



ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS A UN CUESTIONARIO SOBRE EL CONCEPTO DE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Matías Camacho Machín
Josefa Perdomo Díaz

Universidad de La Laguna

Resumen

En este artículo se presenta un análisis preliminar con el objeto de, en un futuro, experimentar una secuencia de enseñanza de un concepto estudiado en los primeros cursos universitarios de la mayoría de las carreras científicas y tecnológicas: las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Para realizar este análisis se diseñó un cuestionario con una serie de tareas en las que se conjugan distintos registros de representación (Duval, 1998): algebraico, gráfico y verbal. Dicho cuestionario ha sido elaborado con el objetivo de responder a unas preguntas de investigación que consideramos importantes para analizar la comprensión de las EDO por parte de estudiantes de diversas licenciaturas en las que este concepto se enseña de forma diferente. En este artículo realizaremos el análisis de las respuestas de los alumnos de primer curso de la licenciatura de Ciencias Físicas de la Universidad de La Laguna al cuestionario diseñado.

Abstract

In this paper a preliminary analysis is presented, with the aim of experimenting, in the future, a teaching sequence of a concept which is usually taught in many scientific and technological studies: Ordinary Differential Equations (ODE's). To carry out this analysis a questionnaire was designed in which some different representation registers were combined (Duval, 1998): algebraic, graphic and verbal. This questionnaire has been elaborated to answer some research questions that we consider very important in the study of the understanding of ODE's by students of different courses, where the concept is taught in different ways. For this particular job, we center our attention in the analysis of the answers by students in the first year of Physics Sciences in La Laguna University.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son un concepto de las matemáticas considerado relevante en la formación de profesionales interesados en actividades científico-tecnológicas, tal y como queda reflejado en los programas de la mayoría de los estudios universitarios de estos ámbitos del saber. La importancia de las EDO se debe principalmente a las numerosas y diversas aplicaciones que poseen en distintas áreas de conocimiento como la Física, la Química, la Medicina o la Economía.

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio cuyo principal objetivo es el de diseñar, desarrollar y evaluar una secuencia de enseñanza para la introducción de las EDO, en la que se potencie el uso de herramientas tecnológicas, tales como calculadoras simbólicas (Voyage 200) y Programas de Cálculo Simbólico¹ (DERIVE, MAPLE), con el fin de aprovechar, entre otras cosas, las posibilidades de visualización que nos facilita el uso de la tecnología en relación con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Además se analizará la conveniencia o no de que la enseñanza de este concepto sea independiente de la licenciatura en la que se imparta la materia. Para esta última parte, se realizará la investigación con alumnos de diferentes estudios en los que, tradicionalmente, se enseñan las EDO con enfoques diferentes. Los estudios universitarios elegidos para el desarrollo de esta investigación son las licenciaturas en Matemáticas, Física y Químicas. En Camacho y Perdomo (2005) se presentan los resultados obtenidos con los alumnos de la licenciatura de Matemáticas, centrándonos en este artículo en el trabajo realizado con los estudiantes de la licenciatura en Física.

El objeto de este trabajo es presentar un análisis preliminar de las concepciones de los estudiantes, los errores más comunes que cometen y las

¹ Computer Algebra System (CAS) en terminología anglosajona y Système de Calcul Formal (SCF) en terminología francesa.

dificultades con que se encuentran, y, en general, el comportamiento que presentan cuando resuelven tareas elementales para las que se requiere una comprensión del concepto de EDO que permita en el uso coordinado de diferentes sistemas de representación (Duval, 1998). Para facilitar este análisis nos formulamos unas preguntas generales que nos permitirán establecer la forma en que los estudiantes entienden las EDO, analizando su actuación frente a las tareas diseñadas para tal fin. Las cuestiones que constituyen la parte central de este trabajo son:

PG 1: ¿Los alumnos utilizan los conocimientos que poseen, anteriores al estudio de las EDO, para resolver cuestiones sencillas?

PG 2: ¿Qué uso hacen de los distintos registros de representación?

PG 3: ¿Qué influencia tiene el contexto de la pregunta en el modo de actuación de los estudiantes?

PG 4: ¿Cómo actúan frente a problemas con un contexto real?

