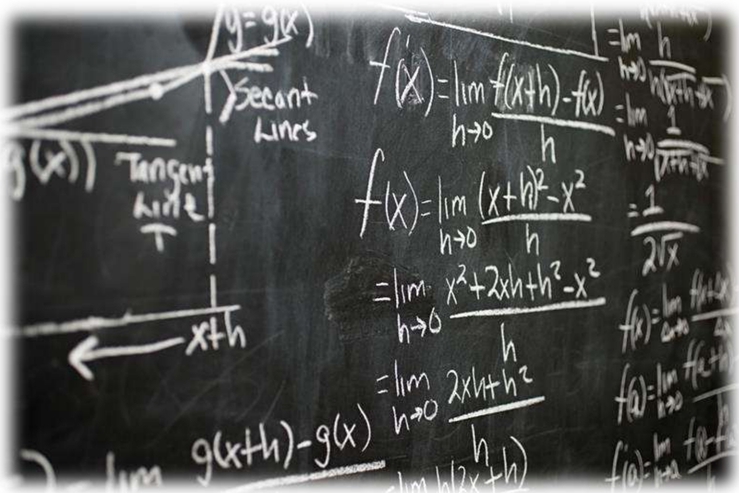
ISSN-e: 2697-3650

Minerva Journal
vol.3, Issue. 9, (pp. 62-90)

https://doi.org/10.47460/minerva.v3i9.74



Solucionario de ejercicios de cálculo integral. Integrales indefinidas

Capítulo 1: Integración de funciones por el método de sustitución.

Solucionario de ejercicios de cálculo integral. Integrales indefinidas

Capítulo1: Integración de funciones por el método de sustitución.

Recibido: 02/08/2022 Aceptado: 18/11/2022

ISBN: 978-9942-42-880-6

Edición: Primera

Editorial: AutanaBooks S.A.S

INFORMACIÓN DE LOS AUTORES

Juan Segura, Msc. Ing Eléctrico. Actualmente, investigador y docente tiempo completo en la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad Indoamérica. Sede Quito. Ecuador.
https://orcid.org/0000-0002-0625-0719
Universidad Indoamérica

Gerardo Arteaga, Ingeniero Mecánico, Master en Sistemas Automotrices. Se desempeña actualmente como Director de la Facultad de Ingeniería, Industria y Producción de Universidad Indoamérica. Sede Quito. Ecuador.
https://orcid.org/0000-0001-5465-8551
Universidad Indoamérica

Hernán Espejo-Viñán, Msc. Ingeniero Químico y Magister en Gestión de la Producción Industrial. Actualmente, investigador y docente tiempo completo en la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad Indoamérica. Sede Quito. Ecuador.
https://orcid.org/0000-0001-7248-5017
Universidad Indoamérica

Christian Pazmiño, Ingeniero en Sistemas, Magister en Gerencia de Sistemas y Tecnologías de la Información. Se desempeña actualmente como Docente del de la Facultad de Ingeniería, Industria y Producción de la Universidad Indoamérica. Sede Quito. Ecuador.
https://orcid.org/0000-0001-9545-9567
Universidad Indoamérica

Kevin Zurita, Estudiante de noveno nivel de la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad Tecnológica sede Quito, Ecuador
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8360-9863
kzurita2@indoamerica.edu.ec
Universidad Indoamérica

Edison Zambrano, estudiante de la carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad Indoamérica sede Quito, Ecuador.
https://orcid.org/0000-0002-7846-4943
ezambrano16@indoamerica.edu.ec
Universidad Indoamérica

I. INTRODUCCIÓN

El uso de integrales indefinidas en la ingeniería resulta algo indispensable para su formación profesional pues, se emplean en la elaboración de modelos matemáticos constituidos por ecuaciones diferenciales, los cuales se utilizan para representar los diferentes fenómenos físicos presentes en la naturaleza. Con respecto a los estudiantes de ciencia e ingeniería, resulta de una gran relevancia el aprender la resolución de las mismas por varias razones: por su incidencia de forma significativa en el desarrollo del pensamiento lógico para el futuro profesional, permite la comprensión adecuada de los diferentes eventos naturales, los cuales para su estudio se modelan con la utilización de esta herramienta matemática y, la misma posee múltiples aplicaciones en la solución de problemas de ingeniería, según sea su área de estudio en particular.

El presente trabajo, consiste en un solucionario de ejercicios propuestos en el libro Cálculo Diferencial e Integral, Séptima Edición, Mc Graw Hill, correspondiente a integrales indefinidas aplicando el Método de Sustitución y Cambio de Variable. Con el fin de que los estudiantes de ciencias e ingenierías, puedan contar con un documento adicional, que les permita agilizar el proceso de aprendizaje correspondiente a la resolución de este tipo de integrales; siendo el aporte más significativo la demostración de los resultados obtenidos, mediante el proceso inverso denominado Derivación. Con la finalidad de desarrollar habilidades en los educandos, tales como: empoderamiento de la necesidad de realizar la verificación de un resultado en una operación matemática, así como consolidar los nexos existentes entre el Cálculo Integral y Diferencial como operaciones inversas.

II. BASES TEÓRICAS Y EJEMPLOS

A. Patrón de reconocimiento.

Con el fin de realizar el proceso de integración para funciones compuestas, se establecen dos técnicas fundamentales: patrón de reconocimiento y cambio de variable. Ambas técnicas se basan en una sustitución $\boldsymbol{u}$. Mediante patrón de reconocimiento, se realiza la sustitución mentalmente. Sin embargo, con el cambio de variables se escriben los pasos de la sustitución.

