo e representa graficamente as funções  $g, h, i, j, k$  e  $l$ , tendo em conta as transformações que ocorrem nos pontos  $A, B, C$  e  $D$ .

Para cada uma das funções  $g, h, i, j, k$  e  $l$ , indica o domínio, o contradomínio e os zeros.



**a)  $g(x) = f(x) - 1$**

Pontos	$x$	$f(x)$	$g(x)$
$A$			
$B$			
$C$			
$D$			



**b)  $h(x) = f(x + 1)$**

		Função $f$		Função $h$	
Pontos	Objeto $x$	$f(x)$	$ \text{Objeto}  + 1$	$h(x) = f(x + 1)$	
$A$	-2	4	$ -3  + 1 = -2$	$h(-3) = \frac{4}{f(-2)}$	
$B$					
$C$					
$D$					

O ponto  $A'(-3, 4)$  pertence ao gráfico de  $h$

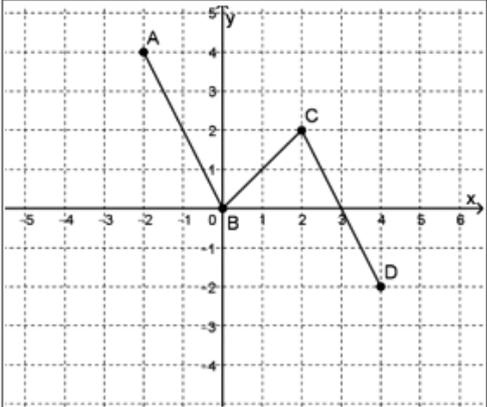


Figura 4. (Parte da) Tarefa Seleccionada por Luz

O facto de os alunos terem resolvido corretamente outras tarefas envolvendo transformações nos gráficos de outras funções foi outro aspeto destacado pela professora.

*A discussão coletiva*

*Planear.* Como já tinha observado e refletido sobre o trabalho dos alunos, Luz antecipou que teriam mais dificuldade em identificar as contrações/dilatações e pensou como podia apoiá-los:

*O professor tem um papel fundamental ... pois pode promover a reformulação do pensamento através de outras questões, como fizemos antes [planificação das aulas de investigação]. ... O que é que podemos dizer? ... o que dá para perceber é que a imagem é sempre a mesma. “Para as funções serem iguais... que objeto é que temos de considerar?” ... Se pusessemos mais um exemplo [na questão b], talvez os ajudasse. (preparação da aula observada após os EA)*

Com esta intervenção, a professora apoiaria os alunos sem diminuir o desafio da tarefa, como discutiram nos EA. Depois, iria convidar os alunos a explicar como pensaram.

*Conduzir.* A professora começou a discussão com um convite aos alunos:

*Luz:* A nova função  $g$  foi obtida a partir da função  $f$ . Em termos de gráfico, o que é que aconteceu? Ricardo, diga lá.

*Ricardo:* Deslocou-se para baixo.... Porque o sinal é negativo. Se fosse positivo, era para cima. ...

*Luz:* Então, já podemos tirar esta conclusão: se ali fosse +1, por exemplo [ $f(x) + 1$ ], dizíamos o quê?

*Ricardo:* Tinha havido uma deslocação para cima.

*Luz:* Todos concordam?

*Ricardo:* Em relação ao eixo dos  $yy$

*Luz:* É o mesmo que dizer o quê?

*Mariana:* Temos uma translação em relação aos  $yy$

*Luz:* Translação segundo o eixo dos  $yy$ , é isto?

*Ricardo:* Sim.

*Luz:* Podemos dizer que é uma translação associada a que vetor?

*Luís:*  $(0, -1)$

*Luz:* E se fosse neste caso [aponta para  $f(x) + 1$ , no quadro]?

*Ricardo:* Era  $(0,1)$

...

*Luz:* Muito bem! Já vimos aqui situações em que a função se desloca “para cima” ou “para baixo”... (GV, aula observada após os EA)

A professora conduziu os alunos, controlando as ideias que estavam a ser discutidas, com perguntas que tinham apenas uma resposta correta. Contudo, partindo da resposta de Ricardo, Luz desafiou os alunos a ir além da tarefa (“se ali fosse +1 ... dizíamos o quê?”), levando-os a identificar situações em que o gráfico de uma função é a imagem de outro pela translação de vetor  $\vec{u} = (0, c)$ , sendo  $c$  um número real.

Quando discutiram uma questão que envolvia a imagem do gráfico de  $f$  pela contração vertical de coeficiente  $a$ ,  $0 < a < 1$ , a professora convidou os alunos a participar e pediu-lhes que justificassem a resposta:

*Luz:* O que descobriram?