Para dar respuesta a estos interrogantes se elaboró un cuestionario que incluía una serie de tareas en las que las actividades se presentaron haciendo usos de tres registros de representación: algebraico, gráfico y verbal, de tal forma que para la resolución de las mismas, el registro gráfico desempeña un papel esencial

Antecedentes

Existen en la literatura algunos trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO y que tratan este tema desde diferentes puntos de vista. Uno de los trabajos más antiguos que nos encontramos, dedicado principalmente a la enseñanza de las EDO, es el de Brodetsky (1919, 1920 a), b), c)). En él se presenta un método para tratar las EDO de forma gráfica, haciendo uso de la información que proporcionan las sucesivas derivadas de una función sobre su

monotonía, concavidad y convexidad, así como los puntos donde se alcanzan los máximos, mínimos y los puntos de inflexión. Brodetsky justifica la necesidad de este tipo de enfoques para la resolución de las EDO basándose en dos premisas: por un lado, la existencia de numerosas ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas soluciones son muy difíciles de obtener empleando únicamente métodos analíticos y, por otro, el hecho de que los alumnos cometan de forma sistemática ciertos errores a la hora de resolver determinadas EDO como, por ejemplo, $y'(x)=1/x$.

Otra de las líneas de investigación, centrada más en el aprendizaje, está dedicada al análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes a la hora de enfrentarse a una EDO (Habre, 2000) o a un sistema de ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2004). En el primero de estos trabajos se analiza si los alumnos utilizan o no el campo de direcciones para resolver una ecuación diferencial, así como la capacidad de los estudiantes para obtener toda la información posible de los mismos y sus habilidades para convertir información simbólica en gráfica y viceversa. Este estudio se llevó a cabo en un curso de Cálculo en el que se enfatizó en el acercamiento visual y en el que los ordenadores constituyeron una herramienta fundamental para el proceso de instrucción. El artículo de Trigueros hace uso de la teoría APOS para analizar la comprensión de los estudiantes del significado y la representación de las soluciones en línea recta de un sistema de ecuaciones. Los resultados de este trabajo evidenciaron las dificultades que tienen los alumnos para relacionar estos conceptos con otros de diferentes áreas de las Matemáticas.

La teoría APOS también fue empleada por Donovan, J. (2004) para describir el esquema que construye un alumno de las EDO de primer orden, considerando el esquema en el sentido de Skemp (1980). Otro tema que ha preocupado a los investigadores en Didáctica de las Matemáticas ha sido la forma en que los estudiantes entienden el concepto de solución de equilibrio.

Zandieh y McDonald (1999) realizaron una investigación desde una perspectiva constructivista, y apuntan como posible causa de los errores que cometen los estudiantes al hecho de que con la introducción de las EDO, se pasa de considerar como solución un número a establecer que la solución de un problema puede ser una función.

Metodología

Para responder a las preguntas formuladas en la introducción, se elaboró un cuestionario con siete problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, en su mayoría de primer orden. Algunas de las actividades que conforman este cuestionario fueron tomadas de libros de texto, mientras que otras se diseñaron específicamente para responder de una manera más concreta a las preguntas planteadas en nuestra investigación. Se prestó una especial atención a las actividades que a la hora de resolverlas pueden promover el uso de los registros gráfico, algebraico y verbal.

Participaron en la investigación un total de 12 estudiantes de la asignatura denominada Métodos Matemáticos IV, correspondiente al segundo cuatrimestre del primer curso de la licenciatura en Física. El programa de esta asignatura está dedicado fundamentalmente al estudio de las EDO y al Análisis Complejo. A la hora de analizar las respuestas de los estudiantes al cuestionario diseñado para la investigación hay que tener en cuenta que éste fue cumplimentado durante una sesión de clase, sin previo aviso, cuando había transcurrido prácticamente la mitad del cuatrimestre. En total respondieron al cuestionario los doce alumnos, aunque las respuestas de uno de ellos fueron excluidas del análisis. Asimismo, conviene señalar que estos alumnos no habían recibido ninguna explicación del concepto de campo de direcciones por lo que se incluyó en el cuestionario una breve explicación de su significado, presentando además un ejemplo con el fin

de que pudieran realizar las actividades relacionadas con este concepto. La resolución de las tareas se llevó a cabo empleando únicamente lápiz y papel.

