¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

el triángulo de Pascal es fractal?

El triángulo de Sierpinski. Este conjunto es un famoso fractal que se puede obtener, a través de infinitas iteraciones, de diversos modos. Uno de ellos es el siguiente:

(1) Empezamos con un triángulo $T_0 = \triangle ABC$ (con interior incluido).

(2) Le quitamos a T_0 el interior de su triángulo central, i.e. el triángulo formado por los puntos medios de $\triangle ABC$ (así obtenemos T_1).

(3) Repetimos el paso (2) infinitas veces con los triángulos que van quedando (así obtenemos T_{n+1} a partir de T_n para $n \in \mathbb{N}$).

El conjunto T_∞ de puntos que quedan sin quitar luego de repetir infinitas veces el proceso anterior recibe el nombre de *triángulo de Sierpinski.*

En la imagen de abajo (hecha con Geogebra) vemos T_4, es decir los resultados obtenidos luego de haber iterado 4 veces a partir de un triángulo equilátero y de un triángulo rectángulo con vértices en los puntos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ en coordenadas cartesianas, respectivamente:

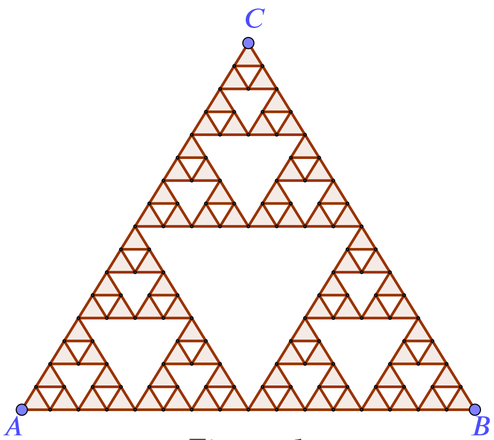

Figura 1

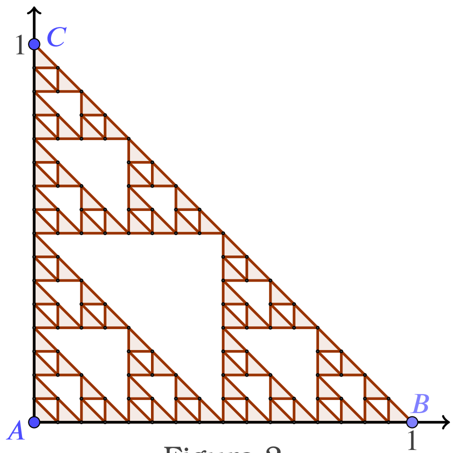

Figura 2

Usando coordenadas cartesianas y el triángulo rectángulo de la Figura 2, es sencillo describir otro método para obtener el triángulo Sierpinski:

(1′) Sea $T_0 = \triangle ABC$ rectángulo (con interior incluido) con $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$.

(2′) Sea $\frac{1}{2} \cdot T_0$ el resultado de re-escalar T_0 con factor $\frac{1}{2}$. Es decir que $\frac{1}{2} \cdot T_0$ es el triángulo rectángulo, con interior incluido, de vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2})$. Consideramos el subconjunto T_1 de T_0 formado por 'copias' de $\frac{1}{2} \cdot T_0$ como sigue:

$$T_1 = \tfrac{1}{2} \cdot T_0 \quad \cup \quad \tfrac{1}{2} \cdot T_0 + (\tfrac{1}{2},0) \quad \cup \quad \tfrac{1}{2} \cdot T_0 + (0,\tfrac{1}{2}).$$

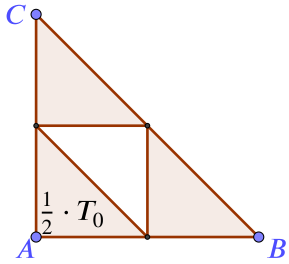

Figura 3: El conjunto T_1

(3′) Repetimos el paso (2′) infinitas veces, es decir que, en el n-ésimo paso definimos

$$T_{n+1} = \tfrac{1}{2} \cdot T_n \quad \cup \quad \tfrac{1}{2} \cdot T_n + (\tfrac{1}{2}, 0) \quad \cup \quad \tfrac{1}{2} \cdot T_n + (0, \tfrac{1}{2}).$$