La importancia de la sustitución en la integración es comparable en la de la regla de la cadena empleada en la derivación de funciones compuestas.

La regla de la cadena plantea para funciones derivables, según la ecuación **(1)**:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

De la definición de una anti derivada se deduce que:

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad \textbf{(2)}$$

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(u) + C \quad \textbf{(3)}$$

Teorema: Antiderivación de una función compuesta.

Sea $\mathbf{g}$ una función cuyo rango es un intervalo $\boldsymbol{I}$, y sea $\boldsymbol{f}$ una función continua sobre $\boldsymbol{I}$. Si $\mathbf{g}$ es derivable en su dominio y $\boldsymbol{F}$ es una antiderivada de $\boldsymbol{f}$ sobre $\boldsymbol{I}$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Si $u = g(x)$, entonces

$du = g'(x)dx$ Y

$\int f(u)du = F(u) + C$

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar el teorema directamente, reconociendo las presencias de $\boldsymbol{f(g(x))}$ **y** $\mathbf{g'(x)}$. Observe que la función compuesta en el integrando tiene una función externa y una función interna. Además, la derivada $\mathbf{g'(x)}$ está presente como un factor del integrando.

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Función Externa Función Interna Derivada de la Función Interna

Ejemplo 1

Reconocimiento del patrón $f(g(x).g'(x))$dx

Encontrar el patrón en $\int (x^2 + 1)(2x)dx$ **(1)**

Solución

Al igualar $g(x) = x^2 + 1$, se obtiene **(2)**

$G(x) = 2x$ **(3)** y

$f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2$ **(4)**

Se puede reconocer que el integrando sigue el patrón $\boldsymbol{f(g(x))g'(x)}$. Si usa la regla de la potencia para la integración y el Teorema Antiderivación de una función compuesta, se obtiene:

$f(g(x))\ g'(x)$

$\int (x^2 + 1)^2(2x)dx = \frac{(x^2+1)^{2+1}}{2+1} + C$ **(5)**

$\frac{(x^2+1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ **(6)**

Se puede comprobar utilizando la regla de la cadena para verificar que la derivada de $\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C}$ es el integrando de la integral original.

$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^3 + C$ **(7)**

$f'(x) = \frac{3}{3}(x^2 + 1)^{3-1}(x^2 + 1)' + (C)'$ **(8)**

$f'(x) = (x^{2+1})^2(2x)$ **(9)**

Cambio de variable.

Mediante un cambio de variables formal, se puede volver a escribir de nuevo toda la integral, en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{du}$ (o de cualquiera otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede llevar, más pasos escritos que el de reconocimiento del patrón ilustrado en el ejemplo anterior, es útil para integrando complicados. La técnica de cambio de variable usa la notación de Leibniz para la derivada.

Es decir, si $\boldsymbol{u = \mathrm{g}(x)},$ entonces $\boldsymbol{du = \mathrm{g}'(x)dx}$, y la integral por el Teorema Antiderivación de una función compuesta toma la forma:

$$\int f(\mathrm{g}(x))\mathrm{g}'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

En virtud de que la derivada produce el integrando original, se sabe que ha obtenido la anti derivada correcta.

Tomando en cuenta lo antes descrito, los pasos a seguir en la integración por sustitución serían los siguientes.

Directrices para hacer un cambio de variables.

1. Elije una sustitución $\boldsymbol{u = \mathrm{g}(x)}.$ Casi siempre es mejor elegir la parte interna de una función compuesta digamos una cantidad elevada a una potencia

2. Calcule $\boldsymbol{du = \mathrm{g}'(x)dx}$

3. Escriba de nuevo la integral en términos de la variable $\boldsymbol{u}$.

4. Evalúe la integral resultante en términos de $\boldsymbol{u}$.

5. Sustituya $\boldsymbol{u}$ por $\boldsymbol{\mathrm{g}(x)}$ para obtener una antiderivada en términos de $\boldsymbol{x}$.

6. Compruebe la respuesta mediante derivación.

Regla general de la potencia para la integración.

Si $\mathbf{g}$ es una función derivable de $\boldsymbol{x}$, entonces

$$\int [\mathrm{g}(x)]^n . \mathrm{g}'(x)dx = \frac{[\mathrm{g}(x)]}{n+1} + C \qquad n \text{ no es igual a } -1$$

De modo similar, si $\boldsymbol{u = \mathrm{g}(x)}$entonces

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \text{ no es igual a } -1$$

Ejercicios resueltos.

1. Complete identificando $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{du}$ para la integral.

Tomando en cuenta lo propuesto en la siguiente integral,

$$\int f(\mathrm{g}(x))\mathrm{g}'(x)dx \qquad u = \mathrm{g}(x) \qquad du = \mathrm{g}'(x)dx$$

Resuelva los siguientes ejercicios.

