Revista Internacional de Estudios en Educación
2003, Año 3, Nº 1, 96-102

LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS COMPUTARIZADOS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: CONSIDERACIONES FILOSÓFICAS

Jaime Rodríguez Gómez
Universidad de Montemorelos, México

RESUMEN

El autor presenta primeramente las tendencias actuales de diversas filosofías de la educación, las cuales son criticadas por su carácter reduccionista.El presente trabajo se basa en una revisión bibliográfica de investigaciones recientes sobre la introducción de sistemas algebraicos computarizados (CAS: Computer Algebra System) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los objetivos principales del artículo son identificar los fundamentos filosóficos que sustentan los estudios revisados, hacer un análisis y elaborar un marco filosófico personal sobre el tema.

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas constituyen un problema que ha encontrado diferentes soluciones según la época de análisis. Inclusive se ha sugerido un cambio completo de contenido generando una matemática moderna. La investigación en educación matemática ha ido en aumento, proveyéndola de resultados científicos que le dan fundamento. Una de las líneas contemporáneas de investigación tiene que ver con la introducción de tecnología computacional en el estudio de la matemática.

Presentación de la problemática

El CAS es un software especializado en matemáticas, para el manejo de expresiones algebraicas. Tiene la capacidad de realizar operaciones aritméticas, algebraicas y gráficas. Algunos de los CAS más conocidos son: Derive, Mathematica, Maple y MathCad.

Históricamente la introducción de CAS ha pasado tres etapas identificadas por Heid y Edwards (2001): (a) para reemplazar la manipulación simbólica tradicional, (b) para suplir la instrucción con papel y lápiz, y (c) como un catalizador para realizar nuevos acercamientos y como reemplazo de alguna matemática tradicional.

Cada una de estas etapas concibe de diferente manera los elementos involucrados en el proceso educativo de las matemáticas. Se presentan a continuación las concepciones identificadas en trabajos recientes de investigación, con respecto a estos elementos, a saber: alumno, maestro y contenido.

Elementos básicos involucrados

Alumno

En los trabajos revisados se observan diferentes acercamientos: el aspecto cognitivo, el desarrollo de habilidades y el aspecto afectivo.

En el aspecto cognitivo, Papert (citado en Dedic, Rosenfield, Cooper y Fuchs, 2001) postula que la construcción de significado en ideas abstractas involucra procesos tales como la síntesis, la generalización y la deducción, y que estos altos procesos cognitivos fluyen de la experiencia activa con un suficiente número de ejemplos. Esto quiere decir que los constructivistas aspiran a crear ambientes de aprendizaje que aporten oportunidades para abordar el conocimiento activamente y que motiven a los estudiantes en la construcción de significado para conceptos abstractos y complejos. En este mismo sentido Moreno (1998) establece que "el conocimiento no es resultado ni de la sola actividad del sujeto ni tampoco de la presencia del objeto de conocimiento, sino que el conocimiento surge de la interacción del sujeto cognoscente y el objeto de su conocimiento" (p. 284).

En este proceso de construcción del conocimiento, interviene lo que suele llamarse instrumento de mediación, con respecto a lo cual Moreno añade que dichos instrumentos transforman de raíz la actividad cognitiva del estudiante, determinando así la estructura de una nueva acción instrumental. Para el presente análisis, el CAS juega el papel de instrumento de mediación, así como el papel y lápiz o cualquier otro medio o ambiente que participe en el proceso constructivo de conocimiento matemático. Berger (1998), acorde con Moreno, resume esta situación al decir que "si uno cambia las herramientas de pensamiento disponibles para un niño, su mente tendrá una estructura radi-calmente diferente" (p. 15).

Otro aspecto que se considera al introducir el CAS en la educación matemática es el que Dedic et al (2001) llaman la regla de cuatro, al referirse a las perspectivas verbal, gráfica, numérica y algebraica. Sus dos principales argumentos son los siguientes: (a) el conocimiento de cada aprendiz es individual y (b) se relaciona con su estilo de aprendizaje, sus fortalezas y debilidades. Históricamente los acercamientos a las matemáticas han sido geométricos, numéricos y verbales; sólo en los últimos cien años el acercamiento analítico ha sido dominante. La regla de cuatro intenta ajustar el balance, argumentando que cada acercamiento provee infor-mación importante para diferentes estudiantes.