Presentamos a continuación algunas de las tareas del cuestionario, acompañadas del análisis de las intenciones con las que se incluyeron en él, relacionándolas con las preguntas que motivaron el estudio.

PC 1: Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{dy}{dx} = 0 ; x \in [0,2]$ b) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ c) $\frac{dy}{dx} = y ; x \geq 0$ d) $y'(t) = y^2$

Las tres primeras ecuaciones de este problema son de resolución inmediata, en el sentido de que no se necesita conocer ningún método específico de resolución de EDO para poder encontrar las funciones soluciones de ellas. Por otro lado, al abordar esta cuestión se deben conjugar los registros gráfico y algebraico. Por tanto, las respuestas de los estudiantes a este problema nos permitirán observar si los alumnos utilizan los conocimientos adquiridos previamente al estudio de las EDO (representación de funciones y sus traslaciones, propiedades de la derivada de una función, etc). Además nos proporcionarán una primera visión de la forma en que los estudiantes emplean y conjugan los registros gráfico y algebraico.

PC 3: Resuelve la ecuación diferencial $y'(t) = 1/t$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $t = -1$.

La ecuación diferencial de este problema se corresponde con una de las que aparecen en los trabajos de Brodetsky (1919, 1920 a), b), c)). Los estudiantes cometen muchos errores debido principalmente al intento de resolverla empleando únicamente métodos analíticos, es decir, haciendo uso exclusivamente del registro algebraico. Estos errores nos hicieron pensar en la posibilidad de pedir a los alumnos que representaran una solución correspondiente al valor $t = -1$, con el objeto de analizar si esta cuestión les

produce algún conflicto. Por otro lado, para la resolución de este problema, el estudiante deberá utilizar los registros algebraico y gráfico, lo que nos permitirá analizar si conjugan ambos registros y en qué medida lo hacen. Finalmente, las respuestas a este problema nos ayudarán a tener una primera visión de la influencia que tiene el contexto en que se presenta la pregunta sobre la forma de proceder de los estudiantes. También nos servirá para comparar los métodos de resolución empleados en este caso con los utilizados para resolver otros problemas del cuestionario.

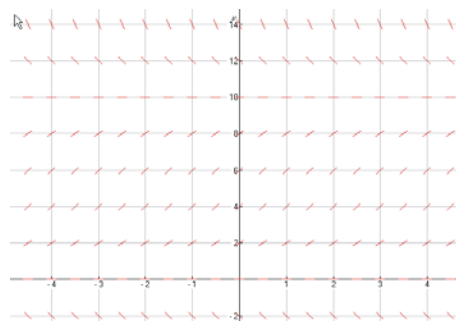
PC 4: Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K$, $K > 0$. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

El principal objetivo de esta tarea es analizar la influencia que tiene el contexto en el que se plantea el problema en el modo de actuar de los estudiantes, teniendo en cuenta que la ecuación diferencial de este problema resulta ser un caso más general (para una constante $K > 0$) que la ecuaciones diferenciales de los problemas **PC1** y **PC6**. La diferencia fundamental radica en que estos dos últimos problemas no se formulan dentro de un contexto real como sí ocurre en **PC4**.

Por otro lado también nos permitirá observar el uso que hacen los alumnos de los registros algebraico y verbal y cómo se produce la conversión de un registro a otro.

PC 5: Consideremos el campo de direcciones asociado a la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P(10 - P)$$



Representa las soluciones que cumplen que $P(0)=0$ y $P(-2)=12$. ¿Para qué valores positivos de P las soluciones son crecientes? ¿y decrecientes? ¿Cuál es el límite de P cuando t tiende a infinito?

Si la ecuación dada modeliza una población determinada de individuos, ¿cómo interpretarías los resultados que acabas de obtener?

Con este problema se tratará de responder a las cuatro preguntas que nos hemos formulado puesto que, en primer lugar, se conjugan en su planteamiento los tres registros de representación considerados en esta investigación: algebraico, gráfico y verbal y, en segundo lugar, nos permitirá observar si los alumnos hacen uso de algunos conocimientos matemáticos anteriores que poseen, tales como el concepto de derivada de una función, la interpretación gráfica del límite de una función, reglas de integración, etc. Finalmente podremos ver si el contexto en que se presenta la pregunta influye en la manera de actuar de los alumnos y si el hecho de que sea un contexto real también condiciona sus respuestas.

