DE LOS NUMEROS REALES A LA GEOMETRIA EUCLIDEA PLANA

Por: Mario Zuluaga U.
Profesor del Departamento de Matemáticas

Nota: El autor agradece al profesor Augusto Trujillo A., quien corrigió el original y verificó cada una de las demostraciones que aquí aparecen.

El objeto de este artículo es mostrar cómo, a partir del concepto de número real, podemos tender las bases de la geometría euclidea plana.

Comenzaremos entonces aceptando sin demostración las propiedades básicas de los números reales, y a partir de ellas demostraremos los axiomas de la geometría euclidea plana.

Es importante hacer notar que la palabra axioma no significa verdad indemostrable, sino punto de partida. En nuestro caso entonces, los axiomas serán los números reales; los teoremas que de ellos se desprenden serán los que conocemos como axiomas de las geometría euclidea plana.

En esta forma toda la geometría euclidea plana estaría fundamentada en el concepto de número real.

El conjunto de los números reales ($\mathcal{R}$) es un cuerpo ordenado y completo. Con esto se quiere decir que tiene dos leyes de composición interna que hacen de él un cuerpo, que posee una relación de orden total y por último que es completo, es decir, que todo subconjunto de $\mathcal{R}$ no vacío y acotado superiormente, tiene un extremo superior o sup. Este cuerpo ordenado y completo constituirá para nosotros el punto de partida.

El Conjunto $\mathcal{R}^2 = [\![(x,y) ; x \in \mathcal{R} ; y \in \mathcal{R}]\!]$ tal que $(x,y) = (x',y')$ sii $x = x'$ y $= y'$ puede dotarse de una estructura de espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$ y dicha estructura es una consecuencia de las propiedades de $\mathcal{R}$.

En este conjunto $\mathcal{R}^2$ puede introducirse además el concepto de norma que es una especie de generalización del concepto de valor absoluto conocido en los números reales

El lector recordará que $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant o \\ -x \text{ si } x < o \end{cases}$ es la definición de valor absoluto; fácilmente se puede ver que coincide con esta : $|x| = \sqrt{x^2}$

Definimos norma de un vector $P = (x,y) \in \mathcal{R}^2$ como $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La norma posee cuatro propiedades fundamentales a saber:

1. $\|P\| = o$ si y sólo si $P = 0$
2. $\|P\| = \|-P\|$
3. $\|P_1 + P_2\| \leqslant \|P_1\| + \|P_2\|$, desigualdad triangular
4. $\|\alpha P\| = |\alpha| \|P\| \quad \alpha \in \mathcal{R}$, $P \in \mathcal{R}^2$

Estas propiedades son una consecuencia de las propiedades de los números reales. (El lector puede tratar de verificarlas). Haciendo uso de la definición de norma de un vector se introduce el concepto de distancia entre dos vectores de $\mathcal{R}^2$ así: $d(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|$ con P_1, P_2 en $\mathcal{R}^2$; la distancia cumple las propiedades siguientes:

1. $d(P_1, P_2) = o$ si y solo si $P_1 = P_2$; P_1, P_2 en $\mathcal{R}^2$
2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$; P_1, P_2 en $\mathcal{R}^2$
3. $d(P_1, P_2) \leqslant d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$ para todo P_3 en $\mathcal{R}^2$.

Estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de norma de un vector y serán importantes para lo que nos proponemos. El conjunto $\mathcal{R}^2$ con la estructura de espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$ y con la distancia definida en él constituirá nuestro "espacio" geométrico.

A continuación enunciaremos los axiomas de la geometría euclidea plana que nos hemos propuesto demostrar en base a las propiedades de los números reales y las propiedades de $\mathcal{R}^2$ antes mencionadas.

Los axiomas de la geometría euclidea plana se dividen en cinco grupos así:

I. Axiomas de Incidencia:

A–1. Por dos puntos del plano pasa una línea recta y sólo una.
A–2. Una línea recta contiene al menos dos puntos.
A–3. Existen al menos tres puntos del plano que no se hallan sobre una recta.

II. Axiomas de Orden:

A–4. De cada tres puntos que se hallan en una línea recta hay uno que se encuentra entre los otros dos.

A–5. Si A, B son puntos de una línea recta, existe al menos un punto C sobre la recta tal que B se halla entre A y C.

A–6. Una línea recta divide el plano en dos semiplanos. (Es decir en dos subconjuntos del plano cuyos puntos no están en la recta; además no tienen puntos comunes y se caracterizan porque, dados dos puntos de uno de ellos, el segmento que los une está contenido en dicho semiplano, y, dados dos puntos pertenecientes a a semiplanos distintos, el segmento que los une debe cortar la recta).

III. Axiomas de Movimiento:

A–7. Un movimiento transforma recta en rectas.

A–8. Dos movimientos efectuados sucesivamente son equivalentes a un sólo movimiento.

A–9. Sean P_1, P_2 dos puntos del plano: l_1, l_2 dos semirectas que parten de P_1, P_2 respectivamente, y S_1, S_2 dos semiplanos limitados por las rectas L_1, L_2, obtenidas por prolongación de l_1, l_2 respectivamente. Existe un único movimiento que lleva P_1 sobre P_2, l_1 sobre l_2 y S_1 sobre S_2 .

