



UN CUESTIONARIO Y ESTRATEGIAS SOBRE LOS PROMEDIOS

Alexandre Joaquim Garrett
Juan Antonio García Cruz

Universidad de La Laguna

Resumen

La media aritmética y los promedios en general, constituyen un contenido importante en la enseñanza previa a la universidad en diferentes países. A pesar de ser un contenido básico, su comprensión genera enormes dificultades, de acuerdo con los resultados señalados en diferentes estudios internacionales. El éxito en la enseñanza y aprendizaje de los promedios pasa también por el conocimiento de los errores y dificultades que los alumnos presentan en la comprensión de estos contenidos, pues este conocimiento ayuda a los profesores a adoptar vías adecuadas para su enseñanza. En este trabajo, presentamos y justificamos la fiabilidad de un cuestionario que hemos desarrollado sobre los promedios. Analizamos, además, algunas estrategias presentadas por el alumnado en Luanda (Angola) y Tenerife (España), en la resolución de un problema de cálculo de media ponderada.

Abstract

The Arithmetic Average and the averages in general, constitute an important content in teaching previous to the university in different countries. In spite of being a basic content, its understanding generates enormous difficulties, in agreement with the results indicated in different international studies. The success in the teaching and learning of the averages also takes place through the knowledge of the misconceptions and difficulties that the students present in the understanding of these contents, so, this knowledge helps the professors to adopt ways adapted for their education. In this paper, we present and we justify the reliability of a questionnaire that we have developed on the averages. In addition, we analyzed some strategies presented by the students in Luanda (Angola) and Tenerife (Spain) in the resolution of a problem of weighted average.

Introducción

La media aritmética es un concepto abordado en los planes curriculares de los diferentes países, en los diferentes niveles de enseñanza. Su trascendencia es una realidad en nuestra vida social y en la actividad profesional. Eso hace que crezca el interés por el conocimiento de los diferentes aspectos didácticos que involucran su estudio, procurando descubrir las vías más adecuadas para impartir este concepto, que no se limiten a la utilización mecánica del algoritmo de cálculo.

El éxito en la enseñanza y aprendizaje de este concepto pasa necesariamente por el conocimiento de los errores y dificultades que los alumnos presentan en su comprensión. Este análisis proporcionaría a los profesores valiosas informaciones sobre cómo el alumnado razona y qué medidas adoptar en las circunstancias correspondientes.

Aunque las investigaciones realizadas en este campo nos hayan aportado diferentes resultados sobre los distintos aspectos que involucran la comprensión de este concepto, nosotros pensamos que todavía hay muchas reflexiones por hacer en torno al mismo.

Algunos resultados previos

Los diferentes trabajos que hemos revisado, apuntan a que el alumnado se enfrenta con inmensas dificultades en la comprensión de la media, a pesar de ser este concepto un concepto elemental: por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que incluso alumnos universitarios, no ponderan adecuadamente los valores al resolver problemas de media ponderada y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada. Según Strauss y Bichler (1988), hay una mejora en la comprensión del concepto de media aritmética con la edad, y se observan distintas dificultades en la comprensión de

las propiedades de este concepto fundamentalmente las que indican que “la suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero”, que “hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media”, y que “la media es un *representante* de los datos a partir de los que han sido calculados”; En el estudio de Cai (1995), se ha encontrado un 90% de alumnos que conocían el mecanismo de “sumar todos y dividir” que constituye el algoritmo de cálculo de la media, sin embargo, sólo algunos de ellos sabían determinar un valor desconocido en un conjunto de datos de media dada; Batanero Godino y Navas (1997) han identificado errores conceptuales y dificultades de aplicación práctica de los conocimientos sobre promedios en maestros de Primaria en formación; Cobo y Batanero (2004) observan que en torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media ponderada dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente. Asimismo, indican que a pesar de existir una buena comprensión de la media, algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia, un resultado obtenido por Mevarech (1983).

