CAS (COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS) Y SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN

Matías Camacho Machín
Mª Candelaria Afonso Martín

Universidad de la Laguna

Resumen

Los CAS (Computer Algebra System), conjuntamente con los entornos de Geometría Dinámica, han resultado ser en los últimos años un elemento importante para la resolución de problemas. Estas herramientas tecnológicas se constituyen además como un elemento innovador para la enseñanza de las Matemáticas y su uso en el aula nos ha llevado a reflexionar sobre su utilidad para favorecer el aprendizaje. Por otra parte, la identificación de trayectorias de aprendizaje (Camacho y Santos, 2004 y 2006) puede constituirse como un ingrediente decisivo a la hora de diseñar actividades para los estudiantes de Educación Secundaria.

Se presenta en este trabajo un problema en el que se muestra cómo el uso de estas herramientas favorece, de una parte, la construcción de relaciones matemáticas y de otra la exploración de conexiones.

Abstract

CAS (Computer Algebra System) together with the surroundings of Dynamic Geometry have turn out to be an important element for the resolution of problems in the last years. In addition, these technological tools are considered as an innovative element for the teaching of Mathematics and its use in the class has taken to us to reflect on its utility to favour the learning. On the other hand, the identification of learning trajectories (Camacho y Santos, 2004 y 2006) can be considered as an important factor when designing activities for the students of High School

This paper deals with a problem which shows on the one hand, how the use of these tools favours the construction of mathematical relations and on the other hand, the exploration of connections.

FORMACIÓN DEL PROFESORADO E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIII
Mª C. Afonso y M. Camacho (2007). *CAS (Computer Algebra Systems) y Software de Geometría Dinámica. Un ejemplo de aplicación, pp. 9-27*

Introducción

Los avances científicos de las últimas décadas nos han mostrado que la tecnología está influyendo notablemente en el desarrollo de las diferentes áreas del saber y en particular de las Matemáticas.

Desde la perspectiva de la enseñanza, los currículos de muchos países han puesto de manifiesto la necesidad de emplear herramientas tecnológicas en el aula. Todo ello ha provocado que el software, cada vez más utilizado en las aulas, haya evolucionado con rapidez, logrando facilitar los cálculos simbólicos y numéricos, y la obtención de diferentes representaciones dinámicas de los distintos objetos matemáticos, lo que suministra un gran número de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

Diferentes CAS (Computer Algebra System) como DERIVE, MAPLE y MATHEMATICA, hojas de cálculo como Excel, diferentes Software de Geometría Dinámica (Geometer's, Sketchpad, Cabri) y Calculadoras Simbólicas que integran entornos de trabajo como los anteriores, ofrecen la posibilidad de que los estudiantes representen objetos y relaciones matemáticas de varias maneras.

Creemos que es necesario hacer una reflexión que permita identificar el potencial que todas estas herramientas tecnológicas pueden ofrecer al estudiante durante sus experiencias de aprendizaje, dado que:

- Su uso no garantiza que los estudiantes lo utilicen con éxito en la resolución de problemas
- Requiere un proceso de transformación y adaptación que va más allá de hacer eficientes una serie de procedimientos que antes se realizaban de manera tediosa con lápiz y papel (Génesis instrumental)
- Es importante considerar que: el uso productivo de alguna herramienta demanda que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias que les permita apropiarse de ella y transformarla en un instrumento que les

resulte importante para la comprensión de las matemáticas y para la resolución de problemas.

Nos planteamos entonces diversos interrogantes que nos han llevado hacia nuestras reflexiones:

- ¿Qué procesos muestra el estudiante durante el camino de transformar un artefacto en una herramienta de aprendizaje o de resolución de problemas?
- ¿Hasta que punto el empleo sistemático de alguna herramienta tecnológica produce cambios en la conceptualización misma del objeto matemático por parte de los estudiantes?
- ¿Qué tipo de representaciones del objeto matemático y formas de trabajo se privilegian con la ayuda de la tecnología?
- ¿Qué aspectos del pensamiento matemático se destacan en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología?

Es evidente, que la disponibilidad en el aula de estas herramientas, hace que se requieran transformaciones no sólo en el currículo, sino en la forma de enseñar, lo cual ha sido tomado en consideración por las diferentes administraciones y que de una manera u otra han aparecido reflejadas en los Principios y Estándares (NCTM, 2000) y en otros documentos curriculares (BOC, 2002)

Además, consideramos que desde la investigación aplicada a la educación, es importante analizar diferentes trayectorias de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004 ; Camacho y Santos, 2006), tanto las posibles como las efectivas, que los estudiantes desarrollan con la ayuda de la tecnología, para poder así mejorar el aprendizaje. En este contexto, el empleo de alguna herramienta en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no sólo influye en la manera de representar e interactuar con las ideas de la disciplina, sino también en las formas de razonar, sustentar y presentar relaciones o propiedades matemáticas.

Vamos a ilustrar por medio de un ejemplo, la importancia del uso de los CAS y el uso del software de Geometría Dinámica en el desarrollo del pensamiento matemático, basándonos en el empleo de situaciones de variación de los elementos de una expresión analítica para un modelo matemático de una situación real. El uso sistemático de los CAS y el software dinámico para representar objetos y problemas matemáticos favorece:

- la búsqueda de relaciones
- el planteamiento de conjeturas
- la presentación de argumentos y/o explicaciones
- las conexiones entre conceptos o ideas matemáticas.

La presentación y discusión, por nuestra parte, de los ejemplos creemos que genera una información valiosa para identificar posibles trayectorias de enseñanza y aprendizaje para los estudiantes a la hora de utilizar la herramienta tecnológica.