*João:* Há uma contração vertical. Aqui  $i(x) = \frac{1}{2} f(x)$ ,  $y$ , a imagem, é influenciada por  $k$ , de forma que a função fica dilatada ou contraída, pelo coeficiente  $k$ .

*Luz:* E quando é que fica contraída e quando é que fica dilatada? O que é que descobriram?

*João:* Dilata quando  $[k]$  assumir um valor acima de 1 e contrai se assumir um valor abaixo de 1.

*Luz:* E aqui não temos nenhum valor negativo... e se tivéssemos? ...

*André:* Dava uma simetria em relação ao eixo dos  $xx$ ...

*João:* E depois, conforme o valor de  $k$ , também contraía...

*Vários alunos:* Ou dilatava.

*Luz:* Muito bem! (GV, aula observada após os EA)

Como aconteceu quando discutiram a transformação que deu origem ao gráfico de  $g$ , Luz partiu das explicações dos alunos para os desafiar a irem além das questões da tarefa (“e se tivéssemos?”) e eles conseguiram responder corretamente aos desafios da professora. Ademais, vários alunos participaram na discussão, tanto para responder a perguntas, como Ricardo ou Mariana, como para complementar as explicações dos colegas, como João, o que não aconteceu nos EA. Embora a professora não tenha explicitamente estabelecido conexões entre as respostas dos alunos, a investigadora observou como eles conseguiram fazer a transformação entre diferentes modos de representação: algébrica, gráfica e tabelar.

Ao refletir sobre a aula que conduziu, Luz referiu que, na discussão coletiva, os alunos podem ver várias estratégias e representações e selecionar a que preferem: “Podem ver várias [resoluções] e com qual é que se entendem melhor, não é? Com a discussão coletiva pretendemos a partilha de diferentes estratégias de resolução para identificar as suas semelhanças, potencialidades e mais-valias” (entrevista).

Embora nas aulas que a investigadora observou, a professora não identificasse explicitamente as “semelhanças, potencialidades e mais-valias” das representações

e estratégias dos alunos, Luz referiu claramente que o objetivo da discussão vai além da “partilha de diferentes estratégias”. Outro aspeto que apontou foi a organização das aulas planeadas:

*Um dos pontos fundamentais que retirei do nosso trabalho foi o modo como deveríamos organizar as aulas e como deveria ser a condução da comunicação. ... Dar espaço aos alunos para pensar, discutir em pequeno grupo e apresentar respostas é apelar ao seu raciocínio e à comunicação, sendo esta oral ou escrita, matematicamente falando ou não. (entrevista)*

Ainda que mostrasse preocupação com a correção matemática das explicações, Luz referiu que participar nos EA lhe trouxe um novo olhar para a organização do trabalho dos alunos e destacou a importância de os ouvir para promover a comunicação matemática.

## DISCUSSÃO

Neste artigo analisamos a prática de uma professora durante e após dois EA, dando especial atenção à elaboração/seleção de tarefas e à condução de discussões coletivas. Em outros processos formativos e na sua prática, Luz já tinha elaborado tarefas que incluíam ou solicitavam o uso de diferentes representações. Embora partilhasse uma delas no EA1, a sua incerteza sobre as representações a incluir e a preocupação com as representações que os alunos podiam usar originaram importantes discussões acerca do grau de desafio das tarefas e das representações a incluir. Luz percebeu que as tarefas podem solicitar o uso de diferentes representações, sem limitar as representações que os alunos podem usar. Percebeu também que as representações que usa na sua prática influenciam as que os alunos usam.

Ao encontro do que aponta a investigação acerca da elaboração e condução de tarefas (Fujii, 2016; Ponte, 2005), na aula que lecionou depois dos EA, Luz propôs uma tarefa que incluía questões com diferentes graus de desafio e diferentes representações, como já tinha feito nos EA. Tal como na aula de investigação 2, esta tarefa permitia aos alunos fazerem conjecturas com base na análise de funções, usando várias representações e fazendo transformações entre diferentes modos de representação. Embora seja desafiante para o professor antecipar respostas dos alunos (Inoue, 2011) e planear a aula em torno do trabalho, das dificuldades e das aprendizagens destes (Lewis et al., 2019), para esta aula, Luz não só antecipou possíveis dificuldades como pensou em formas de apoiar os alunos sem diminuir o desafio da tarefa. Assim, participar em vários EA contribuiu para Luz se sentir confiante para propor e conduzir a realização de tarefas onde os alunos usam diferentes representações e, como referem Inoue (2011), Ní Shúilleabháin (2018) e Olson et al. (2011), ilustra a importância de o professor ter várias oportunidades para observar e refletir sobre o trabalho dos alunos e sobre a sua prática.