1.1. $\int (5x^2+1)^2(10x)dx$ $\quad$ *considere para ello* $\quad u = 5x^2+1 \quad du = 10xdx$
1.2. $\int x^2\left(\sqrt{x^3+1}\right)dx$ $\quad$ *considere para ello* $\quad u = x^3+1 \quad du = 3x^2dx$
1.3. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $\quad$ *considere para ello* $\quad u = x^2+1 \quad du = 2xdx$
1.4. $\int tan^2x.sec^2x.dx$ $\quad$ *considere para ello* $\quad u = \tan x \quad du = sec^2xdx$

2. Resolver las siguientes integrales indefinidas.

2.1. $\int (\mathbf{1}+\mathbf{2x})^{\mathbf{4}}\ \mathbf{2}\ \mathbf{dx}$ **(1)**

Se considera $\quad u = 1+2x$

Y por tanto $\quad du = 2dx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int u^4du = \frac{u^5}{5}+C$

$$\frac{u^5}{5}+C = \frac{(1+2x)^5}{5}+C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $\quad f(x) = \frac{(1+2x)^5}{5}+C$

Se deriva la función $\quad f'(x) = \frac{1}{5}(5)(1+2x)^4(1+2x)'+0$

Se resuelve $\quad f'(x) = (1+2x)^4(2)$

Se encuentra que $\quad f'(x) = 2(1+2x)^4$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{(1+2x)^5}}{\mathbf{5}}+\boldsymbol{C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\mathbf{2(1+2x)^4}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.2. $\int \left(\boldsymbol{x^2}-\mathbf{9}\right)^{\mathbf{3}}(\mathbf{2x})\ \boldsymbol{dx}$ **(2)**

Se considera $\quad u = x^2-9$

Y por tanto $\quad du = 2xdx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int u^3du = \frac{u^4}{4}+C$

$$\frac{u^4}{4}+C = \frac{\left(x^2-9\right)^4}{4}+C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{(x^2-9)^4}{4} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{4}[(4)(x^2-9)^3(x^2-9)'] + 0$

Se resuelve $f'(x) = (x^2-9)^3(2x)$

Se encuentra que $f'(x) = 2x(x^2-9)^3$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x^2-9)^4}{4} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\mathbf{2x(x^2-9)^3}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.3. $\int \sqrt{\boldsymbol{9-x^2}}(\boldsymbol{-2x})\boldsymbol{dx}$ **(3)**

Se considera $u = 9 - x^2$

Y por tanto $du = -2xdx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2u^{3/2}}{3} + C$

$$\frac{2u^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}(9-x^2)^{\frac{1}{2}}(9-x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = (9-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)$

Se encuentre que $f'(x) = \sqrt{9-x^2}(-2x)$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\sqrt{9-x^2}(-2x)}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.4. $\int \sqrt[3]{\boldsymbol{(1-2x^2)}}(\boldsymbol{-4x})\boldsymbol{dx}$ **(4)**

Se considera $u = 1 - 2x^2$

Y por tanto $du = -4x\,dx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \sqrt[3]{u}\, du = \int u^{1/3} du = \frac{u^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}}$

$$\frac{3}{4}u^{4/3} + C = \frac{3}{4}(1-2x^2)^{4/3} + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{3}{4}(1-2x^2)^{4/3} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}(1-2x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = (1-2x^2)^{\frac{1}{3}}(-4x)$

Se encuentre que $f'(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}\,(-4x)$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{4}\left(1-2x^2\right)^{4/3} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\sqrt[3]{1-2x^2}\,(-4x)}$, *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.5. $\boldsymbol{\int x^3\left(x^4+3\right)^2 dx}$ **(5)**

Se considera $u = x^4 + 3$

Y por tanto $du = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = du/4$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{4}u^2du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{2+1}}{2+1}\right) = \frac{1}{12}u^3$

$$\frac{1}{12}u^3 = \frac{1}{12}(x^4+3)^3 + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{12}(x^4+3)^3 + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{3}{12}(x^4+3)^2(x^4+3)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{(x^4+3)^2}{4}4x^3$

Se encuentra que $f'(x) = x^3(x^4+3)^2$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{12}\left(x^4+3\right)^3 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{x^3\left(x^4+3\right)^2}$, *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.6. $\int \boldsymbol{x^2\left(x^3+5\right)^4 dx}$ **(6)**

Se considera $u = x^3 + 5$

Y por tanto $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = du/3$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{3}u^4du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right) = \frac{1}{15}u^5$

$$\frac{1}{15}u^5 = \frac{1}{15}\left(\boldsymbol{x^3+5}\right)^5 + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{15}(x^3+5)^5 + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{5}{15}(x^3+5)^4(x^3+5)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3+5)^4(3x^2)$

Se encuentra que $f'(x) = x^2(x^3+5)^4$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{15}\left(x^3+5\right)^5 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{x^2\left(x^3+5\right)^4}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.7. $\int \boldsymbol{x^2\left(x^3-1\right)^4 dx}$ **(7)**

Se considera $u = x^3 - 1$

Y por tanto $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = du/3$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{3}u^4du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}\right) = \frac{1}{15}u^5$

$$\frac{1}{15}u^5 = \frac{\left(x^3-1\right)^5}{15} + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{\left(x^3-1\right)^5}{15} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{15}.5(x^3-1)^4(x^3-1)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3-1)^4(3x^2)$

Se encuentra que $f'(x) = x^2(x^3-1)^4$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x^3-1)^5}{15} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{x^2(x^3-1)^4}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.8. $\int \boldsymbol{x(4x^2+3)^3 dx}$ **(8)**