El uso de las calculadoras simbólicas para realizar operaciones y representaciones, nos ha conducido a una reflexión sobre cómo emplear este instrumento en el desarrollo del sentido simbólico de los estudiantes. Desde una perspectiva teórica, la teoría de la instrumentación (Guin, Ruthven, Trouche, 2005), proporciona un marco que permite interpretar la importancia de la resolución de problemas haciendo uso de herramientas tecnológicas. Para la teoría de la instrumentación, es importante distinguir los valores prágmáticos y epistémicos de las técnicas. Esta teoría se sitúa dentro de la Teoría Antropológica de Chevallard (1999), según la cual, toda institución didáctica desarrolla prácticas específicas para cada objeto de conocimiento considerado, las cuales están asociadas a una serie de normas y a una visión sobre lo que significa conocer y entender el objeto. A estas prácticas Chevallard las denomina *praxeologías* y distingue en las mismas cuatro componentes:

- Algún tipo de *tarea* que se relaciona con el objeto de conocimiento.
- Las *técnicas* empleadas para resolver este tipo de tareas.
- La *tecnología* entendida como el discurso usado para explicar y justificar esas técnicas.
- La *teoría* entendida como el discurso usado para explicar y justificar esa tecnología.

Con la aparición de herramientas tecnológicas, se habla de componentes teóricos para referirse indistintamente a los componentes tecnológicos y teóricos en el sentido de Chevallard.

En general, las instituciones perciben las técnicas en términos de su valor práctico (eficiencia, coste, campos de aplicación), pero tales técnicas poseen también un valor epistémico (Fig. 1) en tanto que contribuyen a la comprensión del objeto matemático estudiado que son, a su vez, fuente de cuestiones sobre el conocimiento matemático. Por razones obvias de eficiencia, el avance en el conocimiento en cualquier institución lleva aparejado el que algunas técnicas se vuelvan rutinarias, lo que puede llevar un debilitamiento del discurso teórico asociado y una desvirtuación del valor epistémico de las técnicas, empobreciendo así la visión que se tiene de las matemáticas y su aprendizaje.