IV. Axiomas de Continuidad:

A–10. Sean $P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ puntos de una línea recta de modo que P_k está a la derecha de P_{k-1} para $k = 2, 3 \ldots$ y todos a la izquierda de un punto A sobre la recta; existe un punto B de la recta a la derecha de todos los P_k, tal que, para cualquier punto C de la recta que esté a la izquierda de B, existe un P_n que está a la derecha de C.

V. Axioma del Paralelismo:

A–11. Un punto exterior a una recta pertenece a una única paralela a dicha recta.

Es necesario, antes de intentar cualquier demostración, definir claramente, en términos de los números reales, que son nuestros axiomas, los conceptos de: plano, punto, recta, segmento, estar en, estar entre dos puntos, estar a la derecha de, estar a la *izquierda* de, semiplano, semirecta, movimiento, llevar sobre, paralelismo . . . etc.

Quizás la posibilidad de demostrar los once axiomas anteriores radique en el hecho de que, a partir de las propiedades de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^2$, podamos definir los conceptos antes mencionados.

Vamos a entender como *"plano"* el conjunto $\mathcal{R}^2$ con las propiedades que hemos señalado. Como *puntos del plano*, los elementos de $\mathcal{R}^2$.

Nos ocuparemos ahora de definir *línea recta*. El lector recordará que un subespacio vectorial de $\mathcal{R}^2$ de dimensión uno se define como el conjunto $V = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = t.v ; t \in \mathcal{R}]\!]$ donde v es un vector de $\mathcal{R}^2$ diferente del vector 0. Definimos línea recta así:

Sea V un subespacio de $\mathcal{R}^2$ de dimensión uno y sea P_0 un vector de $\mathcal{R}^2$; definimos línea recta que pasa por P_0 y tiene como subespacio asociado a V al conjunto $L = V + P_0$; esto es: $L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_0 + t.v;\ t \in \mathcal{R}]\!]$.

La línea recta es pues para nosotros un subconjunto de $\mathcal{R}^2$ determinado por una ecuación vectorial.

Definimos ahora *paralelismo* entre vectores:

Sean P_1, P_2 vectores de $\mathcal{R}^2$; decimos que P_1 es paralelo a P_2 si existe un real no nulo α tal que $P_1 = \alpha . P_2$. Es de notar que $L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_0 + tv ; t \in \mathcal{R}]\!] = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_0 + tv' ; t \in \mathcal{R}]\!]$ cuando v y v' son paralelos y no nulos.

La ecuación vectorial que nos sirvió para definir la línea recta, la podemos cambiar por dos ecuaciones entre números reales así:

Sea $v = (a,b)$ un vector de $\mathcal{R}^2$ no nulo.

Sea $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{R}^2$. El vector v genera el subespacio V de dimensión 1 que está asociado a la recta que pasa por P_0; entonces $L = [\![(x,y) \in \mathcal{R}^2 ; (x,y) = (x_0,y_0) + (ta, tb); t \in \mathcal{R}]\!]$. $L = [\![(x,y) \in \mathcal{R}^2 ; x = x_0 + ta; y = y_0 + tb ; t \in \mathcal{R}]\!]$.

Todo vector de $\mathcal{R}^2$ que esté en la recta debe cumplir para algún t las ecuaciones:

$$x - x_0 = ta \tag{1}$$

$$y - y_0 = tb \tag{2}$$

Multiplicando ambos miembros de (1) y de (2) por b y a respectivamente, e igualando se tiene que:

$$b(x - x_0) = a(y - y_0) \tag{3}$$

o sea para todo vector $P = (x,y)$ de L sus coordenadas deben cumplir la ecuación (3).

Si $a \neq 0$ entonces (3) la escribimos así:

$$y = \frac{b}{a} x + \frac{ay_0 - bx_0}{a} \tag{4}$$

Al número b/a se le llama pendiente de la recta.

Recíprocamente si $(x_1, y_1) \in \mathcal{R}^2$ es tal que

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1 + \frac{ay_0 - bx_0}{a}$$

entonces $(x_1, y_1) \in L$, puesto que $\begin{cases} x_1 = x_0 + ta \\ y_1 = y_0 + tb \end{cases}$ para $t = \dfrac{x_1 - x_0}{a}$.

La ecuación (3) se llama la ecuación cartesiana de la línea recta.

Otra observación importante:

Sea $L = \| P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_o + tv$ con $t \in \mathcal{R} \| \; v \neq 0$
Si $P_1 \in L$ entonces $L = \| P \in \mathcal{R}^2 ; \; P = P_1 + tv ; \; t \in \mathcal{R} \| = H$

en efecto:

si $P \in L$, $P = P_o + tv$ para algún $t \in \mathcal{R}$, como $P_1 \in L$ entonces $P_1 = P_o + t_1 v$ para algún $t_1 \in \mathcal{R}$, o sea $P_o = P_1 + (-t_1)v$. Luego $P = P_1 + (-t_1)v + tv$, o sea $P = P_1 + (t - t_1)v$. Así que P es un elemento de H. El recíproco es análogo.

Vamos ahora a definir el concepto de *movimiento*, que juega un papel importante dentro de la geometría.