Objetivos

El propósito de este trabajo es describir el desarrollo de un cuestionario de evaluación de conocimientos y dificultades en la comprensión de los promedios, del alumnado que está finalizando la enseñanza secundaria, justificar su validez y fiabilidad así como mostrar algunas estrategias y errores encontrados en un estudio comparativo entre el alumnado de Luanda (Angola) y Tenerife (España).

El cuestionario se ha elaborado teniendo en cuenta algunos estudios internacionales y nacionales que se han realizado. Un marco de referencia es el trabajo de Garfield (2003) que describe un instrumento de evaluación del

razonamiento estadístico (*Assessing Statistical Reasoning*), utilizado por diferentes investigadores. Se trata de un cuestionario elaborado por Konold y Garfield, que consta de 20 preguntas de elección múltiple sobre conceptos básicos de estadística y probabilidad; Algunos de los ítemes del cuestionario de Garfield fueron utilizados por Batanero, Godino y Navas (1997), en un estudio realizado con alumnos del curso de formación de profesores, para averiguar sus concepciones sobre los promedios; Asimismo, en García Cruz, J.A. y García Alonso, I. (2004), encontramos un resumen de tres investigaciones relacionadas con la media, y una de ellas, se refiere precisamente a cuatro problemas del cuestionario que hemos mencionado.

Sin embargo, teniendo en cuenta que todos los problemas presentados en el cuestionario de Garfield (2003) son de respuestas de elección múltiple, nuestra opinión es que esta forma de evaluación no proporciona una información fiable sobre el verdadero saber del alumno, ya que no permite saber hasta que punto el alumno escoge la respuesta al azar o responde con criterio. Este hecho, nos ha motivado a elaborar un cuestionario con características diferenciadas.

El cuestionario

Nuestro cuestionario consta de siete ítemes, algunos con distintos apartados. Con el mismo, pretendemos averiguar cómo interpreta el alumnado la media aritmética, cómo comprenden y usan el algoritmo de la media (simple o ponderada), cómo analizan e interpretan los datos presentados gráficamente, qué estrategias usan en la solución de problemas de cálculo directo de la media (simple o ponderada), qué criterios usan para comparar dos conjuntos de medias iguales y cómo construyen una distribución de media dada. Para tal fin, hemos seleccionado dos tipos de ítemes: los de elección múltiple (cerrados) y los abiertos. Combinamos, además, los formatos texto, texto-tabla y texto-gráfico.

En cuanto a los datos numéricos hemos utilizado números enteros y decimales. Hemos cuidado el contexto de forma que resulte cercano al alumnado puesto que, desde el punto de vista didáctico, la contextualización de las tareas facilita en gran medida su resolución. Los ítemes se denominan según el contexto que los define.

A continuación se presentan los problemas:

Problema 1: Pesos

Nueve estudiantes pesaron un objeto pequeño con un mismo instrumento en una clase de ciencias. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6'2	6'0	6'0	15'3	6'1	6'3	6'2	6'15	6'2
-----	-----	-----	------	-----	-----	-----	------	-----

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Cuál de los siguientes métodos les recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

- a. Usar el número más común, que es 6'2.*
- b. Usar 6'15, puesto que es el dato con más cifras decimales.*
- c. Sumar los 9 números y dividir la suma por 9.*
- d. Desechar el valor 15'3, sumar los otros 8 números y dividir por 8.*

Es un problema extraído del trabajo de Garfield (2003), al que hicimos algunas adaptaciones. En el distractor b) del problema original se había utilizado la expresión “*most accurate*” que hemos traducido como “más preciso”. Nosotros, la hemos cambiado por la expresión “con más cifras decimales”, puesto que en el enunciado se plantea que los alumnos quieren determinar el peso del objeto con mayor precisión posible, de acuerdo con la expresión “*accurately*” referida en el texto. Pensamos que de no ser así, podría llevar a los alumnos a relacionar la precisión referida en el enunciado de forma

general y la destacada en el apartado b), lo que probablemente les induciría a elegir este distractor como respuesta, sin analizar las otras opciones presentadas.

