MATERIALES MANIPULATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA[1]

Josefa Hernández Domínguez
María Muñoz Pérez
María Mercedes Palarea Medina
Raquel Ruano Barrera
Martín M. Socas Robayna

Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta la revisión de algunos recursos y materiales didácticos que podrían ayudar a organizar y fomentar situaciones de aprendizaje que desarrollen el pensamiento algebraico y faciliten, por ejemplo, la conceptualización del símbolo de las operaciones, de la cantidad desconocida o general, así como las conversiones entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural, mejorando la comunicación de los objetos en la clase de Álgebra. Se completa el artículo comparando los materiales y recursos didácticos seleccionados con el material didáctico denominado *Puzzle Algebraico*, que ha sido elaborado como una representación autosuficiente para el desarrollo del pensamiento algebraico requerido en la Educación Obligatoria.

Abstract

This paper presents a review of some resources and didactic materials that can help to organise and support learning situations to develop algebraic thinking, facilitating, for example the conceptualisation of the symbol in operations, or the unknown or general quantity, and conversions between the algebraic language and the natural language, improving the communication of objects in Algebra lessons. This work is completed comparing the selected teaching materials and resources with the teaching material called Algebraic Puzzle, which has been developed as a self-representation for the development of algebraic thinking required in Compulsory Education.

[1] Este trabajo ha sido financiado por la D. G. I., Plan Nacional I+D+I: "La resolución de problemas de Matemáticas en la Educación post-obligatoria haciendo uso de herramientas tecnológicas: Problemas de aprendizaje y métodos de enseñanza"(SEJ2005-08499)

J. Hernández; M. Muñoz; M. M. Palarea; R. Ruano; M. M. Socas (2008). *Materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria, pp. 115-145*

Introducción

Los currículos actuales de Canarias en Educación Primaria y en Educación Secundaria Obligatoria, proponen el uso de materiales manipulativos para la enseñanza de las Matemáticas en general, y del Álgebra en particular, siguiendo la línea de los estándares del NCTM (1989 y 2000).

Los materiales didácticos, cuando son utilizados como representaciones semióticas de los objetos matemáticos, juegan un papel importante en la enseñanza del Álgebra. Las transformaciones y conversiones por el alumno de, al menos, dos representaciones (analógica y digital), facilitan la comprensión del objeto matemático.

En este trabajo se revisan, analizan y presentan diversos materiales que se encuentran en el mercado para la enseñanza del Álgebra en el tercer ciclo de la Educación Primaria y en la etapa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, y se contrastan sus posibilidades con el material *Puzzle Algebraico* (Socas, 2000).

Esta revisión permite distinguir entre materiales para el Álgebra que tienen unos objetivos muy concretos que se usan en un ambiente lúdico, y no pretenden, en general, facilitar una comprensión completa del objeto algebraico tratado, sino una automatización de aspectos concretos, tales como resolución de ecuaciones de primer o segundo grado, reconocimiento de ecuaciones equivalentes…, según los casos, y materiales que pretenden ser autosuficientes para la enseñanza del Álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria.

En el artículo, nos centraremos en estos últimos, además de aportar una breve descripción de los primeros. De manera concreta, esta revisión y estudio ha permitido seleccionar tres versiones comerciales de materiales manipulativos para el Álgebra: Algebra Tiles (Cuisenaire), Lab Gear (Creative Publications) y Algeblocks (Southwestern Publishing), que consideramos los más representativos, además del ya mencionado Puzzle Algebraico. Estos cuatro materiales serán objeto de presentación y análisis desde el punto de vista del papel que juegan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria.

A efectos de presentación del trabajo, abordaremos los siguientes epígrafes: materiales didácticos como representaciones semióticas; las representaciones y los materiales en el currículo; los contenidos algebraicos en el currículo; recursos y materiales para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria; un ejemplo, la representación del menos, y consideraciones finales.

Materiales didácticos como representaciones semióticas

El papel de la visualización en Matemáticas ha sido reivindicado y popularizado en los últimos años, sin embargo el uso de diagramas, figuras e imágenes para representar, explicar y demostrar resultados matemáticos se remonta a los antiguos matemáticos griegos. De hecho, la palabra teorema significa "lo que se contempla" y no "lo que se demuestra", como solemos interpretar actualmente.

Hoy sabemos que un uso coherente de los Sistemas de Representación Semióticos para el Lenguaje Algebraico debe estar organizado en torno a: usar registros de representación (Duval, 1993), usar sistemas de representación semióticos "autosuficientes" (Palarea y Socas, 1994a, 1994b), usar las diferentes fuentes de significado (Kaput, 1987) y, articular situaciones de enseñanza que, partiendo de situaciones reales, permitan desarrollar "procesos enlazados de matematización" (Socas y Palarea, 1997).

También encontramos en la literatura experimentos de enseñanza en los que se usan modelos concretos para la enseñanza del Álgebra, que indican que muchos estudiantes tienden a anclarse en los modelos y parecen incapaces de ver las relaciones entre las operaciones que ejecutan en el modelo y las operaciones algebraicas correspondientes (Filloy y Rojano, 1985a, 1985b).

Nuestros propios experimentos de enseñanza (Domínguez y otros, 2005, 2006 y 2007a) ponen de manifiesto que los materiales didácticos utilizados como representaciones semióticas pueden ofrecer un papel importante en la introducción al Álgebra, ya que:

1. Facilitan la manipulación y conceptualización del símbolo y de la cantidad desconocida o general.

2. Proporcionan una interpretación geométrica a símbolos y operaciones.

3. Mejoran el discurso de la clase de Álgebra: por una parte, los alumnos reflexionan y discuten sobre el objeto matemático y, por otra, si la metodología que acompaña al material es la adecuada, permiten que cada alumno construya el aprendizaje a su ritmo (el profesor dirige, pero la enseñanza es individualizada, por esto es muy importante el diseño de las actividades que acompañan al material).