Se considera $u = 4x^2 + 3$

Y por tanto $du = 8xdx \Rightarrow xdx = du/8$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{8} u^3 du = \frac{1}{8}\left(\frac{u^{3+1}}{3+1}\right) = \frac{1}{32} u^4$

$$\frac{1}{32} u^4 = \frac{(4x^2+3)^4}{32} + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{(4x^2+3)^4}{32} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{4}{32}(4x^2+3)^{4-1}(4x^2+3)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{8}(4x^2+3)^3(8x)$

Se encuentra que $f'(x) = x(4x^2+3)^3$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{(4x^2+3)^4}{32} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{x(4x^2+3)^3}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.9. $\int \boldsymbol{t\sqrt{t^2+2}\, dt}$ **(9)**

Se considera $u = t^2 + 2$

Y por tanto $du = 2t\, dt \Rightarrow tdt = du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3} u^{3/2}$

$$\frac{1}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(t) = \frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(t^2+2)^{3/2-1}(t^2+2)' + 0$

Se resuelve $f'(t) = \frac{1}{3}(t^2+2)^{1/2}(2t)$

Se encuentra que $f'(t) = t\sqrt{t^2+2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{t\sqrt{t^2+2}}$*lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.10. $\boldsymbol{\int t^3\sqrt{t^4+5}\,dt \ \ (10)}$

Se considera $u = t^4 + 5$

Y por tanto $du = 4t^3dt \Rightarrow t^3dt = du/4$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{4}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}u^{3/2}$

$$\frac{1}{6}u^{3/2} = \frac{1}{6}(t^4+5)^{3/2} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(t) = \frac{1}{6}(t^4+5)^{3/2} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(t) = \frac{1}{6}.\frac{3}{2}.(t^4+5)^{3/2-1}.(t^4+5)' + 0$

Se resuelve $f'(t) = \frac{1}{4}.(t^4+5)^{1/2}.(4t^3) \Rightarrow (t^4+5)^{1/2}.t^3$

Se encuentra que $f'(t) = t^3\sqrt{t^4+5}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{6}(t^4+5)^{3/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{t^3\sqrt{t^4+5},}$ *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.11. $\boldsymbol{\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx \ \ (11)}$

Se considera $u = 1 - x^2$

Y por tanto $du = -2xdx \Rightarrow xdx = -du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int -\frac{5}{2}u^{\frac{1}{3}}\,du = -\frac{5}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right) = -\frac{5}{2}\left(\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)$

$-\frac{5}{2}\left(\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{15}{8}u^{\frac{4}{3}} = -\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + \mathrm{C}$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{15}{8}.\left(\frac{4}{3}\right).(1 - x^2)^{4/3-1}.(1 - x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{5}{2}(1 - x^2)^{1/3}.(-2x) \Rightarrow 5x(1 - x^2)^{1/3}$

Se encuentra que $f'(x) = 5x\sqrt[3]{1 - x^2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{15}{8}(1 - x^2)^{4/3} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{5x\sqrt[3]{1 - x^2},}$ *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.12. $\int \boldsymbol{u^2\sqrt{u^3 + 2}.\,du}$ **(12)**

Se considera $x = u^3 + 2$

Y por tanto $dx = 3u^2du \Rightarrow u^2du = dx/3$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}x^{3/2}$

$\frac{2}{9}x^{3/2} = \frac{2}{9}(u^3 + 2)^{3/2} + \mathrm{C}$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(u) = \frac{2}{9}(u^3 + 2)^{3/2} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(u) = \frac{2}{9}.\frac{3}{2}(u^3 + 2)^{3/2-1}.(u^3 + 2)' + 0$

Se resuelve $f'(u) = -\frac{1}{3}(u^3 + 2)^{1/2}(3u^2) \Rightarrow u^2(u^3 + 2)^{1/2}$

Se encuentra que $f'(u) = u^2\sqrt{u^3 + 2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(u) = \frac{2}{9}\left(u^3 + 2\right)^{3/2} + \mathrm{C}}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{u^2\sqrt{u^3 + 2},}$ *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.13. $\int \frac{x}{(1-x^2)^3} . dx \ (13)$

Se considera $u = 1 - x^2$

Y por tanto $du = -2xdx \Rightarrow xdx = -du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int -\frac{1}{2}u^{-3}\,du = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-3+1}}{-3+1}\right) = \frac{1}{4}u^{-2}$

$$\frac{1}{4}u^{-2} = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-2} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-2} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{4}.(-2).(1-x^2)^{-2-1}.(1-x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3}(-2x) \Rightarrow x(1-x^2)^{-3}$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^3}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x}{(1-x^2)^3}}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.14. $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2} . dx \ (14)$

Se considera $u = 1 + x^4$

Y por tanto $du = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = du/4$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{4}u^{-2}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right) = -\frac{1}{4}u^{-1}$

$$-\frac{1}{4}u^{-1} = -\frac{1}{4}(1+x^4)^{-1} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{1}{4}(1+x^4)^{-1} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{4}(1+x^4)^{-1-1}(1+x^4)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{4}(1+x^4)^{-2}(4x^3)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{4}(1 + x^4)^{-1} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x^3}{(1+x^4)^2}}$, *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.15. $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} . dx$ **(15)**