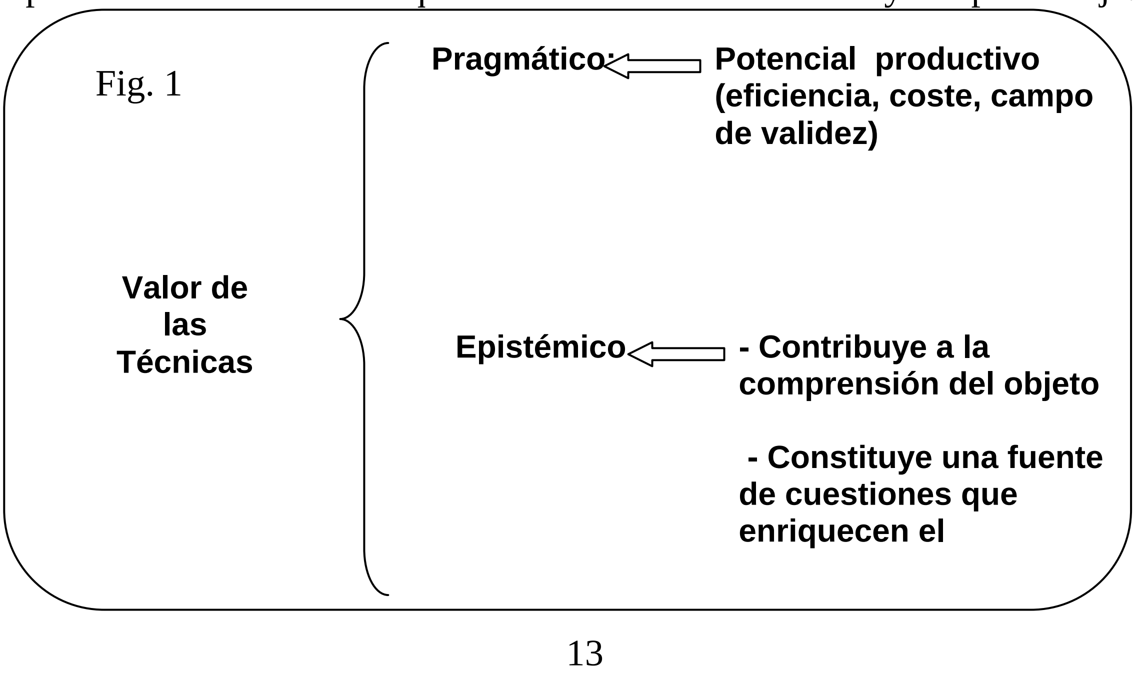


Fig. 1

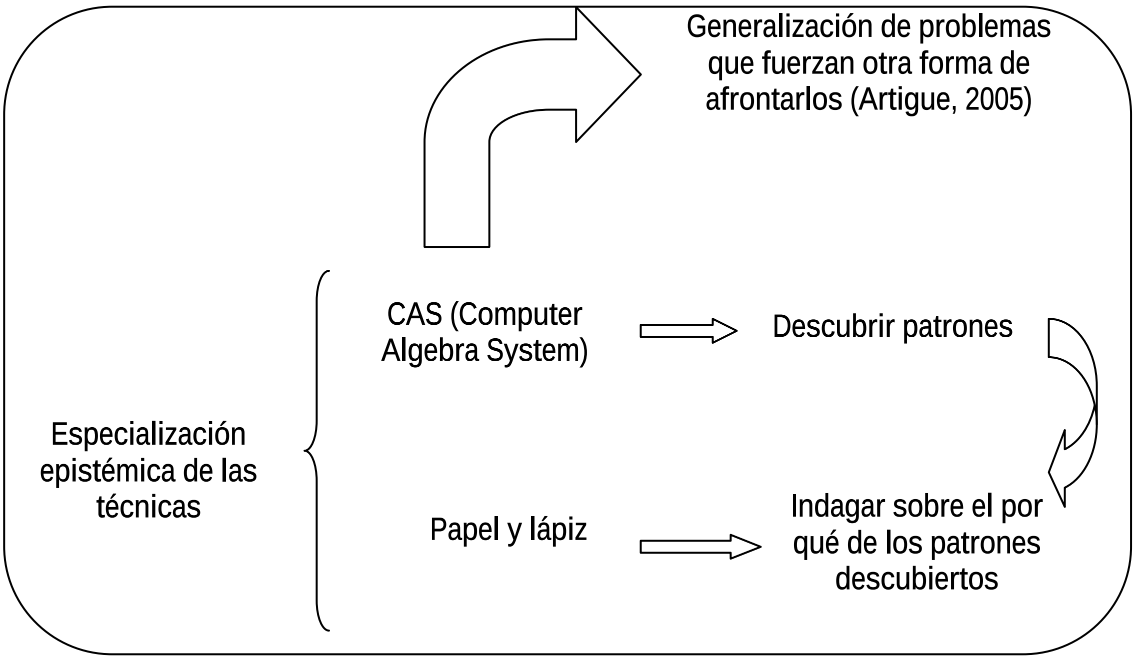
El impacto de los ordenadores en la enseñanza y aprendizaje puede ser considerado al nivel de las técnicas: las técnicas de “papel y lápiz” son sustituidas por técnicas de “apretar el botón”, omitiendo que el uso de tecnología requiere nuevas técnicas dependientes del instrumento. Ante esto, tanto el valor práctico como epistémico de las técnicas tradicionales debe ser reconsiderado y se deben examinar las nuevas técnicas buscando posibles contribuciones epistémicas. En síntesis:

<table>
<tr><td colspan="2">Valor
Técnica</td><td>Pragmático</td><td>Epistémico</td></tr>
<tr><td colspan="2">Papel y lápiz</td><td>Sí</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Asistido por CAS</td><td>Tipo apretar un botón</td><td>Sí</td><td>No</td></tr>
<tr><td>¿Tipo?</td><td>Sí</td><td>Sí</td></tr>
</table>

Ante la inmediatez de los resultados usando CAS, las técnicas “con papel y lápiz” resultan obsoletas, lo que no deja de ser un problema porque las técnicas de “apretar un botón” no parecen capaces de asumir directamente su función en lo que a conceptualización se refiere. Se hace necesario concebir nuevas técnicas con valor epistémico para el estudio de las Matemáticas con la nueva tecnología, lo que no resulta fácil habida cuenta que la cultura matemática actual está implícitamente ligada a las técnicas “con papel y lápiz” y no es usual la idea de pensar en otros instrumentos como medios de conceptualización.

Desde la aparición en las aulas de CAS existe un debate sobre el futuro de las técnicas con papel y lápiz. Algunos autores ven en las mismas meras destrezas y proponen retrasar su aparición en la secuencias de contenidos todo lo posible para no interferir con la conceptualización. Otros subrayan la importancia de la competencia en tales técnicas al tiempo que reconocen que el panorama ha cambiado con la introducción de las nuevas herramientas, por lo que proponen consensuar en la comunidad educativa listas de habilidades consideradas imprescindibles.

Goldenberg (2003) entiende que alguna destreza algebraica continúa siendo indispensable, no ya tanto para encontrar respuestas sino para entender las mismas. Por ejemplo, podemos pensar en “descubrir patrones” y en “indagar en la razón de los patrones” como dos actividades diferenciadas, prestándose la primera a usar en ellas una calculadora y la segunda a ser trabajada “con papel y lápiz”. En estas asociaciones las contribuciones prácticas de las técnicas tradicionales tienden a ser sustituidas por las técnicas de “apretar un botón”, aunque no resulta claro cómo hay que actuar para poner en evidencia las contribuciones epistémicas que aportaban las técnicas “con papel y lápiz” y que se pierden al ser sustituidas. Un ejemplo lo tenemos en la obtención de derivadas. Las técnicas de derivación tradicionales se han trabajado en la educación secundaria principalmente por su valor práctico, valor práctico que va quedando obsoleto ante la nueva tecnología. Sin embargo la contribución epistémica de las mismas continúa siendo relevante para la compresión de los aspectos algebraicos del cálculo.



ACTIVIDAD: **Análisis de la variación de un modelo matemático**[1]

La actividad que se presenta surge en un contexto real que puede resultarle familiar al alumno. En ella, se pide al estudiante que interprete un caso concreto de una función logística cuyos parámetros son números decimales. Mostraremos cómo, a partir de un problema planteado en una asignatura de Cálculo, el uso de un CAS (en este caso, usaremos la Calculadora Simbólica Voyage 200) y el Geometer's Sketchpad nos ayuda a analizarlo desde una perspectiva gráfica, geométrica y simbólica, permitiendo con ello enriquecer las posibilidades de aprendizaje por parte del estudiante. Durante la resolución del problema, iremos explicitando, diferentes momentos que pueden contribuir a la comprensión del estudiante tanto en la resolución del problema en sí mismo, como para las extensiones del mismo.

El problema

Un presa de agua, en el que han muerto los peces, se repobla con 100 peces. La evolución del número de peces en el lago, una vez que el lago haya quedado repoblado, se puede modelizar con una función:

$$H(x) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot (2.7)^{-0.4 \cdot x}}$$

donde x es el número de meses que han pasado desde que el lago ha quedado repoblado. Analizar la validez de este modelo para describir la situación.