Con este problema se pretende evaluar el uso de la media como mejor estimación de un valor desconocido, en presencia de errores de medida; la influencia de los valores atípicos en el cálculo de la media; así como la confusión entre media y moda.

De esta forma, si el alumno elige el apartado a) significa que indica la moda como la mejor estimación del peso del objeto, si elige el apartado b) confunde “precisión” con cantidad de cifras decimales, si selecciona el apartado c) realiza el cálculo algorítmico de la media, y se indica la opción d), inferimos que conoce que la media es sensible a valores extremos, luego, descarta el valor atípico, antes de calcularla.

Problema 2: En una clase

Una profesora decide estudiar cuántas preguntas hacen sus alumnos. El registro del número de preguntas hechas por sus 8 alumnos durante una clase se muestra a continuación.

	<i>Nombre de los alumnos</i>							
	<i>Juan</i>	<i>Lucía</i>	<i>Alberto</i>	<i>Ana</i>	<i>Pedro</i>	<i>María</i>	<i>Luis</i>	<i>Clara</i>
<i>Nº de preguntas</i>	0	5	2	22	3	2	1	2

La profesora quiere resumir estos datos, calculando el número típico de preguntas hechas ese día. ¿Cuál de los siguientes métodos le recomendarías?

(Marcar una sola de las siguientes respuestas)

- a. Usar el número más común, que es el 2.*
- b. Sumar los 8 números y dividir por 8.*
- c. Descartar el 22, sumar los otros 7 números y dividir por 7.*
- d. Descartar el 0, sumar los otros 7 números y dividir por 7.*

Este problema, proviene también del cuestionario de Garfield. Lo modificamos, fundamentalmente, en el enunciado, puesto que el original, a nuestro entender presentaba un dialogo que nos parecía bastante largo y poco comprensible para el alumno. En ensayos pilotos del cuestionario se nos requirió más de una vez para que se explicase lo que se pedía.

Con el mismo se pretende examinar los conocimientos de los alumnos sobre los promedios, el uso del algoritmo de cálculo, el efecto de los valores atípicos y del cero en el cálculo de la media, así como la importancia del contexto.

Problema 3: Hijos por familia

El comité escolar de una pequeña ciudad quiso determinar el número promedio de niños por familia en su ciudad. Dividieron el número total de niños de la ciudad por 50, que es el número total de familias. Si el promedio de niños por familia es 2'2, ¿con cuál de las siguientes frases estás de acuerdo? (marcar una sola de las siguientes respuestas)

- a. La mitad de las familias de la ciudad tiene más de 2 niños.
- b. En la ciudad hay más familias con 3 niños que con 2 niños.
- c. Hay un total de 110 niños en la ciudad.
- d. Hay 2'2 niños por adulto en la ciudad.
- e. El número más común de niños en una familia es 2.

Se ha tomado del cuestionario sobre razonamiento estadístico propuesto en Garfield (2003), con algunas adaptaciones al enunciado y desechando el apartado (f) que decía “ninguno de los apartados anteriores”, porque no se identifica con el propósito de nuestra investigación. La pregunta del cuestionario original (que decía: “¿Cuál de las siguientes frases debe ser verdad si el promedio de hijos por familia es 2'2?”) la hemos cambiado.

El propósito del problema es evaluar la comprensión adecuada del algoritmo de cálculo de la media, los conceptos de media, mediana y moda y su posición relativa en distribuciones asimétricas.