Análisis y discusión

Las respuestas de los estudiantes al problema **PC 1** nos dan información sobre varias cuestiones. En la siguiente tabla se refleja el registro de representación empleado por los alumnos a la hora de resolver las EDO planteadas, sin tener en cuenta si las respuestas eran correctas o no. Se observa

como el número de respuestas va disminuyendo a medida que se complica el segundo miembro de la ecuación, a la vez que cobra un mayor protagonismo el registro algebraico.

	(a)	(b)	(c)	(d)
R. Verbal	6	3	1	2
R. Gráfico	4	5	3	2
R. Algebraico	2	3	5	4

Dentro del registro algebraico, el método más empleado para resolver las EDO es el de variables separadas, aunque aparecen algunas respuestas en las que se han empleado métodos propios de EDO de orden superior. Un error muy frecuente en esta pregunta fue la no consideración de la constante de integración al resolver las EDO.

En cuanto a la representación gráfica de las funciones solución de las diferentes ecuaciones, nos encontramos con que la mayoría de los alumnos representa únicamente una solución, como se muestra en la siguiente tabla.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Representan una solución	6	5	5	1
Representan varias soluciones	2	1	1	0

También se puede observar en esta tabla que hay algunos estudiantes que no representan funciones tan elementales como las trigonométricas o la exponencial. Todo esto nos hace pensar que, en general, los alumnos no hacen uso de conocimientos adquiridos con anterioridad (representación de funciones y sus traslaciones, así como las propiedades elementales de las funciones y sus derivadas, etc.)

En el análisis de las respuestas a la pregunta **PC 3** nos volvemos a encontrar con el predominio absoluto del registro algebraico a la hora de resolver la EDO y con el uso de métodos propios de ecuaciones de orden superior, aunque el número de personas que no escribe la constante de integración disminuye, siendo únicamente un alumno el que comete este error. Esto podría evidenciar que el modo de actuar de los estudiantes frente a un problema varía, dependiendo del contexto en que se les presente dicho problema. En esta tarea el error más común cometido por los alumnos ha sido, tal y como esperábamos, el de no considerar el valor absoluto del argumento del logaritmo al integrar. Éste es un error muy frecuente que se comete en el trabajo con las integrales indefinidas y que consideramos que no se puede atribuir directamente al estudio de las EDO. Finalmente, el apartado dedicado al campo de direcciones sólo lo abordan cuatro alumnos, dos de ellos empleando el registro verbal para explicar su construcción, pero ninguno de los nueve estudiantes que responden a este problema representa la solución correspondiente a $t = -1$.

Una mención especial merecen los problemas del cuestionario presentados bajo un contexto real, **PC 4** y **PC 5**. Lo primero que se observa en ellos es un descenso en el número de estudiantes que responde. El problema **PC 4** es especialmente útil para la comprobación de la influencia del contexto en la actuación de los alumnos ya que en él se presenta una EDO, de resolución inmediata y generalización de otras EDO presentadas en el cuestionario, dentro de un contexto real. Comparando entre sí las respuestas de los alumnos de Física a todas esas preguntas observamos que, efectivamente, el contexto en que se enuncie el problema influye en la manera en que éste es abordado por los estudiantes. Algunos de los errores encontrados en las respuestas a este problema están relacionados con conocimientos que el alumno debe tener, fruto

de su formación anterior, como por ejemplo, el uso indebido de la regla de tres o la resolución incorrecta de sistemas de ecuaciones algebraicas.

De los siete alumnos que responden al problema **PC 5**, cuatro lo hacen empleando únicamente el registro algebraico y dos de ellos, además, utilizan métodos no válidos para la resolución de la EDO presentada. Los otros dos alumnos, que abordan el ejercicio utilizando el campo de direcciones, tampoco concluyen con éxito, observándose algunas incoherencias en sus respuestas. Por último conviene señalar que, ninguno de los estudiantes interpreta de forma correcta los resultados obtenidos, hecho éste que resulta aún más llamativo si tenemos en cuenta que la Licenciatura en Física está basada en la resolución de problemas presentados bajo un contexto real.