Representación y Comprensión del problema. Nos planteamos en primer lugar diferentes interrogantes que nos pueden ayudar a analizar la validez del modelo:

[1] La actividad que se presenta ha sido adaptada de los materiales (Módulo IV-5) del Proyecto de Investigación de Pennsylvania State University titulado *Technology-Intensive Secondary School Mathematics Curriculum*, cuyos investigadores principales son M. Kathleen Heid; Rose M. Zbiek. En este Proyecto, se presentan diferentes contenidos matemáticos de la Educación Secundaria utilizando principalmente CAS (Computer Algebra Systems) y Software de Geometría Dinámica.

¿Responde, de una manera lógica, la situación al modelo elegido? ¿Cuántos peces habrá en la presa después de 2, 3,….meses?, ¿y en el momento de partida?, ¿crecerá indefinidamente el número de peces? Desde una perspectiva geométrica, otras cuestiones nos ayudarán a interpretar y comprender la situación: ¿Cómo representar gráficamente la función $H(x)$? ¿Cuál es el dominio de $H(x)$? ¿Cómo representar y relacionar los elementos del dominio con los valores de la función? Este tipo de preguntas resultan importantes, si se tiene en cuenta que representando la función en la calculadora en un primer momento (con los parámetros iniciales que acotan la ventana), la pantalla no muestra la "representación gráfica completa" (Fig. 2). Esto nos lleva a plantearnos analizar más cuidadosamente la función para definir una nueva configuración para la ventana con la que los estudiantes puedan construir una representación geométrica del problema.

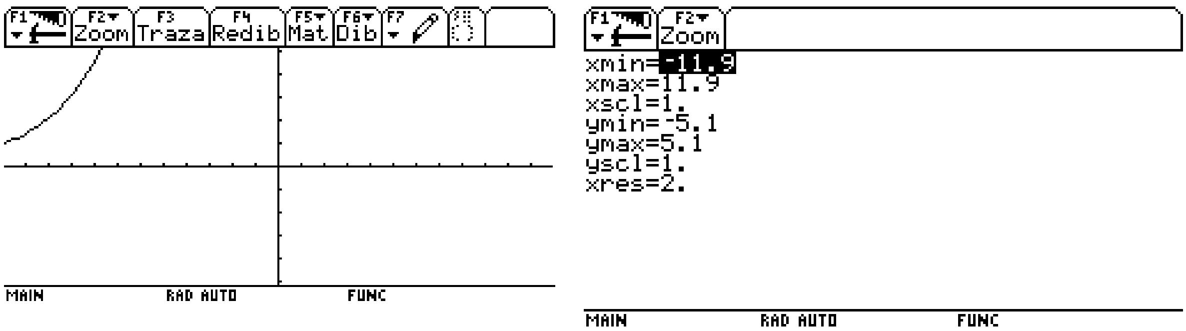


Figura 2

Para ello, bastará con estudiar el dominio de la función $H(x)$, lo cual nos permite observar que bastará con tomar valores positivos de la x y que cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 1000 y cuando $x \to -\infty$, entonces $H(x) \to 0$ por ello, podremos representar la función de manera que la visualicemos totalmente (Figura 3).

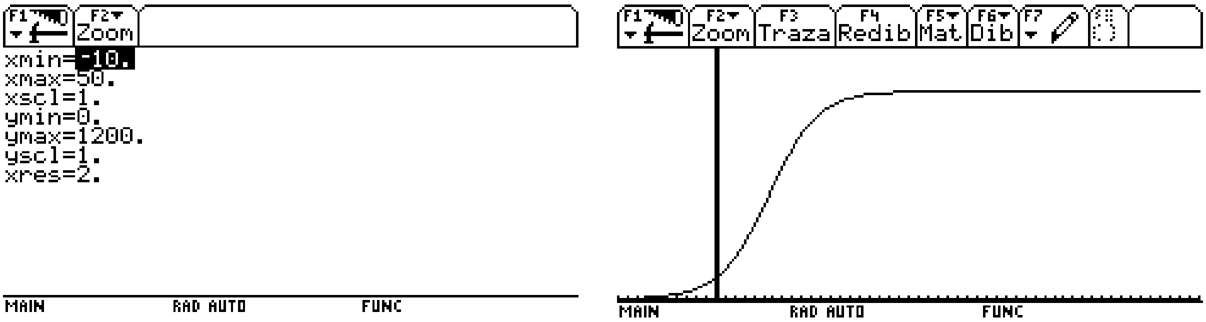


Figura 3

Examinado casos particulares

El uso del CAS nos ayudará también al análisis de la variación del número de peces a medida que pasa el tiempo. Podemos, una vez representada la función logística, obtener una tabla de valores directamente con la Voyage 200 (Figura 3

x	y4				
10.	855.18				
15.	977.3				
20.	996.82				
25.	999.56				
30.	999.94				
35.	999.99				
40.	1000.				
45.	1000.				

x=10.

MAIN RAD AUTO FUNC

Figura 4

Del análisis de la tabla, se observa cómo a partir del valor de x=40, la calculadora estabiliza el valor de la función, es decir el número de peces máximo que habrá en el lago será, según el modelo utilizado, 1000 peces.

Podemos utilizar una hoja de cálculo (Excel) para precisar, interpretar, tango gráfica como numéricamente, el crecimiento de la función. Para facilitar la construcción de la tabla en la hoja de cálculo, se pueden definir varias funciones que componiéndolas den la función de partida:

Sean $p(x) = -0{,}4x$, $q(x) = 2{,}7^x$; $r(x) = 1 + 9x$ y $s(x) = \frac{1}{x}$. La función $H(x)$ es la función compuesta de las que acabamos de definir, esto es:

$$H(x) = s(r(q(p(x)))) = \frac{1000}{1+9.(2,7)^{-0,4x}}$$

Podemos observar en la Tabla 1 que cuando el valor de x aumenta, se tiene que el valor de $p(x)$ disminuye; el valor de $q(p(x))$ disminuye; el valor de $r(q(p(x)))$ disminuye; y al disminuir este último valor, entonces $s(r(q(p(x))))$ aumenta y por lo tanto el número de peces que hay en la presa $H(x)$ aumenta.