Problema 4: Hijos

Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

10 familias no tenían hijos

7 familias tenían 1 hijo

5 familias tenían 2 hijos

3 familias tenían 3 hijos

No hubo ninguna familia con 4 hijos

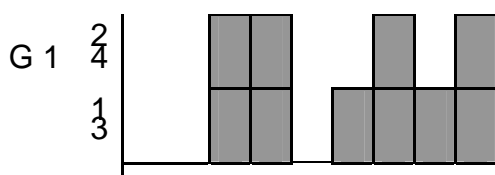
¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

Pretendemos examinar si los alumnos son capaces de distinguir los valores de la variable de sus frecuencias; comprobar si saben aplicar el algoritmo de la media ponderada, así como saber las estrategias que usan para hacerlo.

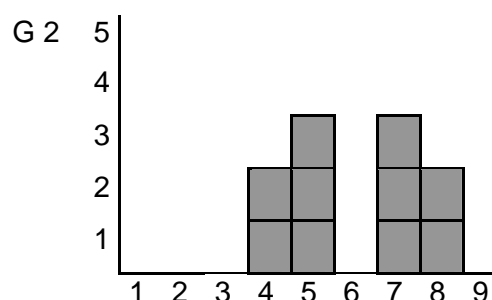
Particularmente para el cuestionario que se pasó en el segundo estudio, se ha cambiando la localidad, y eliminamos el dato referente al total de hijos, para ver qué dificultades tendrían los alumnos en encontrarlo.

Problema 5: Gráfica de notas

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de Matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



1 2 3 4 5 6 7 8 9



Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 9 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 9.

5.A El Grupo 1 tiene una nota media de 6.

- a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 6.
- b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

5.B ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) El Grupo 1 es mejor que el Grupo 2 porque en el primero están los alumnos que obtuvieron más nota.
- b) El Grupo 2 es mejor porque no hay alumnos con notas inferiores a 4.
- c) No hay diferencia entre los dos grupos, porque la media es la misma en ambos.
- d) A pesar de que las medias sean iguales en los dos grupos, el Grupo 2 es más homogéneo.

El objetivo es ver cómo el alumnado interpreta distribuciones dadas gráficamente. Pretendemos también comprobar si los estudiantes saben extraer y

manipular datos gráficamente para calcular la media y examinar qué criterios usan al comparar dos muestras, por su apariencia visual.

Para la muestra del segundo estudio, el problema fue modificado, ya que para aquellos alumnos, de acuerdo con el sistema de evaluación vigente en su país, las notas varían de 0 a 20, siendo el aprobado la nota igual o mayor que 10.

Problema 6: Familia

El tamaño medio de la familia en Canarias es de 3'2 personas.

- a) *Da 10 familias que cumplan este promedio.*
- b) *Si los García son 5 en la casa y los Hernández son 2, ¿cómo podrían ser las otras 8 familias?*

Con el problema, se pretende averiguar la Comprensión Relacional de la media. Conocida la media queremos que los alumnos encuentren una distribución ¿Qué estrategias utiliza el alumno para encontrar la distribución pedida? Además pretendíamos evaluar el dato numérico usado por el alumno por el contexto del problema puesto que la media no puede formar parte de la distribución en este caso.

Para el segundo estudio, hemos cambiado la localidad y los nombres, para acercarlos a la realidad de aquellos alumnos.

Problema 7: Supermercado

En un supermercado hay 8 marcas diferentes de papas fritas.

- a) *¿Qué precio se puede poner a cada marca para que el precio medio sea de 1'50€?*

b) Si hay tres marcas de papas fritas que traen un precio recomendado de 0'75€, 1€ y 2€, ¿qué precio se puede poner al resto de las marcas para que el precio medio sea 1'50€?

El problema persigue los mismos objetivos que el anterior. Sin embargo, el contexto es diferente, aquí se tiene la posibilidad de usar cualquier dato, incluso la media puede formar parte de la distribución. Se aumenta el nivel de dificultad al tener que trabajar con números decimales.

Para la segunda muestra se ha trabajado con la moneda dólar (\$), por ser ésta, más familiar y de uso en algunas transacciones, algo que no ocurre con el euro (€).