Conclusiones

El análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario diseñado para la investigación nos permite establecer unas primeras conclusiones que nos ayudarán a conocer algunas de las características de la forma de entender las EDO por parte de los estudiantes de Física. Se observa que los estudiantes, en general, no hacen uso de conocimientos matemáticos adquiridos previamente al estudio de las EDO. Las causas de que esto suceda pueden ser principalmente dos: por un lado, es posible que los alumnos no hayan asimilado correctamente determinados conceptos, y por otro, que tal vez no consideren que sean de aplicación en otro contexto distinto de aquél en el que lo aprendieron, como sucede con otros conceptos relacionados con las ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2004).

Atendiendo a los registros de representación empleados por los estudiantes, hemos podido constatar que, tal y como sucede en el aprendizaje de otros tópicos de matemáticas (González-Martín y Camacho, 2004), los alumnos optan por utilizar el registro algebraico siempre que les es posible. Hemos

observado que los estudiantes de la licenciatura en Física están bastante familiarizados con el registro verbal y lo emplean en la resolución de los problemas cuando lo consideran oportuno. No ocurre lo mismo con el registro gráfico, del que ningún alumno hace uso si no se le pide de forma explícita. En cualquier caso, se puede comprobar que los estudiantes, en general, no intentan emplear otro registro de representación cuando se dan cuenta de que el que están utilizando no les aporta la información necesaria, lo que coincide con los resultados obtenidos en otras investigaciones (Habre, 2000).

Por último se puede afirmar que los alumnos no actúan de la misma forma frente a un mismo problema presentado en diferentes contextos, lo que se deduce del hecho de que no empleen los mismos métodos de resolución para una misma EDO presentada como una ecuación aislada (**PC1**), como un problema de valores iniciales (**PC6**) o bajo un contexto real (**PC4**). Asimismo se ve esta diferencia de comportamiento frente a tareas relacionadas con el campo de direcciones. Los estudiantes no reaccionan de la misma manera ante problemas donde deban representar un campo de direcciones (**PC 3**), que ante cuestiones donde sólo tengan que interpretarlo (**PC 5**).

Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración de Mireia Saboya, alumna de doctorado de la Université du Québec à Montreal en el desarrollo y análisis de la parte experimental de esta investigación

Bibliografía

- Asiala; M.; Brown, A.; Devries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 6, 1-32.
- Brodetsky, S. (1919). The graphical treatment of differential equations (I). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 377-382, Ed. Greenstreet, W. J.
- Brodetsky, S. (1920a). The graphical treatment of differential equations (II). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 3-8, Ed. Greenstreet, W. J.

- Brodetsky, S. (1920b). The graphical treatment of differential equations (III). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 35-38, Ed. Greenstreet, W. J.
- Brodetsky, S. (1920c). The graphical treatment of differential equations (IV). *The Mathematical Gazette*, vol. X, pp. 49-59, Ed. Greenstreet, W. J.
- Camacho, M.; Perdomo, J. (2005). La comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias en estudiantes de primeros cursos universitarios: Un estudio preliminar. *XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*. Albacete. (por aparecer).
- Donovan, J. (2004). A first order differential equations schema. *Proceedings of the PME-NA XXVI*, pp. 111-118.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173-201, Grupo Editorial Iberoamérica.
- González-Martín, A.; Camacho M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28 PME*, vol 2, pp. 479-486.
- Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 18 (4), pp.. 455-472.
- King, K. (1999). The influence of technology on socio-mathematical norms in a differential equations course. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 219-224.
- Rasmussen, C.; Yackel, E. (1999). Normative understandings regarding explanation: a study of one differential equations classroom community. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 239-244.
- Skemp, R. (1980) *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas*. Morata. Madrid
- Stephan, M.; Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 21, pp. 459-490.
- Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. *Proceedings of the PME-NA XXVI*, pp. 127-134.
- Yackel, E.; Rasmussen, C.; King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 19, pp. 275-287.
- Zandieh, M.; McDonald, M. (1999). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 253-258.