4. Facilitan las conversiones entre el lenguaje algebraico y el natural.

5. La manipulación de varias representaciones por el alumnado le permite construir imágenes mentales adecuadas de un objeto matemático.

En Socas (1999), se describe cómo el uso de un material didáctico como registro de representación en un proceso de enseñanza/aprendizaje, necesita de una “transformación adaptativa”, de manera que este material didáctico se configure como un registro de representación “autosuficiente” (Palarea y Socas, 1994b), es decir, que permita tanto las elaboraciones sintácticas como semánticas del objeto matemático.

De manera resumida, podemos decir que los instrumentos, objetos o dispositivos educativos, presentes en las diferentes actividades de enseñanza-aprendizaje, generan múltiples problemas, tanto desde el punto de vista de la práctica educativa como desde la investigación didáctica. La tendencia en la literatura respecto a la organización de estos objetos o dispositivos es variada, pero podemos observar tres grandes tendencias: caracterización de los instrumentos educativos, tipologías, y problemas derivados de su uso (Socas, 1999). La caracterización de los mismos, como señala Coriat (1997), es extremadamente difícil. A pesar de los diferentes términos propuestos no es posible encontrar organizaciones puras. No obstante, a efectos de tener un punto de referencia, podemos usar el acercamiento pragmático propuesto por este autor, que utiliza el término: “recurso didáctico” para considerar todos aquellos materiales que el profesor usa en clase (pizarra, cuadernos, libros, calculadoras, juegos, ordenadores, etc.), y el término “material didáctico” para aquéllos que se construyen con fines educativos específicos como los utensilios comunes, los materiales educativos y los juegos.

Los materiales didácticos han tenido una relevancia restringida en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, incluso dentro del enfoque conceptualista y los trabajos de innovación desarrollados han sido claramente insuficientes y, en muchos casos, inoperantes.

El resurgir, en la década de los ochenta, del estudio de los aspectos sintácticos y semánticos de las representaciones semióticas formales de los objetos matemáticos, a fin de explicar las interpretaciones de los estudiantes a estas representaciones formales (Rojano, 1994), supone de hecho el desarrollo de una perspectiva más amplia que la conceptualista, la psicolingüística que, al considerar las representaciones semióticas de los objetos matemáticos como lenguaje, amplía dicha perspectiva y permite incorporar la dimensión semiótica a las representaciones de los objetos matemáticos. Esta dimensión semiótica del material didáctico, considerada en las representaciones de un objeto matemático, puede ayudar a clarificar la propuesta pragmática de organización.

Desde esta perspectiva podemos avanzar más en la organización anterior, y considerar el material didáctico como un sistema de representación semiótico para un objeto matemático dado, pero esto no es obviamente una adaptación inmediata. Esta posición supone considerar dos aspectos como esenciales:

a) La necesidad de un acercamiento pragmático a los sistemas de representación semióticos.

b) Aceptar como hipótesis de partida que el uso del material didáctico en el sentido de representación semiótica, puede facilitar en gran medida la actividad matemática al estimular y favorecer el desarrollo del conocimiento matemático.

Es claro que los materiales educativos no pueden lograr por sí mismos enseñar Matemáticas, es más, las Matemáticas son un valor añadido al material que debe ser un medio de enseñanza y, que muchas veces lo convertimos en un objeto de enseñanza. Se da la siguiente paradoja: para el profesor el material es considerado como un control semántico del objeto matemático, sin embargo, para el alumno, se convierte en un objeto de enseñanza y, por tanto, no es un modelo correcto y no permite el control esperado.

Parece razonable dar otro enfoque al uso del material concreto en clase de Matemáticas, consideradas éstas como un producto cultural en el que el lenguaje es esencial.

En el proceso de matematización de la cultura, desde la perspectiva del lenguaje, podemos articular con coherencia el material didáctico como un registro de representación semiótico para un objeto matemático dado. Es en este sentido, en el que para poder utilizar un material didáctico como registro de representación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, se necesita realizar una "transformación adaptativa", de manera que este material didáctico se configure como un registro de representación "autosuficiente".

Las representaciones y los materiales en el currículo

Las representaciones externas (representaciones semióticas) también constituyen un tema de relevante actualidad tanto en el ámbito curricular como en el de investigación. Así, por ejemplo, desde los estándares curriculares

(NCTM, 1989), se propone un desarrollo de los contenidos de las Matemáticas de las enseñanzas no universitarias organizado en torno a cuatro ejes: Matemáticas como resolución de problemas, Matemáticas como comunicación, Matemáticas como razonamiento y demostración, y Conexiones matemáticas, en los que el uso de representaciones semióticas múltiples constituye una recomendación al desarrollo curricular en los cuatro ejes anteriores, pero especialmente en el de comunicación y conexiones en los términos siguientes: *Los estudios de Matemáticas deben dar oportunidad a los estudiantes para que puedan modelizar situaciones usando representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas* (NCTM, 1989, pp. 75, 83, etc.).

Análogamente, los nuevos estándares (NCTM, 2000), además de mantener los cuatro ejes anteriores: Resolución de problemas, Comunicación, Razonamiento y demostración y Conexiones; añaden un nuevo eje, Representación. En concreto, el Estándar número 10 señala: *Los programas de instrucción en Matemáticas desde Educación Infantil hasta Bachillerato deben permitir a todos los estudiantes:*

- *Crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.*

- *Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas en la resolución de problemas.*

-*Usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos sociales y matemáticos"* (NCTM, 2000, pp. 67, 136, 206, 280 y 360).