Un elemento esencial del pensamiento matemático se observa en el comportamiento de expertos, quienes se mueven fluidamente entre las diferentes perspectivas, observando diferente información, estableciendo ligas entre perspectivas y determinando nuevas formas de proveer entendimiento. La exposición a distintas perspectivas y el requerimiento de moverse entre ellas pueden ayudar a crear en los estudiantes una forma más experta de pensar y un entendimiento más profundo de la matemática. Heid, Hollebrands, Iseri, Edwards y Graham (2002) añaden que en los ambientes del CAS el razonamiento matemático de un estudiante puede ir de acá para allá entre el sistema gráfico y el numérico, además de analizar las representaciones simbólicas con resultados provistos por la tecnología, corroborando y haciéndose preguntas.

Respecto del aprendizaje con el CAS, Lindsay (1999) observó que los estudiantes tienen dificultad para interpretar los resultados. Para algunos, la computadora puede presentar imágenes conflictivas que requieren cierto tipo de habilidades de pensamiento. Pocos estudiantes tienen los antecedentes requeridos y las habilidades necesarias para desarrollar un alto nivel conceptual mediante el uso de herramientas tecnológicas; el uso del CAS como parte de una estrategia mixta (con papel y lápiz) puede estar lleno de dificultades y provocar grandes equivocaciones. Considerando esto, Lindsay propone que los estudiantes dediquen más tiempo para discutir y reflexionar sobre el significado de las respuestas de CAS, sean estas presentadas algebraica, numérica o gráficamente.

En el desarrollo de habilidades Doerr y Rieff (1999) sostienen que la tecnología da a los estudiantes la oportunidad de probar sus conjeturas y experimentar con las ideas. Heid y Edwards (2001) añaden que mediante el uso de CAS los alumnos pueden describir situaciones de la vida real, aproximar respuestas a problemas mediante el uso de métodos gráficos y tabulares, y pueden producir respuestas exactas. En este mismo sentido Heid et al (2002) dicen que las actividades con el CAS pueden revelar el razonamiento de los estudiantes de tal forma que se les pueden pedir justificaciones tales como (a) hacer conexiones entre las diferentes representaciones, (b) dar sentido a los resultados proporcionados por la tecnología, (c) reconciliar los resultados tecnológicos con la predicción del estudiante, o (d) construir una figura con las propiedades interrelacionadas dadas.

En el aspecto afectivo Noss y Hoyles (citados en Heid y Edwards, 2001) observaron que el CAS provee un marco en el cual los maestros y estudiantes pueden exteriorizar su entendimiento y en el cual ambos pueden expresar, modificar e investigar sus nuevos conocimientos matemáticos. Pierce y Stacey (citados en Heid y Edwards, 2001) identificaron al CAS como un medio que permite la negociación de significados con los pares y maestros. Poste-riormente Heid et al. (2002) concluyeron que los estudiantes desarrollan nuevas formas de interactuar con sus compañeros y buscan nuevas formas de negociación con respecto a los criterios para que una respuesta sea aceptada como correcta. Añadieron que los estudiantes necesitan aceptar una gran responsabilidad en su aprendizaje. De esto se puede inferir que el CAS proporciona un ambiente de discusión y análisis en el grupo de estudiantes y, como Stephens y Konvalina (1999) mencionan, crea actitudes más positivas hacia el curso y subsecuentemente hacia los instructores en el curso.

Maestro

Como menciona Mayes (1995), la implementación de computadoras en el currículo requiere cambios fundamentales en las estrategias de enseñanza de los maestros. Zehavi y Mann, (citados en Heid y Edwards, 2001) observaron que el uso del CAS incrementa la conciencia de los maestros hacia los aspectos cognitivos del aprendizaje; por lo tanto los maestros deben repensar el currículo y los aspectos didácticos del aprendizaje de las matemáticas. En esa dirección concluyen Henningsen y Stein (citados en Heid et al., 2002) que el maestro debe hacer más que simplemente seleccionar tareas matemáticas que valgan la pena. Debe crear un ambiente en el que los estudiantes se comprometan y discutan, además de pensar profunda-mente sobre las tareas sin reducir las demandas cognoscitivas.

Sin embargo es importante considerar a Dubinsky (citado en Subic y Yearwood, 1996), quien establece que lo que los maestros hacen en clase está determinado por sus creencias de cómo se aprenden las matemáticas. Él establece cuatro posibles paradigmas acerca de cómo aprenden las personas y el papel que juega el maestro en cada uno:

1. Espontáneamente: El maestro cree que los estudiantes aprenden individual y espontáneamente al mirar un diagrama, o al escuchar un orador, y que poco se puede hacer por ayudarlos. El papel del maestro consiste entonces en motivar a sus estudiantes a aprender me-diante la presentación de material en forma verbal, escrita o pictórica y esperar que aprendan por sí mismos.