El lector recordará que una transformación lineal de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$ es una función $T: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ tal que $T(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha T(P_1) + \beta T(P_2)$ con P_1, P_2 en $\mathcal{R}^2$ y α, β en $\mathcal{R}$; y una traslación de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$ es una función $T_p: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$; $T_p(A) = A + P$ con $A \in \mathcal{R}^2$, $P \in \mathcal{R}^2$. Ahora, una transformación lineal, T, de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$ se dice que es una isometría si $\| P_1 - P_2 \| = \| T(P_1) - T(P_2) \|$ para todo P_1, P_2 en $\mathcal{R}^2$. Consideremos el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$ que son isometrías y aplicaciones biunívocas, las cuales tienen una de las representaciones matriciales siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{Cos}\theta & -\operatorname{Sen}\theta \\ \operatorname{Sen}\theta & \operatorname{Cos}\theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{pmatrix} \operatorname{Cos}\theta & \operatorname{Sen}\theta \\ \operatorname{Sen}\theta & -\operatorname{Cos}\theta \end{pmatrix}$$

tal que $A^{-1} = A^T$
$B^{-1} = B^T$

Las traslaciones son funciones biunívocas como el lector puede comprobarlo.

Entenderemos por *movimiento* la composición de una traslación y una aplicación lineal biunívoca que sea isometría, así:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}^2 \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "T_{k} \circ T"'] & \mathcal{R}^2 \arrow[r, "T_k"] & \mathcal{R}^2 \end{tikzcd}$$

$T_k \circ T$ será entonces lo que entenderemos por movimiento.

$T_k \circ T(P) = T_k(T(P)) = T(P) + k$ donde $P \in \mathcal{R}^2$, $K \in \mathcal{R}^2$; notaremos la función $T_k \circ T$ como $H^T_{T_k}$.

Es importante notar que $H^I_{T_k} = T_k$ cuando I representa la aplicación lineal idéntica y $H^T_{T_o} = T$ cuando T_o es la aplicación idéntica de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$.

Como T y T_k son biunívocas entonces $T_{k\circ}T = H^T_{T_k}$ es también una aplicación biunívoca de $\mathcal{R}^2$ en $\mathcal{R}^2$.

Pasaremos ahora a dar las pruebas de los once axiomas. Los conceptos que vayamos a necesitar en cada prueba, los definiremos con anticipación.

A–1 dice: Sean P_1, P_2 dos vectores de $\mathcal{R}^2$; entonces existe una única línea recta L tal que P_1, P_2 pertenecen a L $(P_1 \neq P_2)$.

Existencia: Sea $L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_1 + t.(P_2 - P_1) ; t \in \mathcal{R}]\!]$.

Es claro que $P_1 \in L$ y $P_2 \in L$; para verlo, basta tomar $t = o$ y $t = 1$, respectivamente.

Unicidad: Sea $L' = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_o + tv ; t \in \mathcal{R}]\!]$ $v \neq 0$, otra línea recta que contiene a P_1 y P_2.

Veamos que $L = L'$. En efecto: Como P_1, P_2 $(P_1 \neq P_2)$ pertenecen a L' entonces $P_2 - P_1 = (t_2 - t_1)v$ y $t_2 - t_1 \neq o$, o sea que v es paralelo a $P_2 - P_1$ luego $L' = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_o + t(P_2 - P_1)$ $t \in \mathcal{R}]\!]$.

Habíamos visto atrás que si $P_1 \in L'$ entonces,

$$L' = [\![P \in \mathcal{R}^2 ;\ P = P_1 + t(P_2 - P_1) ; t \in \mathcal{R}]\!]$$

Luego $L = L'$

A–2 dice: Sea $L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_o + tv ;\ t \in \mathcal{R}]\!]$, $v \neq 0$, una línea recta; entonces L contiene al menos dos puntos (en realidad infinitos).

En efecto: P_o y $P_o + v$ son dos vectores que pertenecen a L.

A–3 dice: Existen al menos tres puntos del plano que no se hallan sobre una recta.

En efecto: Sean $P_1 = (o,1)$, $P_2 = (1,o)$, $P_3 = (1,1)$

Si existiera alguna recta $L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ; P = P_o + tv ,\ t \in \mathcal{R}]\!]$ $v \neq 0$, con P_1, P_2, P_3 en L, podríamos escribir L así:

$$L = [\![P \in \mathcal{R}^2 ;\ P = P_1 + t(P_1 - P_2) ;\ t \in \mathcal{R}]\!]$$

como $P_3 \in L$, entonces $P_3 = P_1 + t_1(P_1 - P_2)$ para algún t, luego $(1,1) = (o,1) + t_1(-1,1)$; o sea $1 = -t_1$ y $1 = t_1 + 1$, o sea $t_1 = -1$ y $t_1 = o$; imposible.