Las diferentes reformas educativas en España también han destacado la utilización de diferentes representaciones semióticas para fomentar el conocimiento matemático de todos los estudiantes. Los contenidos de las Matemáticas escolares en los currículos de la Educación Primaria y de la Educación Secundaria Obligatoria, señalan entre los procedimientos, la utilización de distintos lenguajes, es decir, el uso de diferentes sistemas de representación.

En la actualidad, por ejemplo, en la introducción al currículo de matemáticas de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma Canaria (BOC, 2007a), encontramos afirmaciones como las que siguen: *Los aprendizajes matemáticos se logran cuando el alumnado elabora abstracciones matemáticas a partir de obtener información, observar propiedades, establecer relaciones y resolver problemas concretos. Para ello es necesario traer al aula situaciones cotidianas que supongan desafíos matemáticos atractivos y el uso habitual de variados recursos y materiales didácticos para ser manipulados por el alumno….*

La automatización de estrategias y algoritmos también es importante, pero sólo después de la comprensión a través de la manipulación real de objetos y situaciones, de la verbalización de lo observado y de la transcripción al lenguaje gráfico y simbólico.

Para la consecución de los objetivos del área es imprescindible la construcción del pensamiento matemático en el alumnado, lo cual requiere el desarrollo paulatino a lo largo de la etapa.

Igualmente en el currículo de Educación Secundaria (BOC, 2007 b), también encontramos la siguiente referencia al uso de materiales didácticos para la enseñanza del Álgebra: *En la Educación Secundaria Obligatoria, el conocimiento matemático permite referirse a múltiples situaciones e informaciones, de manera concisa, clara e inteligible, no sólo en situaciones ligadas a objetos concretos (más unido a la competencia matemática de la Educación Primaria), sino que se encuentra con la posibilidad de dar entrada a suposiciones, conjeturas e hipótesis, y a un aumento progresivo de [la posibilidad de] abstraer relaciones, realizar inferencias y operar con relaciones simbólicas a partir de la manipulación de recursos diversos (objetos físicos, materiales estructurados ,y representaciones o modelos).*

Los contenidos algebraicos en el currículo

En el actual currículo español se observa una propuesta de integración del Álgebra en la Educación Primaria. En dicho currículo se aborda una enseñanza-aprendizaje previa a la enseñanza formal en la Educación Secundaria. Esta propuesta se recoge en el marco de lo que se conoce como Preálgebra.

Así, encontramos recogidos los siguientes contenidos para la enseñanza en el tercer ciclo de la Educación Primaria, en el bloque de Números y operaciones:

1. Números enteros…
2. Operaciones e iniciación al Álgebra

2.1. Análisis de patrones numéricos y geométricos expresándolos, cuando sea posible, mediante reglas simbólicas.

2.2. Uso de letras para representar un número desconocido fijo o un número cualquiera.

En la Educación Secundaria Obligatoria, se formula una propuesta amplia de los números enteros y del Álgebra, que se explicitan en todos los cursos, en los bloques 2 y 3, respectivamente.

Recursos y materiales para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria

Tal como hemos indicado al comienzo de este artículo, aunque el papel de la visualización de las Matemáticas ha sido revindicado y popularizado en los últimos años, el uso de diagramas, figuras e imágenes para representar, explicar y demostrar resultados matemáticos se remonta a los antiguos matemáticos griegos. Algunos ejemplos de esto son los siguientes:

Pitágoras (siglo VI a.C.) estudió las propiedades de los números sirviéndose de sus representaciones gráficas. Al parecer materializaba los números con ayuda de piedritas; así los números se podían manipular físicamente.

Los pitagóricos fueron los creadores del Álgebra geométrica, poderosa herramienta que permitió resolver algunos problemas de carácter algebraico con ayuda de la Geometría. Aunque no se dispone de los textos originales, se admite que buena parte del Álgebra de los pitagóricos está contenida en el libro II de los Elementos de Euclides. Aunque este libro no trata el tema del Álgebra, ya que no resuelve problemas numéricos y mucho menos ecuaciones, gran parte de las proposiciones se pueden interpretar algebraicamente, como lo hicieron los matemáticos árabe-musulmanes, en particular al-Khwarizmi.

En la Matemática india, encontramos autores como Nilakantha (S. XV y XVI) que utilizó cubos unitarios para representar los números triangulares y descubrir la fórmula que permite calcular la suma de los “n” primeros números triangulares.

En la actualidad, encontramos diferentes propuestas de materiales para estudiar Álgebra. Podemos diferenciar dichas propuestas, como hemos dicho, en dos grupos: el primero, se refiere a materiales que tienen unos objetivos muy concretos y, el segundo a algunos materiales que se presentan como autosuficientes, y permiten estudiar los objetos algebraicos básicos del Álgebra en la Educación Obligatoria.

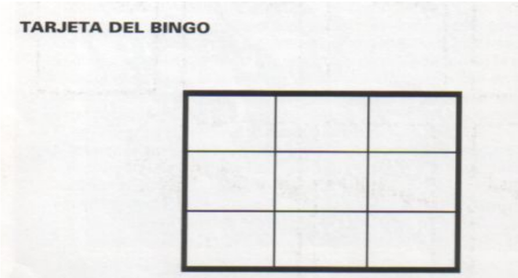
Ejemplos de materiales del primer grupo son: *la Estrella mágica de seis puntas; el Chinchón algebraico; Juega con nosotros al fútbol; Bingo de ecuaciones de primer grado; Cuadrado mágico algebraico; Pistas para Álgebra; Cartas de Álgebra*; *Tableros de fichas de colores; dominós algebraicos;...*, por citar algunos. A continuación describimos someramente algunos de ellos.