Pensar en H(x) como una composición de p, q, r y s ayuda a contestar a la última pregunta rápidamente

Meses	*p(x)*	*q(p(x))*	*r(q(p(x)))*	*s(r(q(p(x))))*	nº de peces (aprox)
0	0	1	10	100	100
1	-0,4	0,67213188	7,04918691	141,860333	142
2	-0,8	0,45176126	5,06585136	197,400186	197
3	-1,2	0,30364315	3,73278832	267,896252	268
4	-1,6	0,20408824	2,83679415	352,510598	352
5	-2	0,13717421	2,2345679	447,513812	448
6	-2,4	0,09219916	1,82979244	546,510072	547
7	-2,8	0,06196999	1,55772995	641,959794	642
8	-3,2	0,04165201	1,37486808	727,342509	727
9	-3,6	0,02799564	1,25196079	798,747061	799
10	-4	0,01881676	1,16935088	855,17531	855
11	-4,4	0,01264735	1,11382612	897,8062	898
12	-4,8	0,00850069	1,07650617	928,931047	929
13	-5,2	0,00571358	1,05142223	951,09269	951
14	-5,6	0,00384028	1,03456252	966,592138	967
15	-6	0,00258117	1,02323057	977,296834	977
16	-6,4	0,00173489	1,01561401	984,62604	985
17	-6,8	0,00116607	1,01049467	989,614321	990
18	-7,2	0,00078376	1,0070538	992,995603	993
19	-7,6	0,00052679	1,00474109	995,281285	995
20	-8	0,00035407	1,00318664	996,823487	997
21	-8,4	0,00023798	1,00214184	997,862738	998
22	-8,8	0,00015996	1,0014396	998,562471	999
23	-9,2	0,00010751	1,0009676	999,033335	999
24	-9,6	7,2262E-05	1,00065035	999,350068	999
25	-10	4,8569E-05	1,00043712	999,563067	1000
26	-10,4	3,2645E-05	1,00029381	999,706281	1000
27	-10,8	2,1942E-05	1,00019748	999,802563	1000
28	-11,2	1,4748E-05	1,00013273	999,867288	1000
29	-11,6	9,9124E-06	1,00008921	999,910796	1000
30	-12	6,6625E-06	1,00005996	999,940041	1000

Tabla 1

Conexiones y extensiones

Analizando, tanto los valores numéricos como la expresión analítica de la función, podemos pensar que el valor 1000 es un valor “importante” para la solución del problema. Nos planteamos entonces la siguiente pregunta:

¿Cuál sería el número máximo de peces en el lago si el número de peces viene dado por la expresión? $H(x) = \dfrac{N}{1+9\cdot(2.7)^{-0.4\cdot x}}$

El empleo de la calculadora, nos permitirá visualizar la situación. Supongamos que la fórmula del nuevo modelo es:

$$K(x) = \frac{2000}{1+9\cdot(2.7)^{-0.4\cdot x}}$$

Podemos representar las dos funciones a la vez en la figura 5

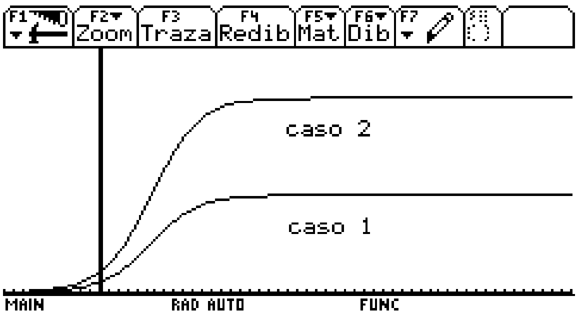


Figura 5

Siendo el “caso 1” la función de partida y el “caso 2” la que acabamos de definir. Se puede observar en la gráfica que las imágenes de las funciones, en el segundo caso, son “el doble” que las del primero.

Lo que se puede confirmar analíticamente:

$$K(x) = \frac{2000}{1+9\cdot(2.7)^{-0.4\cdot x}} = 2.\left(\frac{1000}{1+9\cdot(2.7)^{-0.4\cdot x}}\right) = 2.H(x)$$

y consecuentemente, se tendrá que el valor del numerador varía linealmente con la función.

A la hora de profundizar en las distintas extensiones del problema, podemos pensar que las funciones logísticas, en general, vienen representadas analíticamente por la expresión: $f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot(2.7)^{c\cdot x}}$

La figura 6, construida con el Sketchpad (software de geometría dinámica), representa una gráfica para la función logística con un aspecto similar al de nuestro ejemplo, esto es con un valor de c<0. Los parámetros a, b y c, se pueden variar arrastrando los puntos sobre las rectas

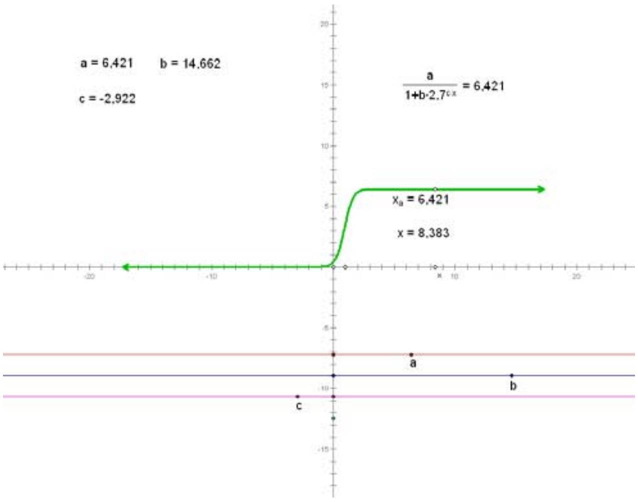


Figura 6

Se observa el comportamiento asintótico del eje OX (cuando $x\to-\infty$, se tiene que $f(x)\to 0$) que visualmente hace coincidir la curva con los puntos del eje; ahora bien, si tenemos en cuenta que, en general, la función logística toma la forma $f(x)=\dfrac{a}{1+b\cdot(2.7)^{c\cdot x}}+d$

¿cuál es el papel del parámetro d en la función $f(x)$? Tomando $d=2{,}003$, se puede observar que la gráfica es la trasladada verticalmente de la figura anterior.