Se considera $u = 1 + x^3$

Y por tanto $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = du/3$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{3}u^{-2}\, du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right) = -\frac{1}{3}u^{-1}$

$$-\frac{1}{3}u^{-1} = -\frac{1}{3}(1 + x^3)^{-1} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{1}{3}(1 + x^3)^{-1} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{3}(1 + x^3)^{-1-1}.(1 + x^3)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{3}(1 + x^3)^{-2}(3x^2)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) - \frac{1}{3}(1 + x^3)^{-1} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x^2}{(1+x^3)^2}}$, *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.16. $\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2} . dx$ **(16)**

Se considera $u = 16 - x^3$

Y por tanto $du = -3x^2dx \Rightarrow x^2dx = -du/3$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int -\frac{1}{3}u^{-2}\, du = -\frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right) = \frac{1}{3}u^{-1}$

$$\frac{1}{3}u^{-1} = \frac{1}{3}(16 - x^3)^{-1} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{3}(16 - x^3)^{-1} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{3}(-1)(16 - x^3)^{-1-1}(16 - x^3)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{1}{3}(16 - x^3)^{-2}.(-3x^2)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x^2}{(16-x^3)^2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}(16 - x^3)^{-1} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x^2}{(16-x^3)^2}}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.17. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\boldsymbol{dx}$ **(17)**

Se considera $u = 1 - x^2$

Y por tanto $du = -2xdx \Rightarrow xdx = -du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right) = -u^{1/2}$

$-u^{1/2} = -(1 - x^2)^{1/2} + \mathrm{C}$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -(1 - x^2)^{1/2} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{1/2-1}.(1 - x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}.(-2x)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -(1 - x^2)^{1/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.18. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}.\boldsymbol{dx}$ **(18)**

Se considera $u = 1 + x^4$

Y por tanto $du = 4x^3dx \Rightarrow x^3dx = du/4$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}u^{1/2}$

$\frac{1}{2}u^{1/2} = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2} + \mathrm{C}$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(1 + x^4)^{1/2-1}(1 + x^4)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{4}(1 + x^4)^{-1/2}.(4x^3) \Rightarrow \frac{x^3}{(1+x^4)^{1/2}}$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^4\right)^{1/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}}$**,** *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.19. $\int \left(\mathbf{1} + \frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right).\boldsymbol{dt}$ **(19)**

Se considera $u = 1 + \frac{1}{t} \implies \frac{1}{t} = u - 1 \implies t = \frac{1}{u-1}$

Y por tanto $du = -\frac{1}{t^2}.dt \implies dt = -t^2.du \implies dt = -\left(\frac{1}{u-1}\right)^2 du$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $-\int u^3\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{u-1}\right)^2 du = -\int u^3 du$

$$-\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(t) = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 + C$

Se deriva la función $f'(t) = -\frac{1}{4}.4\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3.\left(1 + \frac{1}{t}\right)' + 0$

Se resuelve $f'(t) = -\left(1 + \frac{1}{t}\right)^3\left(-\frac{1}{t^2}\right)$

Se encuentra que $f'(t) = \left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(t) = -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\left(1+\frac{1}{t}\right)^3\left(\frac{1}{t^2}\right)}$**,** *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.20. $\int \left[\boldsymbol{x^2} + \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{3x})^2}\right].\boldsymbol{dx}$ **(20)**

Se separan los términos en diferentes integrales $\int \boldsymbol{x^2}dx + \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}x^{-2}dx$

Se resuelve cada integral indefinida $\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{1}{9}.\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}x^{-1} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}x^{-1} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{3}.3x^{3-1} - \frac{1}{9}.(-1).x^{-1-1} + 0$

Se encuentra que $f'(x) = x^2 + \frac{1}{9x^2}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}x^{-1} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{x^2 + \frac{1}{9x^2}}$ ***,*** *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.21. $\int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}x}}.\boldsymbol{dx}\ \ (\mathbf{21})$

Se considera $u = 2x \implies x = \frac{u}{2}$

Y por tanto $du = 2dx \implies dx = \frac{du}{2}$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{\frac{2u}{2}}} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{du}{u^{1/2}}\right) = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du$

$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}.2.u^{1/2} =$

$(2x)^{1/2} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = (2x)^{1/2} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{1/2-1}.(2x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{-1/2}.(2) \Rightarrow \frac{1}{(2x)^{1/2}}$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = (2x)^{1/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}x}}$ ***,*** *lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.22. $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{x}}.\boldsymbol{dx}\ \ (\mathbf{22})$

Se puede expresar como $\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Se resuelve la integral $\int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = x^{1/2} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = x^{1/2} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} (x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{2(\,x^{1/2})}$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = x^{1/2} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.23. $\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}} \boldsymbol{dx} \textbf{(23)}$

Se puede expresar como $\int (x^2 + 3x + 7)x^{-1/2} dx$

Se distribuye los productos en integrales diferentes $\int x^2 x^{\frac{1}{2}} dx + 3\int x.x^{-\frac{1}{2}} dx + 7\int x^{-\frac{1}{2}} dx$

Se reduce términos semejantes $\int x^{\frac{3}{2}} dx + 3\int x^{\frac{1}{2}} dx + 7\int x^{-\frac{1}{2}} dx$

Se resuelve $\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + 7\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 7\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + 7\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]$

$\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 14x^{\frac{1}{2}} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 14x^{\frac{1}{2}} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{2}{5} . \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} + 2.\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} + 14.\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 0$