En García Azcárate (1999) encontramos **Bingo de ecuaciones de primer grado.**

Se juega con quince cartas que muestran quince ecuaciones de primer grado que presentan soluciones 1, 2, 3, hasta 15 y se necesitan tarjetas de bingo vacías, dos o tres para cada alumno. Es un juego para todo el grupo de clase.

Se reparte una hoja por alumno con las tarjetas de bingo vacías. Se debe designar a una persona para llevar el juego (que puede ser el profesor). Cada alumno rellena una tarjeta con nueve números diferentes escogidos entre el 1 y el 15, ambos inclusive. La persona que lleva el juego hace sacar a diversos alumnos, sucesivamente y sin reposición, cartas de la baraja. Cada vez que se saca una carta, se escribe la ecuación correspondiente en la pizarra, dejando cierto tiempo entre una ecuación y otra. Los alumnos van señalando en sus tarjetas de bingo las soluciones de las ecuaciones que van saliendo. Gana el primero que haga dos líneas completas (aunque tengan un número en común).

Se puede hacer tres veces el juego.



Información sobre este material se puede encontrar en: http://platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0506/bingo.doc

Presentamos un ejemplo de Bingo de Primer grado, nivel 1:

-5x+7= 4x-2	2-2x=4-3x	2x-5=4-x	2-x=2x-10
2x+ 1= x+6	20-4x=26-5x	7x-(x+40)=2	2-(x-4)=-2
3- (7-x)=5	2-x=3x-38	3x-30=14-x	28-2x=x-8
30 -3x= 4 -x	7(x -4)-28=3x	3(x-8)=x+6	2x=36-(x-12)
5(x-6)=3x+4	80-4x=x-10	2(34-2x)=x-27	3(x-8)=x+16

http://www.anagarciaazcarate.com/wp-content/bingo-de-ecuacionesnivel1.doc

En el Catálogo de la empresa “Proyecto Sur” se presentan, entre otros:

Cuadrado mágico algebraico

Es un juego para una persona, con 9 fichas numeradas del 1 al 9 y otra con una x. Se trata de completar el cuadrado mágico utilizando todas las fichas, una en cada casilla, de modo que la suma de todas las líneas sea 15, escribiendo previamente las ecuaciones correspondientes.

Más información se puede encontrar en:

http://www.proyectosur.com/CATALOGO%20MATERIALES.pdf

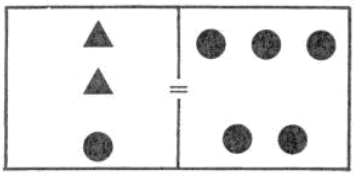
En Socas y otros (1989) se describe el material **Tableros de fichas de**

colores.

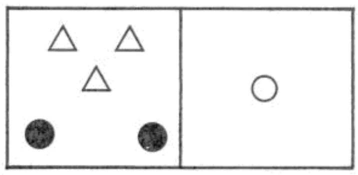
Es un material que consta de un tablero de madera o cartulina con un símbolo de igualdad en el centro y fichas de dos colores y dos formas.

Si se eligen las formas triángulo y círculo y los colores blanco y negro, las fichas serían: triángulo blanco para incógnitas negativas, triángulo negro para incógnitas positivas, círculo blanco para números negativos y círculo negro para números positivos. La única regla de eliminación es la de que las parejas de la misma forma y distinto color en un mismo lado del tablero, se neutralizan y eliminan.

Para jugar se colocan las fichas sobre el tablero y se expresa simbólicamente:

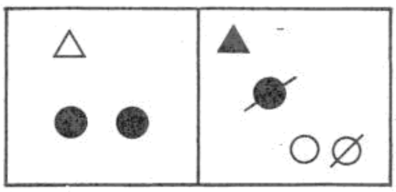


$2x + 1 = 5$

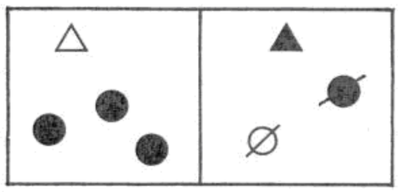


$-3x + 2 = -1$

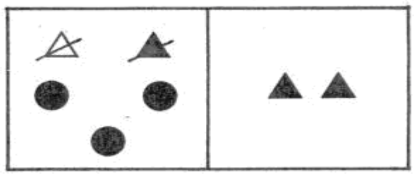
El proceso correcto lo acabará el que consiga aislar las fichas que representan las incógnitas positivas, sin que quede en el lado contrario otro triángulo. Se jugará por turno, haciendo movimientos que conviertan la situación en otra equivalente.