2. Inductivamente: El maestro cree que los estudiantes aprenden inductivamente al trabajar con muchos ejemplos, extrayendo comportamientos comunes e ideas importantes de esta experiencia y de la organización de esa información en sus mentes. Esto lleva al maestro a ponerlos a hacer ejemplos durante gran parte del tiempo disponible de los estudiantes.

3. Constructivamente: El maestro cree que los estudiantes aprenden haciendo construcciones mentales al tratar con fenómenos matemáticos. Debería entonces estudiar esas construcciones, cómo las han hecho y lo que puede hacerse para inducir a los estudiantes a realizarlas.

4. Pragmáticamente: El maestro cree que los estudiantes aprenden matemáticas resolviendo problemas de otros campos. Su estrategia es entonces la de involucrar a los estudiantes en muchas aplicaciones.

El CAS jugará un papel diferente en cada uno de estos paradigmas.

Contenido

Dos ideas básicas surgen del uso de CAS en la enseñanza de las matemáticas, según Subic y Yearwood (1996). La primera consiste en que mucha de la manipulación común puede ser reemplazada con ilustraciones interesantes de la teoría. La segunda se relaciona con la habilidad de calcular cantidades matemáticas rápida y convenientemente, lo cual permite el tratamiento de aplicaciones más complejas. Con respecto a la primera, tanto Podlesni (1999) como Dana-Picard (2001) esta-blecieron que el CAS puede liberar al sujeto de desagradables tareas de cóm-puto, pero demanda muchas más habi-lidades de pensamiento matemático.

Estas declaraciones dan evidencia de que se requiere un cambio curricular, dejando en cierta medida la manipulación y generando propuestas que resulten, según Heid y Edwards (2001), en más problemas reales, exploración profunda de conceptos matemáticos, incremento de oportunidades para desarrollar conexiones entre ideas matemáticas, un rango mayor de ejemplos, mayor abstracción, un conjunto completo de ejemplos y contraejemplos en un período más breve de tiempo y nuevas formas de entender procedimientos tradicionales.

Apoyado en una filosofía pragmática y constructivista, así como en los tipos de interacción descritos por Boyce y Ecker, Subic y Yearwood (1996) proponen cambios curriculares en matemáticas según los lineamientos siguientes: (a) prescindir de mucha manipulación simbólica y rutinaria, (b) incrementar la visualización, (c) tratar con una mayor cantidad de problemas reales y (d) proveer un ambiente que propicie y estimule la exploración. Demana, Waits, Fey y Heid (citados en Mayes, 1995) concuerdan con estos aspectos de la renovación curricular en matemáticas.

El contenido curricular en matemáticas depende en gran medida de las creencias que se tenga de ellas. Subic y Yearwood (1996) establecen cuatro categorías de creencias acerca de la naturaleza del cálculo y en cierta forma de la matemática:

1. Conocimiento: Se cree que la matemática es un cuerpo de conocimiento descubierto por nuestra sociedad (durante varios cientos años) que debemos pasar a las generaciones futuras, transfiriéndolo de nuestras mentes a las mentes de nuestros estudiantes.
2. Técnicas: Se cree que es un conjunto de técnicas para resolver problemas convencionales.
3. Pensamiento: Se cree que es un juego de ideas creadas por el pensamiento individual y colectivo.
4. Aplicaciones: Se cree que la esencia de la matemática es su poder para describir, explicar y predecir los fenómenos en el mundo físico.

La postura de Mayes (1995), según la cual la tecnología computacional debe ser integrada al currículo, concuerda con la de Subic y Yearwood (1996), quienes consideran que si los estudiantes la perciben como algo añadido, adoptan hacia ella actitudes negativas. Esto conlleva el requerir el uso de CAS no sólo en el laboratorio, sino también para trabajar en clase o con sus tareas. Además, dice Mayes (1995), un currículo exitoso en la transferencia tiene que utilizar la computadora como una herramienta para lograr un acer-camiento, por el que los estudiantes exploren activamente un desarrollo coordinado entre ambientes algebraicos y geométricos.

Discusión y análisis

En la lectura de estos artículos se observa gran concordancia entre los presupuestos filosóficos que fundamentan la introducción del CAS en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Todos parten de una idea relacionada con la construcción individual y colectiva del conocimiento. De esta manera proponen actividades que desarrollen en los estudiantes habilidades de exploración, conjetura, análisis y aplicación de conceptos matemáticos. Se percibe también un papel de cola-boración por parte del docente en el sentido de proponer dichas actividades y no sólo de imponer ideas o procesos. El maestro cambia su papel de informador a facilitador del conocimiento.