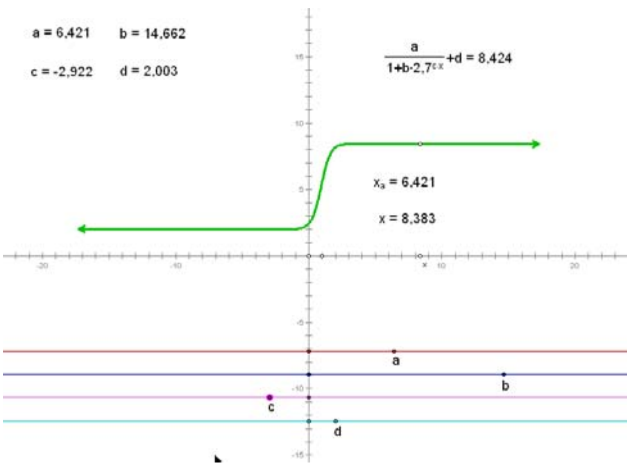


Figura 7

En la expresión anterior para $f(x)$ se tiene que los valores a, b, c y d son parámetros cuya variación e influencia podrá ser visualizada arrastrando sobre las rectas los puntos a, b, c y d situados sobre las rectas en la gráfica (Figuras 6 y 7). ¿Cómo analizar los distintos casos que surgen al variar tales parámetros? Podemos manipular los parámetros construidos con el software de muchas formas. Nos vamos a centrar principalmente en dos casos:

Caso 1: Variación de la función según que el parámetro c sea c = 0, c<0 y c>0.

Considerando c negativo, vemos que la función es siempre creciente y tiende hacia un valor constante ($f(x)=d$) para los valores de x negativos, luego corta al eje cuando empieza a crecer $x \to +\infty$, se tendrá que $f(x) \to a+d$

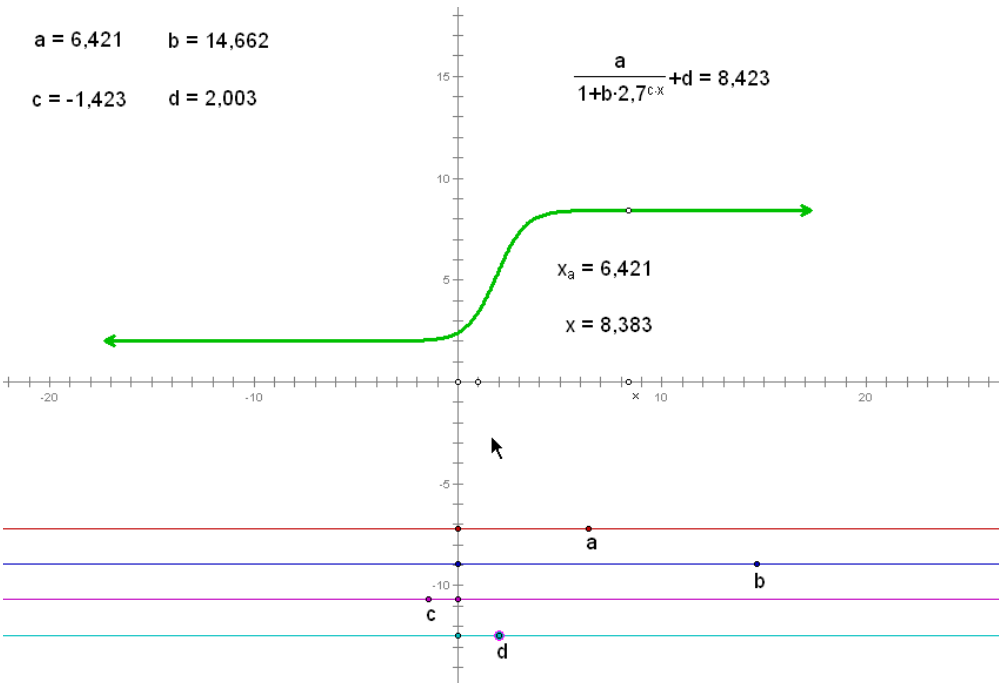


Figura 8

Cuando c=0 la función es obviamente una constante dando lugar a una recta horizontal.

Analíticamente lo podemos comprobar:

$$f(x)=\frac{a}{1+b(2.7)^{cx}}+d=\frac{a}{1+b(2.7)^{0x}}+d=\frac{a}{1+b(1)}+d=\frac{a}{1+b}+d$$

La gráfica quedaría (de manera aproximada)