$-x + 2 = x + 1 - 2$



$-x + 3 = x - 1 + 1$



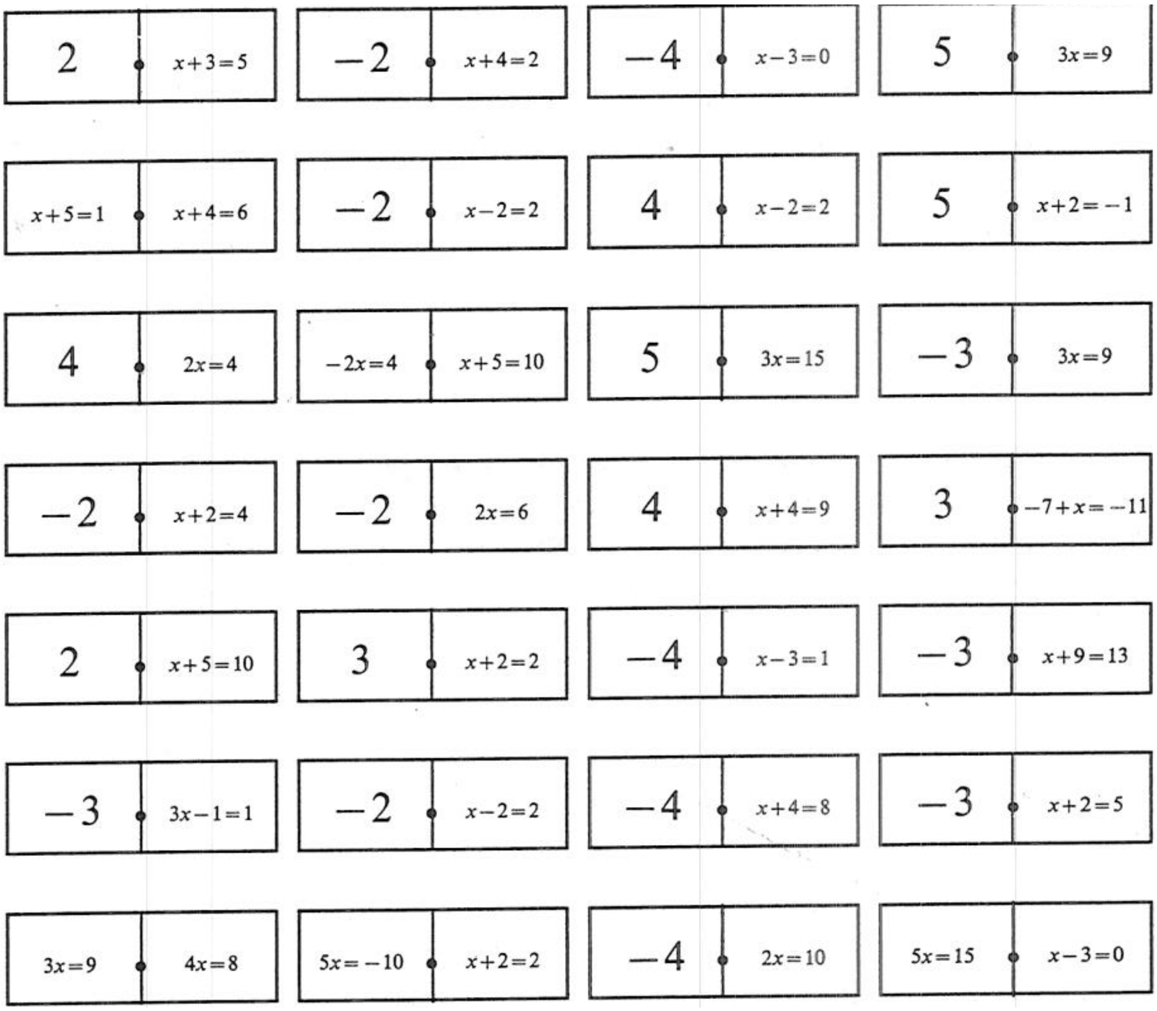
$3 = x + x$

Este juego puede ayudar a introducir a los alumnos en el concepto de ecuación, en la observación de algunas reglas de manipulación de la igualdad y en la resolución de ecuaciones sencillas.

Finalmente, en Grupo Azarquiel (1991), se presenta el denominado Dominó algebraico.

Dominó algebraico

Es un dominó con el que se trabaja la resolución de ecuaciones de primer grado. Sus reglas de juego son análogas a las del dominó clásico.



Estos materiales no son paradigmáticos, pues sólo permiten trabajar algún aspecto del Álgebra.

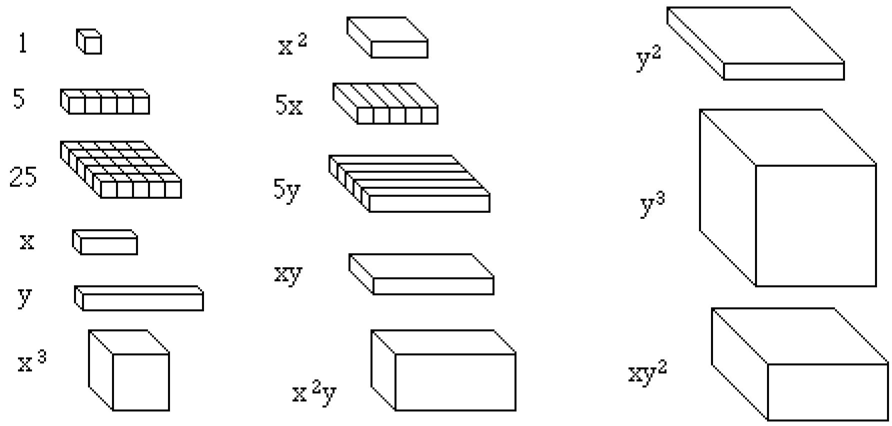
El segundo grupo está determinado por cuatro materiales que no se centran en un objeto concreto y que pretenden ser autosuficientes para la enseñanza del Álgebra en la Enseñanza Obligatoria: Lab Gear, Algebra Tiles, Algeblocks y Puzzle Algebraico, que permiten trabajar de forma global los conceptos algebraicos básicos.