Validez y Fiabilidad del cuestionario

Para el análisis de la validez de contenido, comenzamos por buscar problemas, en las diferentes referencias bibliográficas, que se adecuaban con los objetivos de los programas de enseñanza de los niveles en que se preveía pasar la prueba. Los problemas encontrados fueron sometidos a un análisis y posteriormente se ha consultado a algunos profesores para que dieran sus opiniones sobre los ítems seleccionados. Así, algunos ítems fueron retirados y otros mejorados o adaptados, configurando el actual cuestionario.

La tabla 1, que se presenta a continuación, refleja que las preguntas de evaluación abarcan una diversidad de contenidos, es decir, el cuestionario es heterogéneo con respecto a la variabilidad de los contenidos evaluados. Este hecho es importante, porque según Batanero, Cobo y Díaz (2003), un cuestionario muy homogéneo suele tener una alta fiabilidad, pero puede carecer de validez para evaluar la comprensión de un concepto o una parte de las Matemáticas, ya que al ser las preguntas muy homogéneas, se evaluaría sólo parte del contenido.

conocimientos evaluados	ítems										
	1	2	3	4	5.Aa)	5.Ab)	5.B	6.a)	6.b)	7.a)	7.b)
Definición de media	√	√	√	√	√			√	√	√	√
Definición de mediana			√								
Definición de moda	√	√	√								
La media como estimador	√										
Hallar un valor representativo		√	√	√							
Cálculo de la media	√	√	√	√	√						
La media es influenciada por los valores extremos	√	√		√							
Cálculo de la media ponderada				√	√						
Posiciones relativas de los promedios en distribuciones.			√								
El cero influye sobre la media.		√		√							
Leer los datos en el gráfico					√						
Interpretar datos en el gráfico.					√	√	√				
Comparar dos distribuciones de medias iguales.						√	√				
La varianza como indicador de referencia en las muestras.						√	√				
El contexto limita el dato.								√	√	√	√
La media como reparto equitativo.								√	√	√	√
Invertir el algoritmo de la media.			√					√	√	√	√
Obtener una distribución de media dada.								√	√	√	√

Tabla 1: Conocimientos evaluados en los problemas del cuestionario

Hemos determinado el índice de dificultad (ID) para los ítems del cuestionario, un coeficiente que nos ha permitido analizar el nivel de complejidad de cada ítem. Los datos obtenidos se muestran en la tabla 2.

Problemas	Tenerife (n= 94)	Luanda (n=146)
	ID	ID
1	0,47	0,06
2	0,49	0,40
3	0,35	0,30
4	0,34	0,03
5.A.a)	0,50	0,06
5.A.b)	0,07	0,05
5.B	0,38	0,36
6.a)	0,50	0,03
6.b)	0,49	0,03
7.a)	0,54	0,05
7.b)	0,49	0,03

Tabla 2: Índice de dificultad de los ítems del cuestionario en las dos muestras.

Se puede observar que en la muestra de Tenerife, los problemas 5.Ab), 4 y 3 con índice de dificultad 0'07, 0'34 y 0'35, respectivamente, presentan un grado de dificultad mayor, mientras que el problema 7.a) ha resultado el menos difícil (o más fácil) para ellos.

En la segunda muestra, los índices de dificultad son comparativamente bajos, lo que sugiere que todos los problemas han sido algo difíciles para estos alumnos.

Fiabilidad

Hemos optado por un análisis de fiabilidad basado en la correlación entre los ítems del cuestionario, ya que para cada muestra sólo disponíamos de una administración de la prueba. En cada estudio tuvimos que considerar los resultados encontrados en función de respuestas correctas e incorrectas, tal como procedimos en el cálculo del índice de dificultad de los ítems. Cada apartado del problema también se ha considerado como un ítem, lo que ha contabilizado 11 ítems en total. Usamos el coeficiente de Kuder-Richardson (para ítems dicotómicos), que es un caso particular del coeficiente Alfa de Cronbach.