Se resuelve $f'(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}}$

Se extrae factor común $f'(x) = x^{-1/2}(x^2 + 3x + 7)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{\boldsymbol{x^2+3x+7}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 14x^{\frac{1}{2}} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.24. $\int \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}} \boldsymbol{dt}\ \textbf{(24)}$

Se puede expresar como $\int (t+2t^2)t^{-\frac{1}{2}}dt$

Se distribuye los productos en integrales diferentes $\int t^{\frac{1}{2}}dt + 2\int t^{\frac{3}{2}}dt$

Se resuelve $\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\left[\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right] = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + 2\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right] = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1} + \frac{4}{5}.\frac{5}{2}t^{\frac{5}{2}-1} + 0$

Se resuelve $f'(x) = t^{\frac{1}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}}$

Se extrae factor común $f'(x) = t^{-1/2}(t+2t^2)$

Se encuentra que $f'(x) = \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.25. $\boldsymbol{\int t^2\left(t-\frac{2}{t}\right)dt}$ **(25)**

Se distribuye los productos en integrales diferentes $\int t^3dt - 2\int tdt$

Se resuelve $\frac{t^{3+1}}{3+1} - 2\frac{t^2}{2} = \frac{t^4}{4} - t^2 + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{t^4}{4} - t^2 + C$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{4}4t^3 - 2t + 0$

Se resuelve $f'(x) = t^3 - 2t$

Se encuentra que $f'(x) = t^2\left(t-\frac{2}{t}\right)$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{t^4}{4} - t^2 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{t^2\left(t-\frac{2}{t}\right)}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.26. $\boldsymbol{\int \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{4t^2}\right)dt}$ **(26)**

Se separan los términos en diferentes integrales $\int \frac{t^3}{3}dt + \int \frac{dt}{4t^2}$

Se resuelve $\frac{1}{3}\int t^3dt+\frac{1}{4}\int t^{-2}dt=\frac{1}{3}.\frac{t^4}{4}+\frac{1}{4}.\frac{t^{-2+1}}{-2+1}=\frac{t^4}{12}-\frac{1}{4}t^{-1}+C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x)=\frac{t^4}{12}-\frac{1}{4}t^{-1}+C$

Se deriva la función $f'(x)=\frac{4t^3}{12}+\frac{1t^{-1-1}}{4}+0$

Se resuelve $f'(x)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^{-2}}{4}$

Se encuentra que $f'(x)=\frac{\boldsymbol{t^3}}{\boldsymbol{3}}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4t^2}}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{t^4}{12}-\frac{1}{4}t^{-1}+C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\frac{t^3}{3}+\frac{1}{4t^2}}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.27. $\boldsymbol{\int(9-y)\sqrt{y}\,dy}$ **(27)**

Se distribuye los productos en integrales diferentes $9\int y^{\frac{1}{2}}dy-\int y.y^{\frac{1}{2}}dy$

Se resuelve $9\int y^{\frac{1}{2}}dy-\int y^{\frac{3}{2}}dy=9\,\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}=9.\frac{2}{3}.y^{\frac{3}{2}}-\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}$

Se simplifica $6y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x)=6y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+C$

Se deriva la función $f'(x)=6\,\frac{3}{2}y^{\frac{3}{2}-1}-\frac{2}{5}.\frac{5}{2}y^{\frac{5}{2}-1}+0$

Se resuelve $f'(x)=9y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}=y^{\frac{1}{2}}(9-y)$

Se encuentra que $f'(x)=(9-y)\sqrt{y}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x)=6y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{(9-y)\sqrt{y}}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.28. $\boldsymbol{\int 2\pi y\left(8-y^{\frac{3}{2}}\right)dy}$ **(28)**

Se distribuye los productos en integrales diferentes $2\pi\left[\int 8ydy-\int y.y^{\frac{3}{2}}dy\right]$

Se resuelve $2\pi\left[8\,\frac{y^2}{2}-\frac{y^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]=2\pi\left[4y^2-\frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]=8\pi y^2-\frac{4\pi}{7}y^{\frac{7}{2}}+C$

Minerva Journal
ISSN-e: 2697-3650 vol.3, Issue. 9, (pp. 62-90)

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = 8\pi y^2 - \frac{4\pi}{7} y^{\frac{7}{2}} + C$

Se deriva la función $f'(x) = 8\pi(2)y^{2-1} - \frac{4\pi}{7}.\frac{7}{2}y^{\frac{7}{2}-1} + 0$

Se resuelve $f'(x) = 16\pi y - 2\pi y^{\frac{5}{2}}$

Se encuentra que $f'(x) = 2\pi y(8 - y^{\frac{3}{2}})$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = 8\pi y^2 - \frac{4\pi}{7} y^{\frac{7}{2}} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{2\pi y(8 - y^{\frac{3}{2}})}$ *, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

2.29. $\int \boldsymbol{sec2xtan2xdx}$ **(29)**

Se puede expresar como $\int \frac{1}{cos2x}.\frac{sen2x}{cos2x}.dx$

Se simplifica $\int \frac{sen2x}{cos^2 2x}.dx$

Se considera $u = cos2x$

Y por tanto $du = -2sen2xdx$

Al remplazar y resolver se obtiene $-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}.\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}u^{-1} = \frac{1}{2}(cos2x)^{-1} + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{2}(cos2x)^{-1} + C$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{2}(cos\, 2x)^{-1-1}(cos2x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{1}{2}(cos\, 2x)^{-2}[-2sen(2x)] \Rightarrow \frac{sen2x}{cos^2 2x} \Rightarrow \frac{1}{cos2x}.\frac{sen2x}{cos2x}.$