Resulta que $T_{n+1} \subset T_n$ y el triángulo de Sierpinski es el conjunto límite de los T_n, estrictamente hablando el triángulo de Sierpinski es

$$T_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n.$$

El triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal, también conocido como triángulo de Tartaglia, es el triángulo que forman los números combinatorios

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

con $0 \leq k \leq m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, donde $0! = 1$. Es decir, para cada m, en la fila m-ésima ponemos los números $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$. Las primeras 7 filas son

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}
\end{array}$$

Sabemos que los lados del triángulo de Pascal están formados por 1's y que el resto de los elementos de cada fila se obtienen sumando los dos vecinos de la fila que está inmediatamente arriba. A continuación vemos el triángulo de Pascal con sus valores numéricos, realizado en esquemas de triángulo equilátero y rectángulo respectivamente, en analogía con las Figuras 1 y 2.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

¿Existe alguna relación entre los triángulos que definimos? ¡Veamos que sí!

Relación entre los triángulos de Sierpinski y Pascal. Es sorprendente que si “miramos la paridad” de los números del triángulo de Pascal obtenemos el fractal del triángulo de Sierpinski. Con “mirar la paridad” nos referimos a reemplazar, en el triángulo de Pascal, los números pares por un 0 y los impares con un 1. Así, el triángulo (rectángulo) de Pascal anterior queda:

1						
1	1					
1	0	1				
1	1	1	1			
1	0	0	0	1		
1	1	0	0	1	1	
1	0	1	0	1	0	1

Como aquí hemos hecho muy pocas filas, no alcanzamos a percibir que vaya quedando el triángulo de Sierpinski, pero en la Figura 4 mostramos la paridad del triángulo de Pascal en la que están hechas las filas desde $m = 0$ hasta $m = 63$.