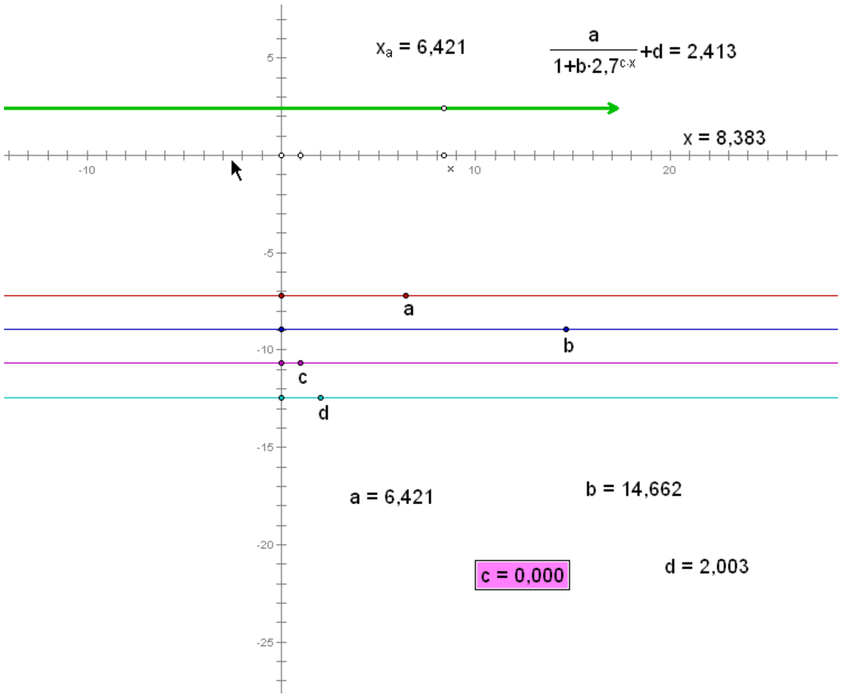


Figura 9

Si ahora consideramos que los valores de c son positivos, tendremos que la gráfica "se da la vuelta", es decir, es siempre decreciente (figura 9)

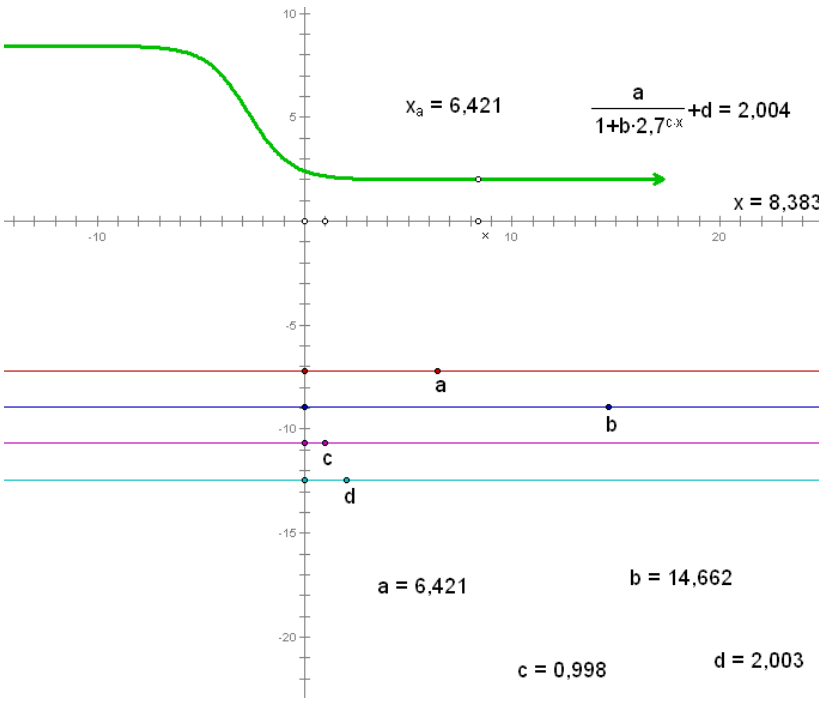


Figura 10

Las asíntotas seguirán siendo las mismas, sin embargo, cuando $x \to +\infty$, al ser c>0, se observa que $b.2{,}7^{cx} \to +\infty$ y por tanto, $f(x) \to d$ y cuando $x \to -\infty$, se tendrá que $b.2{,}7^{cx} \to 0$ y como consecuencia $f(x) \to a+d$, en contraposición de lo que ocurría en el caso que c<0.

<u>Caso 2</u>: Variación de la función según el parámetro b=0, b<0 y b>0.

Obviamente, si el parámetro b=0, la función será una constante y no representaría el fenómeno que estamos analizando. Supongamos ahora que el parámetro b>0, a medida que este parámetro se va haciendo más pequeño, el punto de corte de la función logística se acerca más a $a+d$, para ello bastará comparar las figuras 8 y 11. La influencia de la b en la expresión analítica está en el denominador.

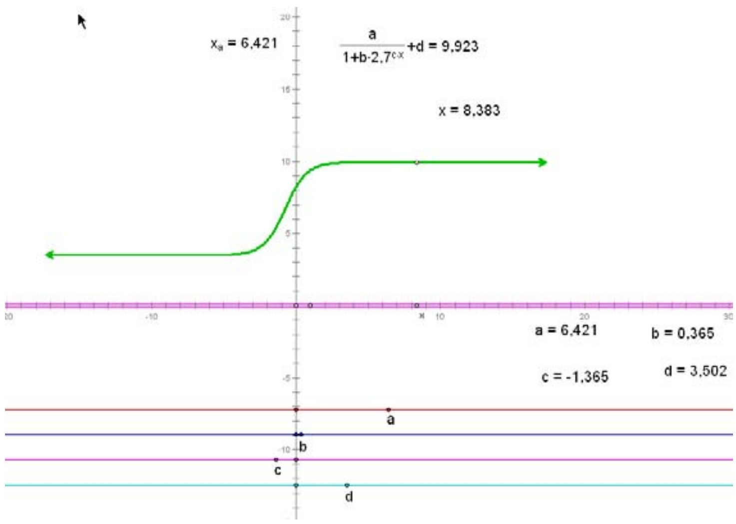


Figura 11

El caso singular aparece cuando el valor de b es negativo. En este caso, la curva se divide en dos partes, tal y como se puede observar en la Figura 12.