Definiremos ahora el concepto *"estar entre"*

Sean P_1, P_2, P_3 tres puntos de una línea recta L. (Ver figura 1). Decimos que P_2 está entre P_1 y P_3 o P_3 y P_1, si

$$P_2 = tP_3 + (1-t)P_1 \text{ para algún } o < t < 1$$

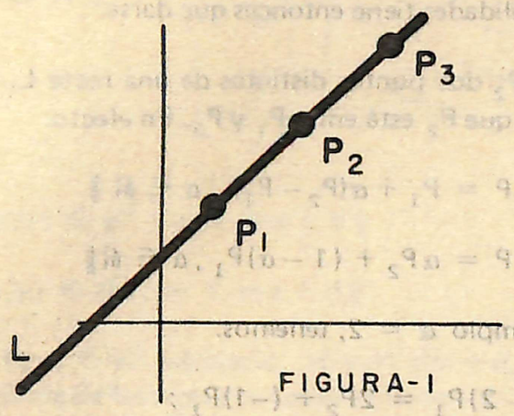


FIGURA-I

A–4 dice: Sean P_1, P_2, P_3 tres puntos distintos de una línea recta L; entonces alguno de ellos estará entre los otros dos. En efecto:

$L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = P_1 + \alpha(P_3 - P_1),\ \alpha \in \mathbb{R}]\!]$ puesto que son P_1, P_3 de L. Como $P_2 \in L$, entonces

$$P_2 = P_1 + \alpha(P_3 - P_1) \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$P_2 = \alpha P_3 + (1-\alpha)P_1 \tag{5}$$

Como P_1, P_2, P_3 son distintos, supongamos que $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq o$.

Se presentan tres posibilidades:

1. $o < \alpha < 1$ en este caso P_2 estará entre P_1 y P_3.

2. $\alpha > 1$ entonces de (5) sacamos que:

   $P_3 = \dfrac{1}{\alpha} P_2 + (1 - \dfrac{1}{\alpha}) P_1$, y como $o < \dfrac{1}{\alpha} < 1$ tenemos que P_3 está entre P_1 y P_2

3. Si $\alpha < o$ entonces de (5)

   $$(1-\alpha)P_1 = P_2 + (-\alpha)P_3,$$

   o sea

   $$P_1 = \frac{1}{1-\alpha} P_2 + \frac{(-\alpha)}{1-\alpha} P_3 .$$

Si $t = \dfrac{1}{1-\alpha}$ entonces $o < t < 1$ y $1 - t = \dfrac{(-\alpha)}{1-\alpha}$; luego P_1 estará entre P_2 y P_3 .

Una de las tres posibilidades tiene entonces que darse.

A–5 dice: Sean P_1, P_2 dos puntos distintos de una recta L. Existe al menos un punto P_3 de la recta tal que P_2 está entre P_1 y P_3. En efecto:

$$L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_1 + \alpha(P_2 - P_1)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}]\!]$$

$$L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = \alpha P_2 + (1-\alpha) P_1\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}]\!]$$

Para $\alpha > 1$ por ejemplo $\alpha = 2$, tenemos:

$$P_3 = 2P_2 + (1-2)P_1 = 2P_2 + (-1)P_1\ ;$$

entonces

$$P_2 = \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_1\ ,\ \text{o sea}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}P_3 + (1 - \frac{1}{2})P_1 \quad \text{y} \quad o < \frac{1}{2} < 1\ ;$$

luego P_2 estará entre P_1 y P_3 como queríamos.

A–6 Una línea recta L divide el plano en dos semiplanos. Tenemos entonces que caracterizar los semiplanos y ver que cumplen las condiciones mencionadas en el "axioma". Sea $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ no nulo, esto es, a y b no son ceros simultáneamente; no perdemos generalidad si suponemos $a \neq o$.

Sea $P_o = (x_o, y_o)$ y sea $L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_o + tv;\ t \in \mathbb{R}]\!]$; y habíamos visto que

$$L = [\![(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y = mx + d]\!]$$

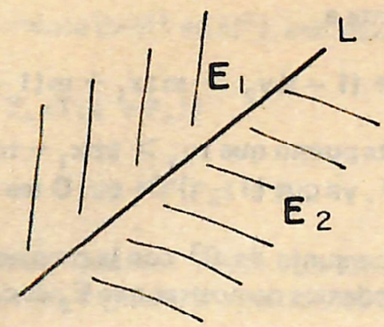
donde $m = \dfrac{b}{a}$, y $d = \dfrac{a y_o - b x_o}{a}$ (en el caso en que $a \neq o$).

Si $a = o$ entonces $b \neq o$ y la ecuación cartesiana de la recta L sería $x = x_o$, o sea $L = [\![(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x = x_o]\!]$

Usaremos el caso $a \neq o$ por ser "más" general.

Definimos los *semiplanos* determinados por L en la siguiente forma (ver figura No. 2).

FIGURA 2



$$E_1 = \| (x,y) \in \mathcal{R}^2 ; \ y > mx + d \|$$

$$E_2 = \| (x,y) \in \mathcal{R}^2 ; \ y < mx + d \|$$

Dado un punto $(x,y) \in \mathcal{R}^2$ arbitrario, si $y \neq mx + d$, entonces según la propiedad de la tricotomía de los números reales se tiene : $y > mx + d$ ó $y < mx + d$ esto es, si (x,y) es un punto de $\mathcal{R}^2$ que no está en L entonces $(x,y) \in E_1$ ó $(x,y) \in E_2$. Esto demuestra que L divide el plano en dos semiplanos.