Materiales didácticos como las Regletas de Cuisenaire, los Bloques Multibásicos de Dienes y su desarrollo posterior, soportan y son apoyo para los tres primeros (Lab Gear, Algebra Tiles y Algeblocks), y el Álgebra geométrica de los griegos, para el cuarto: Puzzle Algebraico.

A continuación describimos cada uno de ellos:

LAB GEAR

Este material consta de las piezas 1, 5, 25 y de las variables x, y, 5x, 5y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^3, y^3.



El Lab Gear ayuda a los estudiantes a visualizar el Álgebra: Los valores de los bloques permanecen constantes, se elimina la confusión acerca de si una pieza determinada representa el mismo valor, mientras que los tamaños de los bloques x e y son arbitrarios, y no guardan relación con ningún valor. Esto ayuda a que los estudiantes reconozcan las variables como cantidades desconocidas.

El material se completa con diversas planillas que organizan los bloques en rectángulos para modelizar la multiplicación, la división y para factorizar.

Con este material se pueden trabajar aspectos como la representación del signo menos, fracciones equivalentes, suma, resta multiplicación y división de polinomios, factorización, simplificación de expresiones, resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones de primer grado. Con él no se pueden trabajar polinomios de grado mayor que dos.

Más información sobre este material se encuentra en: http://www.picciotto.org/math-ed/early-math/early.html#Manipulatives

ALGEBRA TILES

Este material consta de piezas positivas: 18 unidades (amarillo), 8 piezas x (rosas), 4 piezas x^2 (verdes) y piezas negativas: 18 unidades, 8 piezas x y 2 piezas x^2, todas rojas.

Permite trabajar aspectos tales como números con signo, propiedad distributiva, adición y sustracción de polinomios, multiplicación de polinomios, factorización de polinomios, resolución de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas.

Se puede explicar bien la propiedad distributiva y la factorización, trabajan sólo con una variable, lo que puede limitar la conceptualización de la cantidad desconocida y el tránsito entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico. La modelización de la multiplicación como área no es geométricamente correcta cuando está implicado el signo menos y sólo pueden ser representadas expresiones sencillas que contengan dicho signo.

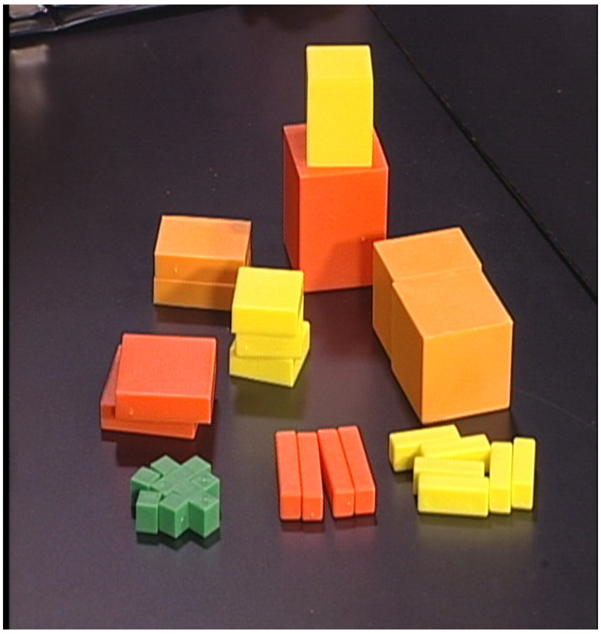
Se puede extraer más información en:

http://regentsprep.org/Regents/math/teachres/ttiles.htm

ALGEBLOCKS

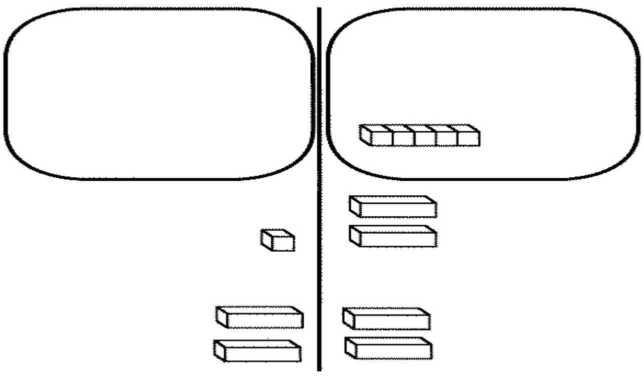
Está formado por piezas que representan las variables x, y, x^2, y^2, xy, x^2 y, xy^2, x^3, y^3, así como las unidades.

Está diseñado para que el estudiante desarrolle conceptos matemáticos desde una perspectiva constructivista. Mediante el uso de dichas piezas, los estudiantes exploran y conceptualizan las nociones básicas de Preálgebra y Álgebra, pueden crear reglas en forma inductiva, es decir, van de lo concreto a lo abstracto.

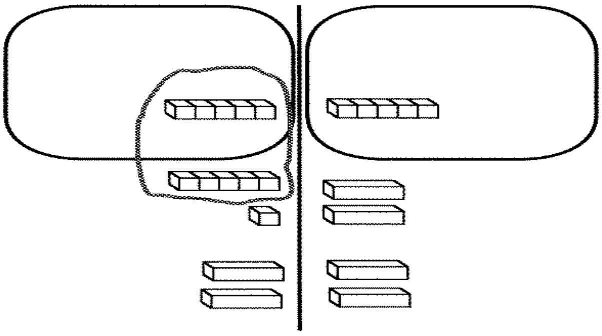


Con este material se pueden trabajar las operaciones básicas con números enteros (adición, sustracción, multiplicación y división), adición, sustracción, multiplicación, división y factorización de polinomios, traducción de expresiones lingüísticas a expresiones matemáticas, resolución de ecuaciones lineales, de inecuaciones y de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables.