Si analizamos la expresión analítica, se tendrá que la ruptura de la gráfica surge cuando el denominador de expresión $\dfrac{a}{1+b2{,}7^{cx}}$ se anula, lo que podrá únicamente ocurrir en el caso que b sea negativo, dado que si b>0, siempre el denominador será positivo.

La figura siguiente muestra la gráfica para b <0:

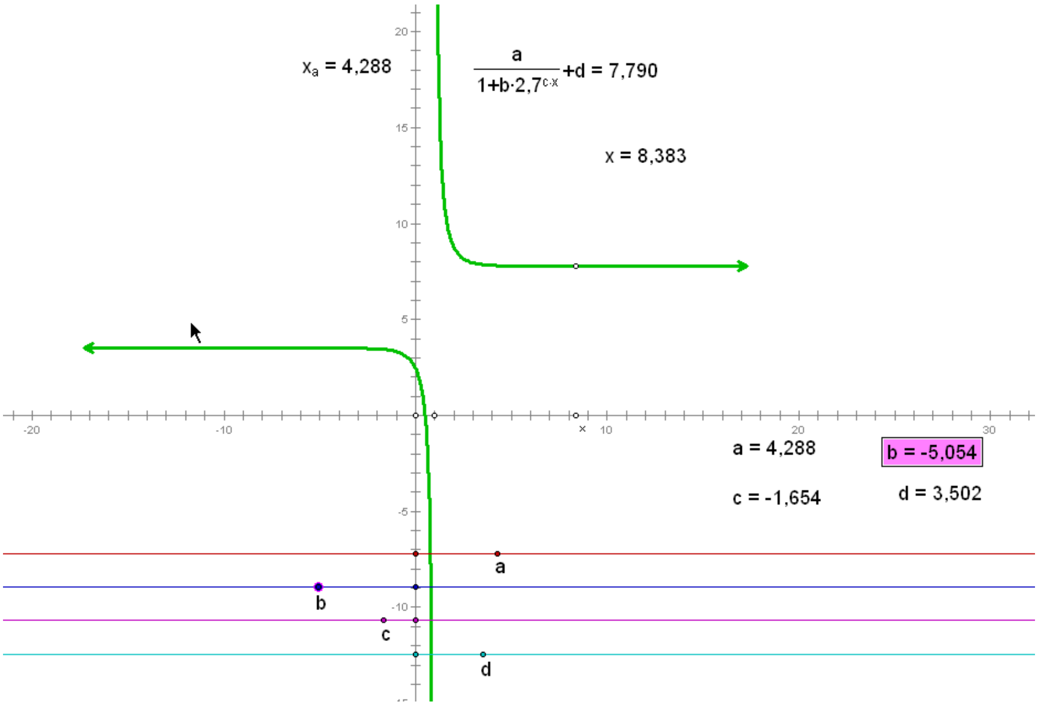


Figura 12

Haciendo uso de la calculadora simbólica, se tendrá exactamente la expresión analítica de la asíntota vertical:

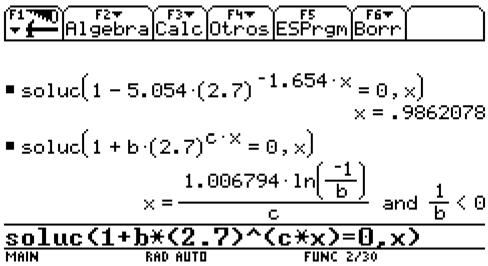


Figura 13

Tendremos por tanto, que la asíntota vertical para la función representada en la figura 12 es $x = 0{,}9862078$ y que en el caso general, se exigirá la condición de que b<0 para poder obtener solución de dicha ecuación.

$$x = \frac{\ln(-1/b).1{,}006794}{c} \text{ con la condición de que } \frac{-1}{b} < 0$$

Se podría seguir profundizando en el análisis de más posibilidades y precisando aún más la influencia de otros parámetros. Para ello, bastaría con establecer las conexiones que van surgiendo cuando se hace interactuar las representaciones gráficas con la expresión analítica de la función.

A modo de conclusión

Hemos desarrollado en este artículo, después de establecer algunas consideraciones generales, una serie de actividades que han puesto de manifiesto cómo el uso de un software de geometría dinámica y un CAS (la calculadora simbólica en nuestro caso) han permitido construir diferentes representaciones de un problema en términos de las propiedades de los objetos matemáticos que intervienen en el mismo. Las facilidades suministradas por el software para realizar la representación gráfica de la función logística nos ha ayudado a interpretar ampliamente el problema contextualizado.

La diferentes representaciones del problema han sido analizadas a partir de una serie de preguntas que han ido generando una serie de resultados y relaciones matemáticas que han ido enriqueciendo poco a poco la tarea que desarrollamos.

Se puede concluir que el empleo de la herramienta no sólo facilita la representación dinámica de los problemas que involucran variación, sino que además, ofrece la oportunidad a los estudiantes de conectar distintos contenidos y buscar nuevas relaciones o resultados

Referencias Bibliográficas

Boletín Oficial de Canarias (BOC) núm. 55, 30 de abril de 2002. *Currículo de Matemáticas en la ESO.*

Boletín Oficial de Canarias (BOC) núm. 59, 8 de mayo de 2002, *Currículo de Matemáticas en el Bachillerato.*

Camacho, M.; Santos, M. (2004). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno,* 37, 105-122.

Camacho, M.; Santos, M. (2006). Sobre el desarrollo del sentido numérico y el uso de software dinámico. *Uno,* 42, 20-33.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des partiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266

Goldenberg, P. (2003) Algebra and Computer Algebra. En Fey (ed.) *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*, NCTM monograph.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA.

Santos-Trigo, M. (2004). The Role of Technology in Students' Conceptual Constructions in a Sample Case of Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Spring Edition, vol 26, 2, 1-17

Simon, M. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.