Definimos *segmento* entre dos puntos P_1 , P_2 así:

$$\text{Seg}(P_1,P_2) = \| P \in \mathcal{R}^2 ; \ P = tP_1 + (1-t)P_2 \ ; o \leqslant t \leqslant 1 \|$$

Veamos ahora que si P_1, P_2 pertenecen al semiplano E_1 (o E_2) entonces

$$\text{Seg}(P_1, P_2) \subset E_1 \quad (\sigma \ E_2)$$

$$\text{Sean} \quad \left.\begin{array}{l} P_1 = (x_1,y_1) \in E_1 \\ \\ P_2 = (x_2,y_2) \in E_1 \end{array}\right\} \text{Entonces:} \qquad \begin{array}{l} y_1 > mx_1 + d \\ \\ y_2 > mx_2 + d \end{array}$$

Sea $P \in \text{seg}(P_1,P_2)$, o sea $P = tP_1 + (1-t)P_2$ para algún $t \in \mathcal{R}$, tal que $o < t < 1$

$$\begin{aligned} P = (x,y) &= (tx_1, ty_1) + [(1-t)x_2, (1-t)y_2] \\ &= [tx_1 + (1-t)x_2 , ty_1 + (1-t)y_2] \end{aligned}$$

$$\text{O sea} \quad \left.\begin{array}{l} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \end{array}\right\}$$

Veamos que $P \in E_1$ o sea $y > mx + d$

En efecto: la desigualdad

$$ty_1 + (1-t)y_2 > m[tx_1 + (1-t)x_2] + d,$$

es equivalente a

$$ty_1 + (1-t)y_2 > mtx_1 + m(1-t)x_2 + (1-t)d + td \ ,$$

que es cierta puesto que $ty_1 > tmx_1 + td$, ya que $t > o$, y $(1-t)y_2 > (1-t)\,mx_2 + (1-t)d$, ya que $(1-t) > o$. O sea $P \in E_1$.

Un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la propiedad anterior de E_1 se llama convexo. Análogamente podemos demostrar que E_2 es convexo.

Sea $P_1 = (x_1,y_1) \in E_1$ y $P_2 = (x_2,y_2) \in E_2$.

Veamos que el seg $(P_1,P_2) \cap L \neq \phi$

Hallemos un P de seg$(P_1,P_2) \cap L$ (si ese punto existe, el segmento corta la recta).

$$P = tP_1 + (1-t)P_2 \quad \text{para algún } o \leqslant t \leqslant 1$$

o sea

$$P = (x,y) = (tx_1, ty_1) + [(1-t)x_2, (1-t)y_2] \tag{3}$$

además

$$y = mx + d \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= tx_1 + (1-t)x_2 \\ y &= ty_1 + (1-t)y_2 \end{aligned}\right\}$$

Encontramos que las ecuaciones (3) y (4) se cumplen para

$$t = \frac{y_2 - (mx_2 + d)}{(y_2 - mx_2) - (y_1 - mx_1)} \quad , \text{ y es tal que } o \leqslant t \leqslant 1$$

puesto que:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &> mx_1 + d \\ y_2 &< mx_2 + d \end{aligned}\right\} \quad \text{ya que} \quad \begin{aligned} (x_1,y_1) &= P_1 \in E_1 \quad \text{y} \\ (x_2,y_2) &= P_2 \in E_2 \end{aligned}$$

A–7 dice que si $L = V + P_o$ con $V = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = tv, \ t \in \mathbb{R}]\!]$ y $v \neq 0$ (V subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión uno) entonces $H^T_{T_k}(L) = L'$ es otra línea recta. En efecto:

Sea $L = V + P_o$ una línea recta que pasa por P_o y tiene como subespacio asociado a V.

Sea $H^{T}_{T_k}$ un movimiento (aplicación biunívoca de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$), entonces

$$H^{T}_{T_k}(V + P_o) = T_k \circ T(V + P_o) = T_k(T(V + P_o))$$

$$= T_k(T(V) + T(P_o)) = T(V) + T(P_o) + K \ .$$

Como T es una aplicación lineal biunívoca, entonces T(V) es un subespacio vectorial de dimensión uno ya que V lo es; si $v \neq 0$ genera a V, entonces $T(v) \neq 0$ y y genera a T(V). Luego

$$H^{T}_{T_k}(L) = L' = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = T(P_o) + K + t\,.\,T(v)\ ;\ t \in \mathbb{R}]\!] ,$$

que es una línea recta que pasa por el punto $T(P_o) + K$.

A–8 dice que 2 movimientos ejecutados sucesivamente equivalen a un solo movimiento. Esto lo interpretamos así:

La composición (en el sentido de composición de funciones) de dos movimientos es equivalente a un solo movimiento. En efecto:

Sean $H^{T_1}_{T_k}$, $H^{T_2}_{T_p}$ dos movimientos ;

entonces

$$H^{T_1}_{T_k} \circ H^{T_2}_{T_p}(X) = H^{T_1}_{T_k}(T_2(X) + P) = T_1(T_2(X) + P) + K$$

$$= T_1 \circ T_2(X) + T_1(P) + K = H^{T_1 \circ T_2}_{T_{T_1(P)+k}}(X)$$

donde T_1 , T_2 son aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ biunívocas e isometrías.

T_p y T_k son traslaciones ; entonces $H^{T_1}_{T_k} \circ H^{T_2}_{T_p} = H^{T_1 \circ T_2}_{T_{T_1(P)+k}}$

Nótese que $T_1 \circ T_2$ es obviamente lineal biunívoca e isometría ya que T_1, T_2 lo son y $T_{T_1(P)+k}$ es una traslación.