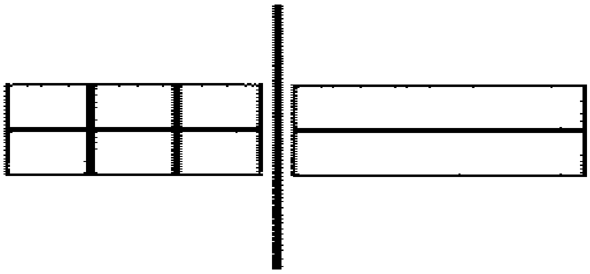
Como ejemplo, consideremos la resolución de la ecuación:
2 x + 1 = 4 x - 5. En primer lugar se representa:



Luego se forman los ceros correspondientes:



Y se procede a eliminar los bloques, finalmente, queda:



Con lo que ya podemos encontrar la solución: x = 3

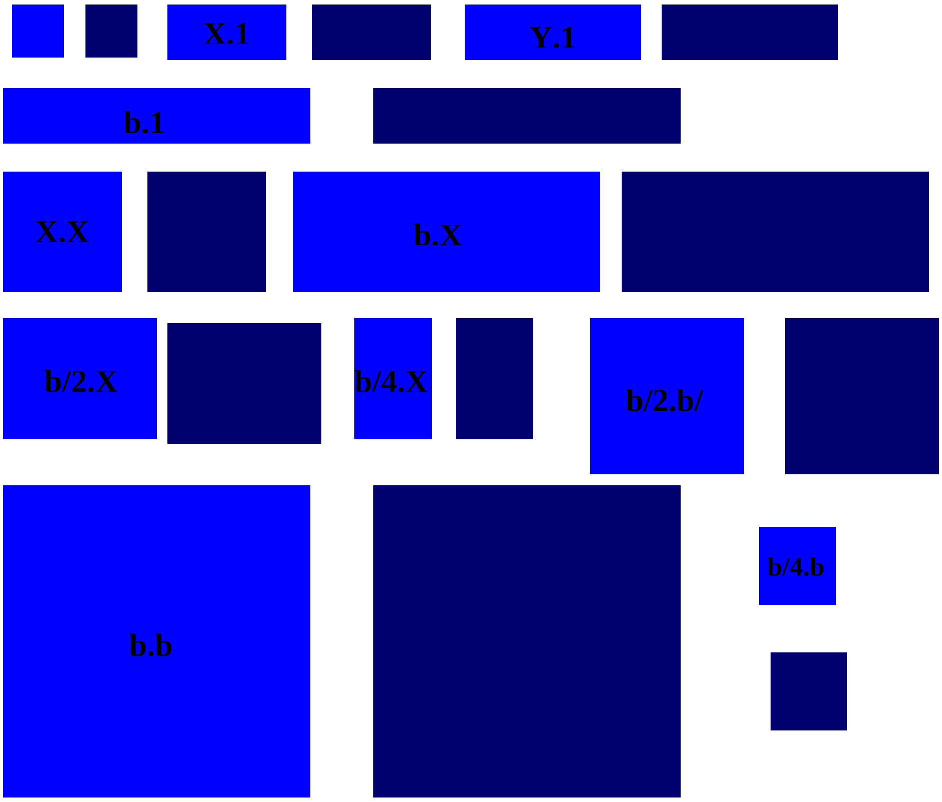
Se puede ampliar la información en:

http://www.etacuisenaire.com/algeblocks/algeblocks.jsp

Hemos de señalar que los tres materiales anteriores proporcionan por ejemplo, una representación adecuada para trabajar la propiedad distributiva, pero sólo el Lab Gear y el Algeblocks permiten el trabajo en tres dimensiones.

PUZZLE ALGEBRAICO

El Puzzle Algebraico está formado por 132 fichas que se distribuyen en 13 piezas de diferentes colores (azul claro y azul oscuro), dimensiones y signos.



El Puzzle es una representación semiótica de carácter bidimensional no paradigmática, basada en la noción de magnitud orientada, que permite abordar el tratamiento de los siguientes objetos matemáticos: cantidades numéricas positivas y negativas, expresiones algebraicas elementales, ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y otras situaciones (sistemas de ecuaciones e inecuaciones).

Aunque se trata de una representación semiótica no paradigmática, respeta el principio de extensión algebraica, especialmente con la regla de los paréntesis, en la que aparece asociada a dos ideas: la resta como acción de quitar (formación de ceros, ceros relativos,…) y la resta como suma del opuesto. Además, también respeta la regla de los signos y en consecuencia permite la formación de rectángulos. Está hecho para que respete el Álgebra geométrica griega, es decir, para que permita resolver ecuaciones de hasta 2º grado.

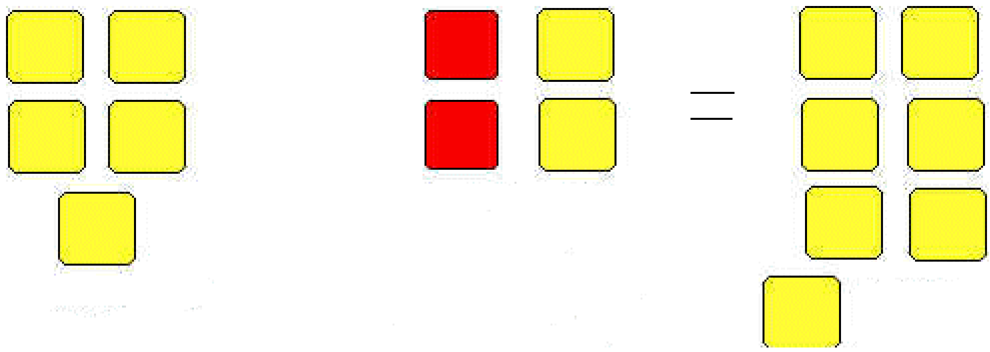
El Puzzle no es una estrategia de enseñanza. Es una representación más del objeto algebraico que se quiere estudiar, que puede ser utilizada con cualquier método, y bajo cualquier concepción que se tenga de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra (Domínguez y otros, 2007b).