Mais desafiante foi a condução de discussões coletivas. Nos EA, Luz e as colegas discutiram sobre como selecionar os alunos que iriam apresentar as suas respostas e possíveis ações do professor na condução de discussões coletivas. Esse trabalho foi feito a partir das estratégias e representações que anteciparam, no EA1, como sugerem Stein et al. (2008) e Takahashi (2008). Contudo, planejar detalhadamente a aula e observar como as colegas incentivaram a participação dos alunos, como os desafiaram ou como estabeleceram conexões, não foi suficiente para Luz dar um papel central às ideias dos alunos. Ao invés, embora convidasse alunos que usaram diferentes representações, como planeado, foi Luz quem explicou as respostas, preocupada com a correção matemática do discurso.

Aprender a conduzir discussões coletivas é um processo complexo, que requer tempo (Kooloos et al., 2020) e “é não só uma tarefa do professor, mas também uma aprendizagem coletiva a realizar por cada turma” (Ponte, 2005, p. 16). Antes de trabalhar com a investigadora, Luz não estava familiarizada com uma abordagem de ensino em que o professor é um facilitador da aprendizagem dos alunos. Como indica Takahashi (2011), para os professores mudarem a sua prática, não basta participar em um EA. Essas mudanças podem ser visíveis apenas depois da sua participação vários estudos.

Além de conduzir várias aulas e de refletir sobre as respostas e explicações dos alunos, particular contributo para uma mudança na prática da professora parece ter tido a preparação da discussão coletiva a partir das respostas dos alunos (EA2). Depois desse trabalho, foi possível observar como Luz convidou os alunos (aula de investigação 2 e aula observada após os EA), como os incentivou a participar, pedindo-lhes que justificassem as suas respostas, como os desafiou a ir além da tarefa (aula observada após os EA) e como lhes deu espaço para reagirem às explicações dos colegas, aspetos importantes na condução de discussões coletivas (Inoue, 2011; Ponte e Quaresma, 2016). Além disso, Luz mudou a forma como se referiu à discussão coletiva: deixou de focar-se na falta de rigor na linguagem usada pelos alunos, como no EA1, para referir-se a esta como uma oportunidade para promover a comunicação matemática e para os alunos alargarem o leque de estratégias e representações que podem usar e identificarem “as suas semelhanças, potencialidades e mais-valias”, como referiu na entrevista depois da aula observada após os EA.

## CONCLUSÃO

Ainda que ajudar os alunos a estabelecer conexões entre diferentes representações pareça ainda ser desafiante para Luz, os resultados sugerem contributos significativos do EA para a prática letiva da professora. A professora realizou significativas aprendizagens profissionais, tanto sobre a seleção de tarefas como sobre a condução de uma discussão, que mostra ser capaz de incluir na sua prática letiva. Particular relevância tiveram a participação em mais do que um EA, a

condução de aulas de investigação e também o planeamento da discussão coletiva a partir das estratégias e representações usadas pelos alunos. A partir da observação de uma aula, sabemos o que esta professora é capaz de fazer. Não sabemos o que ela faz em outras aulas, mas isso já não depende tanto do que ela é capaz de fazer, mas de outros fatores do contexto e da vontade da própria professora que se situam para além do que é estudado neste artigo.

Este trabalho mostra o valor de todos os participantes num EA conduzirem pelo menos uma aula, além de planearem, observarem e refletirem sobre várias aulas, criando oportunidades para todos levarem à prática uma aula planeada pelo grupo e para refletirem colaborativamente sobre essa prática. Além disso, a participação em mais do que um EA é outro aspeto a relevar. Em contraste com os processos formativos mais usuais, centrados em conteúdos ou temas pedagógicos em que já tinham participado, o trabalho realizado nos EA, a partir de problemas identificados pelos professores e centrado na prática letiva, é valorizado por Luz (e pelas outras professoras que continuam a participar em EA na sua escola). Trata-se de um trabalho que mostra ter elevado potencial para influenciar de modo significativo a prática letiva dos professores.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por fundos nacionais atribuídos pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de bolsa de doutoramento atribuída a Paula Gomes (SFRH/BD/145118/2019) e do Contrato de Estímulo ao Emprego Científico a Marisa Quaresma (2020.02874.CEECIND).