Se encuentra que $f'(x) = sec2xtan2xdx$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}(cos2x)^{-1} + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{sec2xtan2xdx}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

Identidades trigonométricas básicas

1. $sen^2 x + cos^2 x = 1$
2. $sec^2 x + 1 = tan^2 x$
3. $csc^2 x + 1 = cot^2 x$

4. $sen^4x + cos^4x = 1 - 2sen^2x.cos^2x$
5. $tanx + cotx = secxcscx$
6. $sec^2x + csc^2x = sec^2x.csc^2x$

3. Determinar las siguientes integrales de funciones trigonométricas indefinidas.

3.1. $\int \boldsymbol{\pi sen\pi x dx}$ $(\mathbf{1})$

Se considera $u = \pi x$

Y por tanto $du = \pi\, dx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int senu\, du = -cosu$

$$-cosu = -cos\pi x + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -cos\pi x + C$

Se deriva la función $f'(x) = -(-sen\pi x)(\pi x)' + 0$

Se encuentra que $f'(x) = \pi sen\pi x$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -cos\pi x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{\pi sen\pi x}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.2. $\int \mathbf{4}\boldsymbol{x^3senx^4dx}$ $(\mathbf{2})$

Se considera $u = x^4$

Y por tanto $du = 4x^3\, dx$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int senu\, du = -cosu$

$$-cosu = -cosx^4 + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -cosx^4 + C$

Se deriva la función $f'(x) = -(-senx^4)(x^4)' + 0$

Se encuentra que $f'(x) = 4x^3senx^4$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -cosx^4 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\mathbf{4}\boldsymbol{x^3senx^4}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.3. $\int \boldsymbol{sen2x.dx}$ $(\mathbf{3})$

Se considera $u = 2x$

Y por tanto $du = 2\ dx \Rightarrow dx = du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{2} senu\ du = \frac{1}{2}\ (-cosu)$

$$\frac{1}{2}\ (-cosu) = -\frac{1}{2}\mathrm{cos2x} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{cos2x} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{2}(-sen2x)(2x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{2} sen2x(2)$

Se encuentra que $f'(x) = sen2x$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}cos2x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{sen2x}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.4. $\int \boldsymbol{cos6x.dx}$ $(\mathbf{4})$

Se considera $u = 6x$

Y por tanto $du = 6\ dx \Rightarrow dx = du/6$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{6} cosu\ du = \frac{1}{6}\ senu$

$$\frac{1}{6}\ senu = \frac{1}{6}\mathrm{sen6x} + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = \frac{1}{6}\mathrm{sen6x} + \mathrm{C}$

Se deriva la función $f'(x) = \frac{1}{6} cos6x(6x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{6} cos6x(6)$

Se encuentra que $f'(x) = cos6x$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}sen6x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{cos6x}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.5. $\int \boldsymbol{xsenx^2.dx}$ **(5)**

Se considera $u = x^2$

Y por tanto $du = 2x\,dx \Rightarrow xdx = du/2$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int \frac{1}{2} senu\,du = \frac{1}{2}\,(-cosu)$

$$\frac{1}{2}\,(-cosu) = -\frac{1}{2}\cos x^2 + \mathrm{C}$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{1}{2}cosx^2 + C$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{2}\,(-senx^2)(x^2)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{1}{2}\,(-senx^2)(2x)$

Se encuentra que $f'(x) = xsenx^2$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{2}cosx^2 + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{xsenx^2}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.6. $\int \boldsymbol{sec(1-x)\,tan(1-x)\,dx}$ **(6)**

Se considera $u = 1 - x$

Y por tanto $du = -1dx \Rightarrow dx = -du$

Sustituyendo en la fórmula original de la integral $\int -secu\,tanu = -secu$

$$-secu = -\sec(1-x) + C$$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\sec(1-x) + C$

Se deriva la función $f'(x) = -\sec(1-x)\tan(1-x)(1-x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -sec(1-x)\,tan(1-x)(-1)$

Se encuentra que $f'(x) = \sec(1-x)\tan(1-x)$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -sec(1-x) + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{sec(1-x)\,tan(1-x)}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.7. $\int \boldsymbol{cot^2x.dx}$ **(7)**

Considerando la identidad trigonométrica $csc^2x = 1 + cot^2x \Rightarrow cot^2x = csc^2x - 1$

Se sustituye en la integral original $\int (csc^2x - 1)dx$

Se separan los términos en diferentes integrales $\int csc^2x\, dx - \int dx$

Se resuelve cada integral $-cotx - x + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -cotx - x + C$

Se deriva la función $f'(x) = -(-csc^2x) - 1 + 0$

Se resuelve $f'(x) = csc^2x - 1$

Se encuentra que $f'(x) = cot^2x$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -cotx - x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{cot^2x}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.8. $\int \boldsymbol{cot^4x.dx}$ (8)

Se puede expresar como $\int cot^2x\, cot^2x\, dx$

Considerando la identidad trigonométrica $csc^2x = 1 + cot^2x \Rightarrow cot^2x = csc^2x - 1$

Se sustituye en la integral $\int (csc^2x - 1)\, cot^2xdx$

Se distribuyen los productos en diferentes integrales $\int csc^2xcot^2x\, dx - \int cot^2x\, dx$