Se ha utilizado el paquete estadístico SPSS, que nos ha proporcionado las siguientes estimaciones de fiabilidad:

Muestra	Coefficiente de Fiabilidad (alfa)
Tenerife (n = 94)	0'688
Luanda (n = 146)	0'493
Muestra combinada (n = 240)	0'759

Tabla 3: Coeficientes de fiabilidad del cuestionario

Los coeficientes no son muy elevados porque el cuestionario es heterogéneo. Incluye diversa gama de contenidos, lo que lleva a que la correlación entre los ítemes sea baja. Según Muñiz (1994), si la prueba es heterogénea (como es nuestro caso) no hay que esperar un índice de consistencia muy alto, e incluso la única estimación con sentido de fiabilidad es la repetición de la prueba (test-retest, formas paralelas o test-retest con formas paralelas).

Metodología

Muestra

Se han realizado dos estudios. En el primero, la muestra la constituyeron 94 estudiantes de un instituto de Secundaria en La Laguna, que incluía estudiantes de Bachillerato según la distribución mostrada por la siguiente tabla:

Niveles	1BACH	2BACH	Total
Nº de Alumnos	48	46	94

Tabla 4: Composición de la muestra del primer estudio

Para el segundo estudio, se realizó la prueba con un grupo de estudiantes de Luanda (Angola). Seleccionamos un total de 146 alumnos del decimoprimer curso, que cursaban una formación media en Contabilidad y Gestión en un instituto público. Este nivel de enseñanza, constituye una de las dos vías que permite el ingreso en la universidad, después que el alumnado haya concluido el duodécimo y que dota también el alumnado de un perfil técnico-profesional para

que éste se integre en el mercado laboral, en el caso de no continuar sus estudios. Los grupos eran heterogéneos en cuanto al sexo, y sus edades variaban entre los 17 y 23 años. Habían estudiado Estadística Descriptiva en el curso académico anterior, lo que suponía que habrían adquirido nociones fundamentales sobre los promedios. En el período en que se administró la prueba estaban estudiando la segunda parte de la asignatura que se relacionaba con cuestiones de probabilidad. Hemos seleccionado cuatro grupos, que habían tenido profesores distintos en el curso académico previo, según la información que nos fue proporcionada, y sus composiciones se presentan a continuación:

Grupos	G	H	I	J	Total
Nº de Alumnos	34	40	36	36	146

Tabla 5: Composición de la muestra del segundo estudio

Categorías

Establecimos un sistema de categorías para las respuestas del alumnado que permitiese realizar el tratamiento de la información, usando un software estadístico denominado Systat. Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de problema: Para los de respuestas de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el sujeto en el proceso de resolución.

Estrategias en el cálculo de la media ponderada

Vamos a presentar las estrategias encontradas en la resolución de un problema abierto que hemos denominado “Hijos”. Se trata del problema 4, que ha sido administrado a las dos muestras, aunque para el segundo estudio, tuvimos que introducir algunas modificaciones y adaptaciones que el medio nos ha impuesto.

El problema administrado en el primer estudio decía:

Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

10 familias no tenían hijos

7 familias tenían 1 hijo

5 familias tenían 2 hijos

3 familias tenían 3 hijos

No hubo ninguna familia con 4 hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

Como se ha descrito previamente, el objetivo aquí era examinar si los alumnos eran capaces de distinguir los valores de la variable de sus frecuencias, comprobar si saben aplicar el algoritmo de la media ponderada, así como constatar las estrategias que usaban al hacerlo. Por ser una pregunta abierta, como se indica en Cobo y Batanero (2004), no se limita a dos opciones (correctas/incorrectas), sino que permite pedir a los alumnos, que las razonen y, al justificarlas, tienen libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems.