A–9 Establecemos ahora lo que vamos a entender por *semirecta* que parte de un punto. Llamamos una semirecta que parte de P_o a cualquiera de los siguientes dos conjuntos

$$l_1 = [\![P \in \mathbb{R}^2 ,\ P = P_o + tv\ ;\ t \geqslant o]\!]$$

$$l_2 = [\![P \in \mathbb{R}^2 ,\ P = P_o + tv\ ;\ t \leqslant o]\!]$$

$v \in \mathbb{R}^2$ y $v \neq 0$.

Ambos conjuntos son subconjuntos de la recta

$$L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_o + tv ;\ t \in \mathbb{R}]\!]$$

Notemos que si en l_2 tomamos $v' = -v$ entonces podemos escribir

$$l_2 = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_o + t'v' \ ;\ t' \geqslant o]\!]$$

es decir el número real t lo podemos tomar mayor o igual a **o** cuando queremos caracterizar las semirectas. El lector podrá verificar que las semirectas son convexas.

Sean

$$l_1 = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_1 + tv_1 \ ;\ t \geqslant o]\!]$$

$$l_2 = [\![P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_2 + tv_2 \ ;\ t \geqslant o]\!]$$

dos semirectas que parten de P_1 y P_2 respectivamente.

Sean

$$v_1 = (a_1, b_1) \ ;\ P_1 = (x_1, y_1)$$

$$v_2 = (a_2, b_2) \ ;\ P_2 = (x_2, y_2)$$

tales que $v_1 \neq 0 \neq v_2$ y $\|v_1\| = \|v_2\|$

l_1 está contenida en una recta L_1 que determina dos semiplanos; sea uno de ellos E_1.

Análogamente l_2 está contenida en una recta L_2; sea E_2 uno de los semiplanos determinados por ella.

Vamos a demostrar que existe un único movimiento que aplica P_1 en P_2, l_1 en l_2 y E_1 en E_2.

Dicho movimiento, según habíamos definido anteriormente, debe ser de la forma $H^T_{T_k}$ con T lineal biunívoca e isometría y T_k una traslación. Primero notamos que $H^T_{T_k}(P_1) = P_2$ (eso es lo que queremos); o sea $T(P_1) + k = P_2$; o sea $k = P_2 - T(P_1)$ luego $T_k = T_{(P_2 - T(P_1))}$. Está entonces por determinar la aplicación lineal T.

Habíamos dicho anteriormente que las únicas aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, biunívocas e isométricas son las que tienen una de las representaciones matriciales:

$$A = \begin{pmatrix} \text{Cos}\ \theta & -\text{Sen}\ \theta \\ \text{Sen}\ \theta & \text{Cos}\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{pmatrix} \text{Cos}\ \theta & \text{Sen}\ \theta \\ \text{Sen}\ \theta & -\text{Cos}\ \theta \end{pmatrix},$$

o sea que T debe tener como matriz asociada una de las dos anteriores.

Supongamos que T tiene como matriz asociada la matriz A; llamemos $T = T_A$

Un simple calculo nos muestra que para

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Sen}\theta = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$

$T_A(v_1) = v_2$, entonces:

Sea $P \in l_1$, o sea $P = P_1 + tv_1$ para algún $t \geqslant o$

entonces $H^{T_A}_{T_{P_2 - T_A(P_1)}}(P) = T_A(P) + P_2 - T_A(P_1)$

$$= T_A(P - P_1) + P_2 = T_A(P_1 + tv_1 - P_1) + P_2$$

$$= t.T_A(v_1) + P_2 = P_2 + tv_2$$

que es un elemento de l_2 .

Hasta ahora $H^{T_A}_{T_{P_2 - T_A(P_1)}}$ transforma P_1 en P_2 y l_1 en l_2. En el caso en que T tenga como matriz asociada la matriz B, llamamos $T = T_B$ y en este caso $T_B(v_1) = v_2$ para los valores

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{a_1a_2 - b_1b_2}{a_1^2 + b_1^2} \qquad \operatorname{Sen}\theta = \frac{b_1a_2 + a_1b_2}{a_1^2 + b_1^2}$$

Y análogamente $H^{T_B}_{T_{P_2 - T_B(P_1)}}$ transforma P_1 en P_2 y l_1 en l_2 .

Según lo anterior es fácil ver que entonces

$H^{T_A}_{T_{P_2 - T_A(P_1)}}$ ó $H^{T_B}_{T_{P_2 - T_B(P_1)}}$ transforman L_1 en L_2; ahora bien, se puede demostrar que $H^{T_A}_{T_{P_2 - T_B(P_1)}}(E_1)$ es alguno de los dos semiplanos determinados por L_2, pues el movimiento es aplicación biunívoca. Si es E_2, hemos terminado y el movimiento que decíamos que existe es $H^{T_A}_{T_{P_2 - T_A(P_1)}}$. Si no es así, afirmamos que el movimiento será $H^{T_B}_{T_{P_2 - T_B(P_1)}}$. En efecto:

Sea $(x,y) = P$ un elemento de un semiplano de L_1. Demostraremos que si

$H^{T_A}_{T_{P_2-T_A(P_1)}}(P)$ está en un semiplano L_2, entonces $H^{T_B}_{T_{P_2-T_B(P_1)}}(P)$ estará en el otro semiplano de L_2 y recíprocamente.