Se resuelve cada integral, considerando lo siguiente:

En la expresión $\int csc^2xcot^2x\, dx$

Se considera $u = cotx$

Y por tanto $du = -csc^2dx \Rightarrow csc^2dx = -du$

Se reemplaza $\int -u^2\, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\boldsymbol{cot^3x}}{\boldsymbol{3}}$ $\boldsymbol{(1)}$

Mientras tanto en la expresión $-\int cot^2x\, dx$

Con funciones trigonométricas se puede expresar como $-\int \frac{cos^2x}{sen^2x}\, dx \Rightarrow -\int \frac{1-sen^2x}{cos^2x}$

Se separa en diferentes integrales $-\int \frac{1}{sen^2x} dx + \int \frac{sen^2x}{sen^2x} dx \Rightarrow -\int csc^2xdx + \int dx$

Al resolver se tiene que $\boldsymbol{cotx + x}$ **(2)**

Al unir las expresiones **(1 y 2)** se tiene $-\frac{cot^3x}{3} + cotx + x + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{cot^3x}{3} + cotx + x + C$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{3}(cot^3x)' + (cotx)' + (x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = -\frac{3}{3}cot^2x(cotx)' - csc^2x + 1 \Rightarrow -cot^2x(-csc^2x) - csc^2x + 1$

Se simplifica $f'(x) = cot^2xcsc^2x - [csc^2x - 1] \Rightarrow csc^2xcot^2x - cot^2$

$f'(x) = cot^2x(csc^2x - 1) \Rightarrow cot^2x(cot^2x)$

Se encuentra que $f'(x) = cot^4x$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{cot^3x}{3} + cotx + x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* $\boldsymbol{cot^4x}$*, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

3.9. $\int \boldsymbol{sen2x.cos2x.dx}$ (9)

Considerando la propiedad $\left(senAx.cosBx = \frac{1}{2}[sen(A-B)x + sen(A+B)x]\right)$

Se expresa la integral como $\frac{1}{2}\int [sen(2-2)x + sen(2+2)x]dx$

Se simplifican términos semejantes $\frac{1}{2}\int [sen0x + sen4x]dx = \frac{1}{2}\int sen4x.dx$

Se considera $u = 4x$

Y por tanto $du = 4dx \Rightarrow dx = du/4$

Se reemplaza $\frac{1}{2}\int \frac{1}{4}senu\, du = \frac{1}{8}\,(-cosu) = -\frac{1}{8}cos4x + C$

Ahora se realiza la comprobación

Se tiene que $f(x) = -\frac{1}{8}cos4x + C$

Se deriva la función $f'(x) = -\frac{1}{8}(-sen4x)(4x)' + 0$

Se resuelve $f'(x) = \frac{1}{8}sen4x(4) \Rightarrow \frac{1}{2}sen4x \Rightarrow \frac{1}{2}$ (2sen2xcos2x)

Se encuentra que $f'(x) = \mathrm{sen2x\,cos2x}$

La comprobación indica que al derivar la función $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{8}cos4x + C}$ *se obtiene una expresión equivalente al integrando de la función original* **sen2x cos2x***, lo cual demuestra que la operación se ha realizado correctamente.*

CONCLUSIONES

Se considera de una gran importancia para los estudiantes el solucionario planteado de integrales indefinidas, a través de una sustitución o cambio de variables, pues el mismo contribuye de manera decisiva en el desarrollo de las competencias necesarias en el futuro profesional. Además, juega un rol muy importante en la comprensión de los pasos necesarios con el fin de darle solución a este tipo de integrales, ganando vista en cuanto a las estrategias de solución recomendada para las mismas.

REFERENCIAS

[1] G. G. Torres, Cálculo integral: un nuevo enfoque, Ciudad de México: Grupo Editorial Patria, 2019.

[2] G. G. Talavera, Problemas de cálculo diferencial e integral, Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2010.

[3] W. V. Bastidas, Cálculo Integral: la integral indefinida y métodos de integración, Santa Marta: Editorial Unimagdalena, 2014.

[4] G. G. Torres, Cálculo integral: Serie Universitaria Patria, Ciudad de México: Grupo Editorial Patria, 2015.

[5] S. E. G. Calderón, B. E. L. Silva y P. T. Salazar, Cálculo integral, Ciudad de México: Grupo Editorial Éxodo, 2012.

[6] F. Cerecedo, J. O. Campos y F. J. Ortiz, Cálculo integral, Ciudad de México: Grupo Editorial Patria, 2015.

[7] E. H. Sastoque, E. E. Caballero y W. V. Bastidas, Técnicas de integración en el cálculo integral, 1 ed., Santa Marta: Editorial Unimagdalena, 2022.

[8] F. M. Téllez, M. P. C. Uribe y C. A. I. Salomón, Cálculo integral, 4a. ed. ed., Ciudad de México: Grupo Editorial Éxodo, 2019.

[9] J. M. Fernández Barroso y J. A. Fernández Muriel, Cálculo de integrales: principales métodos y ejercicios resueltos, Madrid: Editorial Tébar Flores, 2021.

[10] J. J. L. G. Guio, J. P. Cardona y J. C. C. Vásquez, Cálculo integral: técnicas de integración, Bogotá: Ediciones de la U, 2016.

[11] R. Larson, B. Edwards y R. Hostetler, Cálculo diferencial e integral, México: McGraw-Hill Interamericana, 2014.