En la tabla que mostramos a continuación se presentan las estrategias utilizadas por los alumnos de la muestra de Tenerife:

Estrategias Correctas	N	%
Usa el algoritmo de la media ponderada.	21	22'3
Da un resultado correcto pero sin exponer las operación.	11	11'7
Estrategias Incorrectas	N	%
Divide la suma de los valores de la variable por la suma de los pesos.	2	2'1
Usa el algoritmo de media ponderada correctamente pero, aproxima el resultado.	1	1'1

Divide la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	4	4'3
Usa el algoritmo de media ponderada erróneamente.	4	4'3
Da como resultado un dato de la variable que considera como moda erróneamente.	5	5'3
Da un resultado incorrecto sin mostrar las operaciones.	33	35'1
Suma los valores de la variable y divide por 25.	1	1'1
Utiliza procedimientos incoherentes.	8	8'5
No contesta.	4	4'3

Tabla 6: Frecuencias y porcentajes en el problema “Hijos”, referentes al primer estudio.

Como se puede ver, los datos indican que el 34% de los alumnos resuelve el problema correctamente. Usan el algoritmo de cálculo de la media ponderada (22'3%) o exponen el resultado sin mostrar las operaciones que eventualmente hayan realizado (11'7%).

Las distintas estrategias incorrectas usadas por los alumnos en el intento de solucionar el problema, han sido las siguientes: sumar las frecuencias y dividir el resultado obtenido por la suma de los valores de la variable (4'3%), dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (2'1%), usar el algoritmo de media ponderada pero determinando de forma errónea la suma total de hijos (4'3%), usar correctamente el algoritmo pero redondeado el resultado encontrado (1'1%) y elegir un dato cualquier como moda, para la solución pretendida (5'3%).

Es notorio el número de alumnos que dan un determinado valor como resultado (correcto o incorrecto) sin mostrar las operaciones (46,8%), algo que nos ha limitado en profundizar más sobre las estrategias utilizadas.

El segundo estudio, ha proporcionado más estrategias incorrectas que el anterior. Quizá esto se deba a la omisión del dato relativo al total de familias, que estaba dado en el problema anterior. Para estos alumnos el problema quedó formulado así:

Hemos preguntado en Luanda a algunas familias sobre el número de hijos y encontramos los siguientes datos:

10 familias no tenían hijos

7 familias tenían 1 hijo

5 familias tenían 2 hijos

3 familias tenían 3 hijos

No hubo ninguna familia con 4 hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

La omisión del dato referente al total de familias fue intencional. Queríamos saber si eso constituía una dificultad añadida en la resolución del problema. Y de hecho, los resultados indicaron que así fue, si tenemos en cuenta el porcentaje tan bajo de alumnos que contestaron correctamente al problema.

A continuación presentamos la tabla, donde se pueden observar las informaciones recogidas.

Estrategias Correctas	N	%
Usa el algoritmo de media ponderada	4	2'7
Estrategias Incorrectas	N	%
Calcula la diferencia entre dos valores extremos de la variable y divide por 2.	4	2'7
Suma dos valores extremos de la variable y divide por dos.	1	0'7
Indica el valor 2 como media, sin mostrar las operaciones.	17	11'6
Da como media un valor (diferente de dos), sin mostrar las operaciones.	17	11'6
Indican la mediana de los valores de la variable como media.	7	4'8
Suma 4 valores de la variable y divide por 4.	7	4'8
Suma 5 valores de la variable y divide por 5.	6	4'1
Establece la proporción entre frecuencias.	1	0'7
Divide la suma errónea de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	4	2'7
Divide la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable.	2	1'4
Divide la suma total de hijos por la suma errónea de las frecuencias.	4	2'7
Divide la suma total de hijos por la suma de los valores de la variable.	2	1'4

Divide la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias.	10	6'8
Divide la suma de los valores de la variable por la suma errónea de las frecuencias.	3	2'1
Utiliza procedimientos incoherentes.	38	26
No contesta.	19	13

Tabla 7: Frecuencias y porcentajes en el problema "Hijos", referentes al segundo estudio.