Los semiplanos determinados por L_2 son:

$$E_{21} = [\![(x,y) \in \mathcal{R}^2 ;\ y > \frac{b_2}{a_2}\, x + \frac{a_2 y_2 - b_2 x_2}{a_2}]\!] \text{, tomando } a_2 \neq o$$

$$E_{22} = [\![(x,y) \in \mathcal{R}^2 ;\ y < \frac{b_2}{a_2}\, x + \frac{a_2 y_2 - b_2 x_2}{a_2}]\!] \text{, tomando } a_2 \neq o$$

(El caso en que $a_2 = o$ implica $b_2 \neq o$ y lo dejamos para el lector, por ser más sencillo).

Si $H^{T_A}_{T_{P_2-T_A(P_1)}}(P) \in E_{21}$ entonces $T_A(P-P_1) + P_2 \in E_{21}$ y un cálculo tedioso nos dice que esto es equivalente a

$$\frac{a_1}{a_2}(y - y_1) > \frac{b_1}{a_2}(x - x_1),$$

y esto a su vez es equivalente a que $H^{T_B}_{T_{P_2-T_B(P_1)}}(P) \in E_{22}$.

Un procedimiento análogo mostrará que

$$H^{T_A}_{T_{P_2-T_A(P_1)}}(P) \in E_{22}$$

es equivalente a que

$$H^{T_B}_{T_{P_2-T_B(P_1)}}(P) \in E_{21}$$

como queríamos probar.

Veamos ahora que el movimiento es único. En efecto, si existe un

$$H^{S}_{T_{P_2-S(P_1)}} = H^{T}_{T_{P_2-T(P_1)}}$$

(cuando $T = T_A$ ó $T = T_B$, según el caso); entonces, al aplicar las funciones anteriores al vector 0, concluímos que coinciden en P_1, o sea $T(P_1) = S(P_1)$, esto es:

$$T_{P_2-T(P_1)} = T_{P_2-S(P_1)} = T_R$$

entonces

$$T_R \circ S = T_R \circ T$$

Multiplicando por la inversa de T_R, que es T_{-R}, a ambos lados de la igualdad, encontramos que $S = T$.

Luego $H^{T}_{T_{P_2 - T(P_1)}}$ es único.

A–10. Definiremos ahora lo que vamos a entender por "estar a la derecha de"

Sea $L = \llbracket P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_o + tv ;\ t \in \mathbb{R} \rrbracket\ \ v \neq 0$

Supongamos que $v = (a,b) \neq 0$ es tal que $a \neq o$

Sean $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos de L. Decimos que P_2 está a la derecha de P_1 sii $x_2 > x_1$.

Si $a = o$ decimos que P_2 está a la derecha de P_1 sii $y_2 > y_1$.

Antes de demostrar el axioma probaremos unos lemas preliminares:

Lema 1. Sean $P_1, P_2, \ldots P_k$, puntos de una recta

$$L = \llbracket P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_o + tv ;\ t \in \mathbb{R} \rrbracket\ \ v = (a,b) \text{ con } a \neq o$$

tales que P_{J+1} está a la derecha de P_J para todo J; $P_J = (x_J, y_J)$ para todo J.

Si $y_1 < y_2$ entonces $y_k < y_{k+1}$ para todo K.

En efecto:

Si existiera un J tal que $y_J \geqslant y_{J+1}$, podríamos escribir:

$$L = \llbracket P \in \mathbb{R}^2 ;\ P = P_1 + t(P_{J+1} - P_J) ;\ t \in \mathbb{R} \rrbracket .$$

Como $P_2 \in L$ tenemos que:

$$P_2 = (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + t(x_{J+1} - x_J, y_{J+1} - y_J)$$

o sea

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = t(x_{J+1} - x_J, y_{J+1} - y_J) .$$

Ahora $t \neq o$ pues $x_2 > x_1$

Si $t > o$, entonces

$$o < y_2 - y_1 = t(y_{J+1} - y_J) \leqslant o \text{ , imposible.}$$

Si $t < o$, entonces

$$o < x_2 - x_1 = t(x_{J+1} - x_J) < o \text{ , imposible.}$$

Luego debemos concluir que $y_K < y_{K+1}$ para todo K.

Lema 2. Si $y_1 > y_2$ entonces $y_J > y_{J+1}$ para todo J.

Su demostración es análoga a la anterior.

Lema 3. Si $y_1 = y_2$ entonces $y_K = y_{K+1}$ para todo K y entonces $y_J = y_K$ para todo J, K. La demostración es análoga a las anteriores.

Advertencia: En las demostraciones anteriores hemos usado en la hipótesis los elementos y_1, y_2 que son las segundas coordenadas de los puntos P_1, P_2 respectivamente. Hubieramos podido hacer lo mismo si escogemos y_i, y_{i+1} de los puntos P_i, P_{i+1} respectivamente.

Ahora demostraremos el axioma.

Sea $L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = P_o + tv ; t \in \mathbb{R}]\!]$ $v = (c_1, c_2)$, $v \neq 0$,

supongamos que $c_1 \neq o$ (el caso $c_1 = o$ es más sencillo y lo dejamos al lector).

Sean $P_1, P_2, \ldots P_n \ldots$ puntos de L tales que P_{J+1} está a la derecha de P_J para todo J.

Llamamos $P_J = (x_J, y_J)$ para todo J.