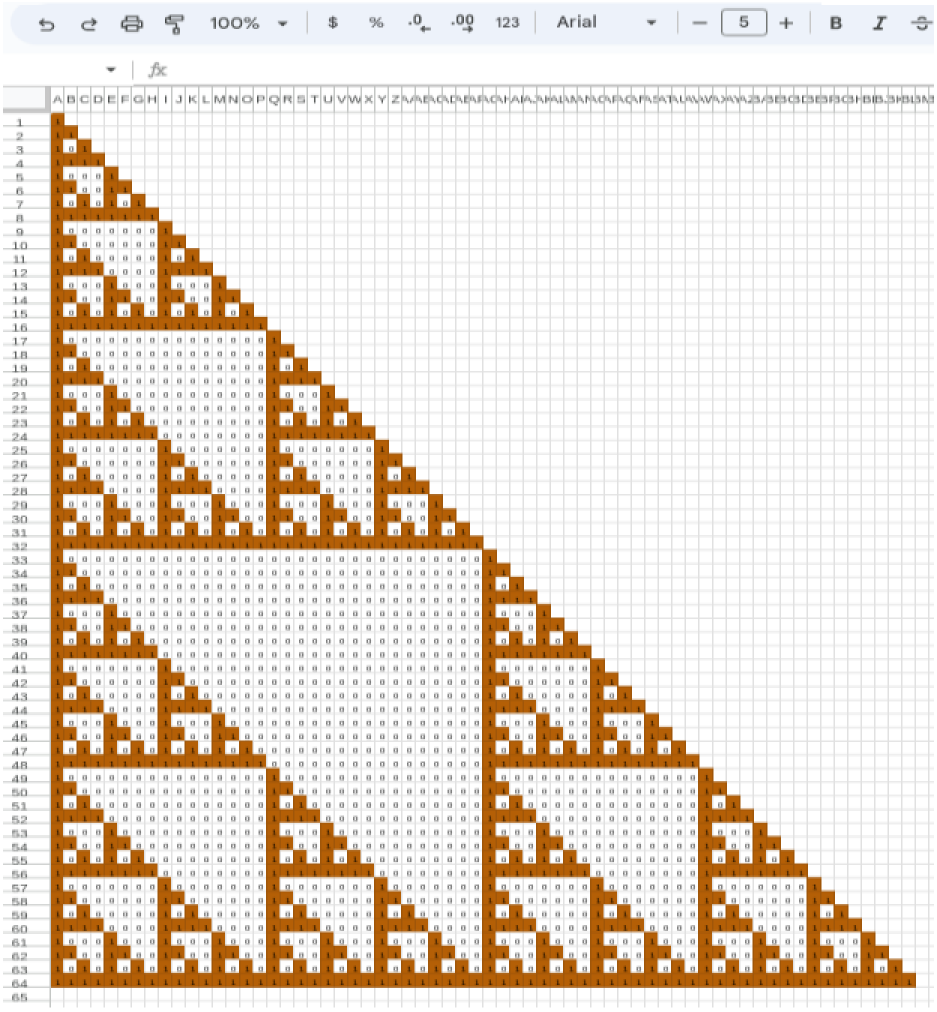

Figura 4

La Figura 4 ha sido realizada en Google Sheets. Para realizarla, los principales pasos son colocar los 1's de la primera columna. Luego escribir en la celda B2 la siguiente función

```
=SI(Y(ESBLANCO(A1);ESBLANCO(B1));;SI(ESBLANCO(B1);1;RESIDUO(B1+A1;2)))
```

y luego extender esta función automáticamente a todas las demás celdas que están a la derecha y abajo de la celda B2. Esto coloca los 1's y los 0's del triángulo, y deja en blanco las celdas a la derecha del triángulo. Luego, la coloración se realiza con "formato condicional" de celdas.

¿Cómo se explica que queden los mismos fractales? El secreto está en ¡el sistema binario! Es claro que usamos 0's y 1's en el triángulo de Pascal, pero ¿cómo aparecen en el triángulo de Sierpinski? y ¿cómo se relacionan con los 0's y 1's de Pascal? Veamos los detalles.

Triángulo de Pascal. El Teorema de Lucas dice exactamente cuándo $\binom{m}{n}$ es par en términos de las expresiones en binario de m y n. Concretamente, si

$$m = a_k 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_2^2 + a_1 2^1 + a_0, \qquad a_i = 0 \text{ ó } 1,$$

$$n = b_k 2^k + b_{k-1}2^{k-1} + \cdots + b_2^2 + b_1 2^1 + b_0, \qquad b_i = 0 \text{ ó } 1,$$

entonces $\binom{m}{n}$ es par si y solo si $a_j = 0$ y $b_j = 1$ para algún $j = 0, \ldots, k$[1].

En el triángulo de paridad de Pascal de la Figura 4 las filas van desde $i = 1$ hasta $i = 64$ y las columnas van desde la A hasta la BL. Por conveniencia, pensamos que las columnas van desde $j = 0$ hasta $j = 63$. En general las filas irán desde $i = 1$ hasta $i = 2^N$ y las columnas desde $j = 0$ hasta $j = 2^N - 1$, y en la celda (i, j) estará la paridad del número $\binom{i-1}{j}$.

Pero si consideramos coordenadas cartesianas (x, y), cuyo origen está en la celda $(i, j) = (2^N, 0)$, el cambio de coordenadas es $(x, y) = (2^N - i, j)$ y por lo tanto:

La celda (x, y) tiene la paridad de

$$\binom{2^N - 1 - x}{y}.$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Lucas y que las expresiones en binario de x y la de $2^N - 1 - x$ tienen intercambiados los 1's por los 0's, resulta que

La celda (x, y) tiene un 0

si y solo si $a_j = 1$ y $b_j = 1$ para algún $j = 0, \ldots, N$ donde

$$x = a_k 2^N + a_{k-1}2^{k-1} + \cdots + a_2^2 + a_1 2^1 + a_0,$$

$$y = b_k 2^N + b_{k-1}2^{k-1} + \cdots + b_2^2 + b_1 2^1 + b_0,$$

son las expresiones de x e y en binario.

[1] En verdad, el Teorema de Lucas describe el resto de dividir el coeficiente binomial por p para cualquier primo p. Ver, por ejemplo, Wikipedia. Nosotros solo lo estamos usando para $p = 2$.

Triángulo de Sierpinski. Por otro lado, miremos lo que hacemos en las iteraciones (1′), (2′) y (3′) del triángulo de Sierpinski.