Con respecto a la percepción de las matemáticas, se considera a éstas ya no como un conjunto de mecanizaciones sin sentido, sino como el conjunto de herramientas y habilidades que permiten comprender la matemática en sí misma y sus aplicaciones.

Siendo que personalmente considero, como Wooldrige (1991), que el dominio del hombre sobre la tierra incluye el desarrollo de las herramientas matemáticas que nuestra mente finita sea capaz de comprender, es necesario reorientar la concepción general de las matemáticas. Hay que conocer no sólo el manejo de las herramientas sino su utilidad en diferentes situaciones. Y para ello hay que pasar a un nivel de conceptualización y dejar la mecánica o el manejo de la herramienta a los CAS.

Con base en estas ideas, concuerdo con los cambios curriculares propuestos, con las estrategias de adquisición y generación de conocimiento y con las posibilidades de desarrollo del estudiante, pero creo que el marco de estas acciones está determinado por el hecho de considerar el aprendizaje de la matemática como un proceso de descubrimiento. Al considerarlo de esta forma creo en la fuente de dicho conocimiento y en su deseo de ayudarnos en ese proceso. Esto implica ir más allá de lo que los autores analizados proponen, en el sentido de recurrir a esa fuente en el proceso de aprendizaje y uso de las matemáticas. También creo que a causa de la degradación humana se han disminuido las facultades del sujeto y por ello es necesario recurrir al apoyo externo en los procesos mentales de análisis y descubrimiento de las matemáticas. Creo que el CAS puede ser un buen instrumento externo que permita generar una estructura de las matemáticas más acorde con las con-cepciones contemporáneas.

Conclusión

Al hablar de la introducción de CAS en el proceso educativo, es necesario reconocer que "la tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, influye en la matemática que se enseña y refuerza el aprendizaje de estudiantes", según lo establece el principio de tecnología en las normas de la matemática escolar de los Estados Unidos (NCTM, 2000).

Dependiendo de las creencias de los maestros, de los objetivos curriculares del programa académico, de las necesidades del estudiante y de los medios tecnológicos disponibles, será el uso que se haga de los CAS en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemá-ticas. Dicho de otra manera, se puede concluir que el uso de CAS en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas depende de las creencias del docente y afecta todos los componentes del proceso.

Referencias

Berger, Margot. (1998). Graphic calculators: an interpretative framework. *For the Learning of Mathematics, 18*(2), 13-20.

Dana-Picard, Thierry. (2001). Matricial computations: Classroom practice with a computer algebra system. *European Journal of Engineering Education, 26*(1), 29-37.

Dedic, Helena; Rosenfield, Steven; Cooper, Miriam, y Fuchs, Marketa. (2001). ``Do I really hafta?" WebCal: A look at the use of LiveMath software in Web-based materials that provide interactive engagement in a collaborative learning environment for differential calculus. *Educational Research and Evaluation, 7*(2), 285-312.

Doerr, Helen M. y Rieff, Cathieann. (1999). Putting math in motion with calculator-based labs. *Mathematics Teaching in the Middle School, 4*(6), 364-367.

Heid, M. Kathleen y Edwards, Michael Todd. (2001). Computer Algebra Systems: Revolution of retrofit for today's mathematics classrooms?. *Theory Into Practice, 40*(2) 128-136.

Heid, M. Kathleen; Hollebrands, Karen F.; Iseri, Linda W.; Edwards, Barbara y Graham, Karen. (2002). Reasoning and justification, with examples from technological environments. *Mathematics Teacher, 95*(3), 210-216.

Lindsay, Martín. (1999). Designing assessment tasks to accommodate student's cognitive skills in a technology-based mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 30*(5), 691-697.

Mayes, Robert L. (1995). The application of a computer algebra system as a tool in college algebra. *School Science & Mathematics, 95*(2), 61-68.

Moreno, Luis. (1998). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En Hitt, Hernández y Villalba (eds.). *Memorias del VIII Seminario Nacional: Calculadoras y Micro-computadoras en Educación Matemática.* Cinvestav-IPN, México (pp. 281-292).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. http://standards.nctm.org/document/chapter2/techn.htm .

Podlesni, James. (1999). A new breed of calculators: Do they change the way we teach? *Mathematics Teacher, 92*(2), 88-89.

Stephens, Larry J. y Konvalina, John. (1999). The use of computer algebra software in teaching intermediate and college algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 30*(4), 483-488.

Subic, A. y Yearwood, J. (1996). Problem-centred learning using computer algebra systems in the engineering curriculum. *European Journal of Engineering Education, 21*(1), 41-54.

Wooldridge, Glyn. (1991). Mathematics. En Beck, W. David (ed.). *Opening the American mind.* Baker Book House, Michigan.