Sea $A = (a_1, a_2) \in L$, tal que A está a la derecha de P_J para todo J. O sea $a_1 > x_J$ para todo J, o sea a_1 es cota superior de $x_1, x_2, \ldots x_J \ldots$ Según la completez de los números reales, existe un b_1 tal que b_1 es el extremo superior de dicho conjunto.

Se presentan tres casos:

1. $y_1 < y_2$, según el Lema 1 tendremos que $y_J < a_2$ para todo J. Esto es, el conjunto $y_1, y_2, \ldots y_J \ldots$ está acotado superiormente y entonces tiene un sup.; llamémoslo b_2.

2. $y_1 = y_2$; según el Lema 3, $y_J = a_2$ para todo J y por consiguiente $y_1, \ldots y_J$ es también acotado superiormente y tiene un sup.; llamémoslo $b_2' = a_2$.

3. $y_1 > y_2$; según el Lema 2, $y_J > a_2$ para todo J. Luego $y_1, \ldots y_n \ldots$ está acotado inferiormente y en ese caso tiene un inf.; llamémoslo b_2''.

Para el primer caso el punto buscado es $B = (b_1, b_2)$. Para el segundo caso el punto buscado es $B' = (b_1, b'_2)$. Para el tercer caso el punto buscado es $B'' = (b_1, b''_2)$.

Consideremos el primer caso (el segundo es sencillo y el tercero análogo al primero, y los dejamos al lector).

Veamos que $(b_1, b_2) = B \in L$. La recta L la podemos representar así:

$$L = \| (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; y = mx + d \|$$

$$m = \frac{c_2}{c_1} \quad , \quad d = \frac{c_1 y_o - c_2 x_o}{c_1}$$

Si $B \notin L$, entonces B pertenece a algún semiplano determinado por L. O sea que se presentan dos posibilidades:

1. $b_2 > mb_1 + d \geqslant y_K$ para todo K; la igualdad se tiene si

$$b_1 \in \| x_1, \ldots x_n \ldots \|$$

Luego b_2 no sería la mínima cota superior de $y_1, \ldots y_n \ldots$ como se había supuesto.

2. $b_2 < mb_1 + d$

Sea el vector $v = (c_1, c_2)$.

Como P_1 y P_2 están en L, entonces

$$P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ es paralelo a } v.$$

Luego

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = t(c_1, c_2)$$

o sea que

$$m = \frac{c_2}{c_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \neq o$$

Pues bien: el punto $x_o = \dfrac{b_2 - d}{m}$ es tal que $(x_o, b_2) \in L$.

Afirmamos que el punto $(b_1, mb_1 + d)$ está a la derecha de (x_o, b_2), o sea que $x_o . < b_1$.

Si $x_o = b_1$ indicaría que $B = (b_1, b_2) \in L$ y hemos supuesto que no está.

Si $x_o > b_1$ o sea si (x_o, b_2) está a la derecha de $(b_1, mb_1 + d)$, puesto que $y_1 < y_2$, el lema 1 nos dice que $b_2 > mb_1 + d$ contra lo que hemos supuesto de

$b_2 < mb_1 + d$. Concluimos entonces que $x_o < b_1$. Como b_1 es el sup. de $x_1, x_2 \dots x_n \dots$ entonces existe un x_n tal que $x_n > x_o$, esto es (x_n, y_n) está a la derecha de (x_o, b_2) y el lema 1 nos dice otra vez que $y_n > b_2$ contra la hipótesis de que b_2 es el Sup. de $y_1, y_2 \dots$; de esta contradicción concluimos que

$(b_1, b_2) \in L$ como queríamos.

Nota: decimos que A, está a la izquierda de B (A, B puntos de una recta L) sii B está a la derecha de A.

Ahora: sea $C = (x,y)$ un punto a la izquierda de $B = (b_1, b_2)$, esto es $x < b_1$; se sigue del hecho de que $b_1 = \text{Sup} [\![x_1, \dots x_n \dots]\!]$ que existe en x_J tal que $x < x_J$. Luego el punto C está a la izquierda de $P_J = (x_J, y_J)$.

A–11 (Decimos que dos rectas L y L' se dicen paralelas sii tienen el mismo subespacio vectorial asociado).

Sea $L = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = P_o + tv ; t \in \mathbb{R}]\!] \quad v \neq 0$

Sea $P_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que $P_1 \notin L$.

Existencia:

Sea $L' = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = P_1 + tv , t \in \mathbb{R}]\!] \quad v \neq 0$

es claro que $P_1 \in L'$ y L' paralela a L.

Unicidad:

Sea $L'' = [\![P \in \mathbb{R}^2 ; P = P_2 + tv ; t \in \mathbb{R}]\!]$

tal que $P_1 \in L''$, o sea que $P_1 = P_2 + t_1 v$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$

a. $L'' \subset L'$

Sea $P \in L''$, entonces $P = P_2 + tv = P_1 - t_1 v + tv$

$= P_1 + (t - t_1) v$. Luego $P \in L'$

b. $L' \subset L''$

Sea $P \in L'$; entonces $P = P_1 + tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$

o sea

$P = P_2 + t_1 v + tv = P_2 + (t_1 + t) v$; o sea $P \in L''$

De a. y b. concluimos que $L' = L''$ como queríamos.