Los datos señalan que el porcentaje de respuestas correctas es del 2'7, frente a un 97'3% de respuestas incorrectas. Para las respuestas correctas, identificamos que los alumnos emplearon el algoritmo de cálculo de la media ponderada mientras que para las incorrectas identificamos diversas estrategias, siendo en gran parte, procedimientos incoherentes (26%). Las estrategias incorrectas que más se destacaron fueron: Dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (6'8%), es decir, $(0+1+2+3)/(10+7+5+3)$; Sumar n valores de la variable y dividir por n (8'9%); en esta estrategia observamos dos tipos: los que sumaban los valores 0, 1, 2 y 3 dividiendo la suma por 4, y los que sumaban los valores 0, 1, 2, 3, y 4, dividiendo la suma por 5; indicar un determinado valor como media (23'2%) sin mostrar las operaciones; Indicar la mediana de los valores de la variable como media (4'8%); dividir la suma total de hijos por la suma errónea de las frecuencias (2'7%); y observamos también un 13% de alumnos que no contestan.

Como se puede ver, aquí el número de estrategias incorrectas ha aumentado considerablemente, en comparación con las encontradas en el primer estudio. Quizá sea debido a la modificación que introdujimos. Pero de forma general preveíamos encontrar tales problemas, puesto que la investigación de Pollatsek, Lima y Well (1981), nos había advertido de las principales dificultades de los alumnos con la media ponderada.

Conjeturamos que los alumnos que indicaron el valor 2 como media quizá tendrán confundido la media con la mediana, tal como lo hicieron

explícitamente algunos o hayan sumado todos los valores de la variable, dividiendo la suma por 5, que ha sido también una de las estrategias incorrecta utilizada por los alumnos. Las dificultades de los alumnos en considerar la media como mediana o la media como moda las encontramos abordada en Mokros y Russell (1995). También nos llama la atención el hecho de que algunos alumnos hayan considerado una información sin relevancia para el problema la que dice “*No hubo ninguna familia con 4 hijos*”, como dato, lo que muestra cómo éstos hacen un análisis ambiguo de la información que se les brinda.

Conclusiones

Pensamos que nuestro cuestionario es un instrumento valioso para identificar los errores y dificultades de los alumnos en la comprensión de la media aritmética. Nos ha permitido identificar distintas estrategias utilizadas por los alumnos en el intento de resolver un problema de media ponderada.

Hemos notado que la estrategia correcta más común en los alumnos consistió en aplicar la fórmula de cálculo de la media ponderada, determinando la suma total y dividiendo por el total de casos. Sin embargo, verificamos que la mayor parte de los alumnos encontraron grandes dificultades en este proceso, incluso aquellos que habían escrito correctamente la fórmula de cálculo. La principal dificultad estuvo relacionada con la identificación de los números que debían sumar para completar los elementos constituyentes de la fórmula de cálculo. Eso ha motivado el surgimiento de distintas estrategias incorrectas.

Observamos además dificultades en la concepción de la media aritmética ya que algunos alumnos indicaron como respuesta la mediana o la moda, en lugar de la media, como si pretendieron igualar estos conceptos.

Del punto de vista didáctico pensamos que nuestro trabajo es una contribución más para que los profesores se familiaricen con las distintas estrategias utilizadas por los alumnos en el cálculo de la media ponderada, un matiz que puede ayudar a superar las dificultades que surgen en la enseñanza de este contenido.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C.; Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310-324.
- Batanero, C.; Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Fiabilidad y Generalidad. Aplicaciones en la Evaluación Educativa. *Números*, v. 54, 3-21.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.3, pp.144-151). Universidad de Pernambuco.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.
- García Cruz, J.A. y García Alonso, I. (2004). Algo sobre la Media. *Trabajo presentado en las XXII Jornadas de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*.
- Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematic*, 14, 415-429.
- Muñiz, J. (1994). Teoría Clásica de los Tests. *Madrid. Pirámide*.
- Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, 1, 20-39.
- Pollatsek, A.; Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.