## REFERÊNCIAS

- Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1-6. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7>
- Franke, M.L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Information Age.
- Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). NCTM.
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM*, 48(4), 411-423. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0770-3>

- Gomes, P., Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2022). Leading whole-class discussions: From participating in a lesson study to teaching practice. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 12(2), 139-151. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2022-0022>
- Inoue, N. (2011). Zen and the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 5-23. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9150-z>
- Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., Kaenders, R., & Heckman, G. (2020). Orchestrating mathematical classroom discourse about various solution methods: Case study of a teacher’s development. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 357-389. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00150-2>
- Lewis, C., Friedkin, S., Emerson, K., Henn, L., & Goldsmith, L. (2019). How does lesson study work? Toward a theory of lesson study process and impact. In R. Huang, Takahashi, & J. P. Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics: an international perspective* (pp. 13-37). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_2)
- Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 9(1), 1-21. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1111>
- Ní Shúilleabháin, A. (2018). Enacting curriculum reform through lesson study in the Irish post-primary mathematics classroom. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J.P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics Lesson Study Around the World: Theoretical and Methodological Issues* (pp. 65-85). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_4)
- Olson, J.C., White, P., & Sparrow, L. (2011). Influence of lesson study on teachers’ mathematics pedagogy. In L. C. Hart, A. S. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 39-57). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_4)
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Henriques, A., & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 493–500).
- Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2016). Teachers’ professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 51-66. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z>
- Quaresma, M. e Ponte, J.P. (2016). Comunicação, tarefas e raciocínio: Aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetike*, 23(2), 297-310. <https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646540>
- Rocha, H. (2016). Teacher’s representational fluency in a context of technology use. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 35(2), 53-64. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrw005>

- Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Takahashi, A. (2008, July 6-13). Beyond show and tell: *Neriage* for teaching through problem-solving —ideas from Japanese problem-solving approaches for teaching mathematics. In *11th International Congress on Mathematics Education* [Section TSG 19: Research and development in problem solving in mathematics education]. Monterrey, Mexico.
- Takahashi, A. (2011). Jumping into Lesson Study—In-service mathematics teacher education. In L.C. Hart, A.S. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson Study research and practice in mathematics education* (pp. 79-82). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9\\_6](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_6)

Paula Gomes  
Universidade de Lisboa, Portugal  
paula.gomes@office365.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte  
Universidade de Lisboa, Portugal  
jpponte@ie.ulisboa.pt

Marisa Quaresma  
Universidade de Lisboa, Portugal  
mq@campus.ul.pt

Recebido: janeiro, 2023. Aceitaram: maio, 2023

doi: 10.30827/pna.v18i1.27033



ISSN: 1887-3987

## “WHAT DID YOU FIND OUT?” TASKS AND WHOLE-CLASS DISCUSSIONS USING SEVERAL REPRESENTATIONS DURING AND AFTER LESSON STUDY

Paula Gomes, João Pedro da Ponte, and Marisa Quaresma

The tasks that the teacher proposes to the students and the way he/she leads the whole-class discussion are central elements of the work in the mathematics classroom. However, it is challenging for teachers to design tasks that support students in working with different representations and to make transformations between different forms of representation, as well as to leading a whole-class discussion. Not only does he/she need to understand the students' strategies and explanations, but he/she also needs to decide which strategies to select for discussion, when and how to challenge or support the students, and when to introduce information. Participating in lesson study creates opportunities for teachers to rethink the tasks they design and how to lead whole-class discussions. As the impact of such participation on teaching practice is an under-researched issue, this is our research question: what is the contribution of lesson study to teacher's practice, namely in designing tasks and leading whole-class discussions? Data collection included participant observation (with writing a research journal and doing audio/video recordings), document collection (tasks and lesson plans), interview and a conversation with the teacher before and after the lesson observed after the lesson study. Data analysis, informed by the theoretical framework and the data, focused on designing tasks that can contribute to interesting whole-class discussions and on a set of actions and practices that teachers can use to lead whole-class discussions. The results suggest that particular relevance for the teacher's changes in her practice were: participating in several lesson studies, teaching research lessons, and planning the whole-class discussion from the students' strategies and representations. In her later teaching practice, the teacher proposed a task in which the students used different representations. Whereas during the lesson studies, in the whole-class discussion, the interactions were mainly between the teacher and the students, after the lesson studies the teacher felt confident to encourage the participation of several students and challenge them to go beyond what they did when solving the task. Furthermore, she went from focusing on the lack of precision in the students' mathematical language, to referring to the whole-class discussion as an opportunity to promote their mathematical communication.