El triángulo rectángulo original es el siguiente conjunto

$$T_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, y \ \text{ y } \ x + y \leq 1\}.$$

Resulta que, en sistema binario, el conjunto T_0 se describe de manera muy sencilla. Recordemos que en binario

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}1 \qquad \tfrac{1}{4} = 0{,}01 \qquad \tfrac{3}{4} = 0{,}11.$$

También recordemos que cuando un número tiene desarrollo binario finito, también tiene un desarrollo binario infinito debido a que

$$1 = 0{,}1111....$$

Así,

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}01111... \qquad \tfrac{1}{4} = 0{,}001111... \qquad \tfrac{3}{4} = 0,101111....$$

Para describir T_0, observemos que si expresamos a x e y en sistema binario:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}a_1a_2a_3\ldots, &\quad \text{con } a_i &= 0 \text{ ó } 1, \\ y &= 0{,}b_1b_2b_3\ldots, &\quad \text{con } b_i &= 0 \text{ ó } 1, \end{aligned}$$

la condición $x + y \leq 1$ se traduce en que x e y tienen representación binaria tal que a_1 y b_1 no son simultáneamente iguales a 1. En efecto, si $a_1 = 1$ entonces $x \geq \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y \leq \frac{1}{2}$. Si $y < \frac{1}{2}$ entonces $b_1 = 0$. Si $y = \frac{1}{2}$ la representación infinita de $y = \frac{1}{2}$ tiene $b_1 = 0$.

De este modo,

$$T_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots, & \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}b_1b_2b_3\ldots, & \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \ \text{ y } \ a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}.$$

Ahora miremos el paso (2′). Resulta que:

$$\tfrac{1}{2}\cdot T_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}0a_1a_2a_3\ldots, & \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}0b_1b_2b_3\ldots, & \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \ \text{ y } \ a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\},$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot T_0 + (\tfrac{1}{2}, 0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}1a_1a_2a_3\ldots, & \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}0b_1b_2b_3\ldots, & \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \ \text{ y } \ a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\},$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot T_0 + (0, \tfrac{1}{2}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}0a_1a_2a_3\ldots, & \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}1b_1b_2b_3\ldots, & \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \ \text{ y } \ a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \right\}.$$

En definitiva, tenemos que

$$T_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots, & \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}b_1b_2b_3\ldots, & \text{con } b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} a_1 = 0 \text{ ó } b_1 = 0 \\ \text{y} \\ a_2 = 0 \text{ ó } b_2 = 0 \end{array} \right\}.$$

Siguiendo ahora con el paso $(3')$ obtenemos que el conjunto de Sierpinski es

$$T_\infty = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{ll} x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots, & a_i = 0 \text{ ó } 1 \\ y = 0{,}b_1b_2b_3\ldots, & b_i = 0 \text{ ó } 1 \end{array} \text{ y, para todo } i \geq 1,\ a_i = 0 \text{ ó } b_i = 0 \right\}.$$

Luego, hemos mostrado que el triángulo de paridad de Pascal y el triángulo de Sierpinski están en correspondencia y por lo tanto, podemos afirmar que el triángulo de Pascal es fractal.

Gracias al teorema de Lucas ya mencionado, para cada primo p se podría hacer lo mismo mirando triángulos de Pascal módulo p. Luego, usando los desarrollos p-ádicos de los números entre 0 y 1, se podría obtener que los triángulos de Pascal módulo p son también fractales.

Wacław Franciszek Sierpiński (14/3/1882 – 21/10/1969) fue un matemático polaco, muy conocido por sus notables aportes a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. En teoría de conjuntos realizó importantes contribuciones para el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado. Publicó más de 700 trabajos y 50 libros. Tres conocidos fractales llevan su nombre: el triángulo de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski y la curva de Sierpinski. También los números de Sierpinski en teoría de números han sido nombrados así en su honor.

Blaise Pascal (19/6/1623 – 19/8/1662) fue un matemático, físico y filósofo francés. Sus contribuciones a la matemática y a la historia natural incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío.
Entre sus descubrimientos e invenciones como científico destacan: el triángulo de Pascal, el principio de Pascal, la pascalina. La unidad de presión "pascal" lleva su nombre en honor a sus contribuciones en hidrodinámica, hidrostática y sus experimentos de la presión y el vacío con un barómetro.5

François Édouard Anatole Lucas (4/03/1842 – 3/10/1891), conocido como Édouard Lucas, fue un reconocido matemático francés. Trabajó en el Observatorio de París, y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le recuerda, sobre todo, por sus trabajos acerca de la sucesión de Fibonacci, que él denominó de esa manera, y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también porque fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos, como el de las Torres de Hanói.