Un ejemplo, la representación del menos

Analizamos ahora, cómo los alumnos plantean la representación del signo menos, ya que es uno de los aspectos más controvertido de los materiales manipulativos para el Álgebra. Los materiales presentados la modelizan de formas diferentes.

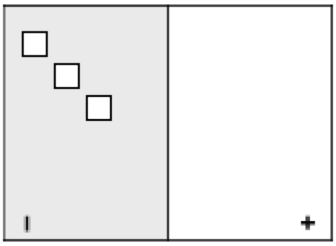
La modelización del signo menos en el Algebra Tiles está basada en el color: un color corresponde a los números positivos y otro a los números negativos, es decir, existe una ficha para la cantidad negativa y otra para la cantidad positiva. La ventaja de esta modelización es su sencillez, sin embargo presenta algunas dificultades: por ejemplo, el material refuerza la falsa idea de que "-x" es negativo y "x" es positivo.

Para calcular (+5) – (-2) se colocan tres fichas positivas (amarillas), como debemos restar dos fichas negativas (rojas), se añaden ceros (parejas de distinto color), luego quitamos dos rojas (-2) con lo que el resultado final viene representado por siete fichas amarillas (+7).

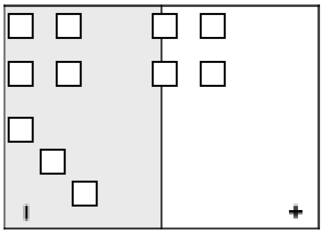


En el Algeblock la representación del menos está basada en la posición que ocupa en la planilla, y tiene el inconveniente de que sólo pueden representarse expresiones sencillas que impliquen signos menos.

Como ejemplo vamos a calcular (-3) - (+4). Utilizamos una planilla de dos rectángulos y colocamos tres bloques en la parte negativa.



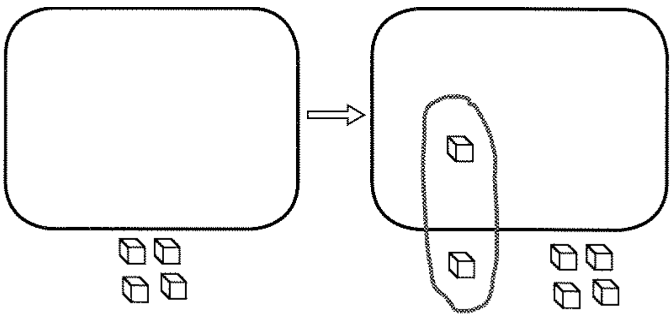
Como no podemos quitarle cuatro unidades positivas formamos cuatro ceros.



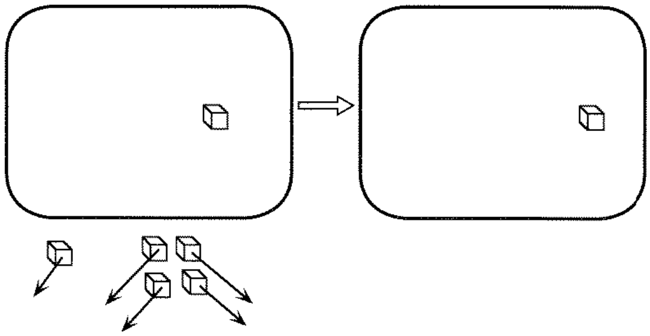
Ahora podemos quitar cuatro unidades positivas, con lo que el resultado es siete unidades negativas, esto es, (-7).

El Lab Gear tiene dos representaciones distintas basadas en la posición, pero tiene la desventaja de que es muy difícil aprender a utilizarlo.

Vamos a calcular (+4) - (-1). Colocamos cuatro bloques en la zona positiva y como no podemos restar un bloque negativo, formamos un cero.



A continuación, ya podemos quitar una unidad negativa, el resultado es cinco unidades positivas, es decir (+5).



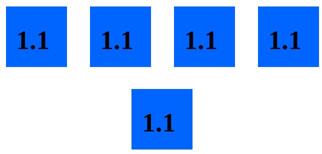
En el Puzzle, como en el Algebra Tiles, se mantiene la idea del color, cuya ventaja es la simplicidad del modelo, aunque a diferencia de éste, es la misma ficha la que representa la cantidad positiva por un lado y la cantidad negativa por el otro, lo que implica la idea de opuesto, y no refuerza el concepto equivocado de que "–x" es siempre negativo.

Vamos a calcular (+4) - (-1) utilizando la idea de quitar. Representamos (+4). A (+4) no podemos quitarle (-1). Creamos tantos ceros como sea necesario hasta poder quitar (-1).

Por tanto, (+4) - (-1) = +5

Ahora calcularemos (+4) - (-1) utilizando la idea de opuesto.

Representamos (+4) y el opuesto de (-1). Hacemos la suma y aplicamos la regla de simplificación si es necesario (en este caso no lo es).



Por tanto, (+4) - (-1) = (+4) + (+1) = 5

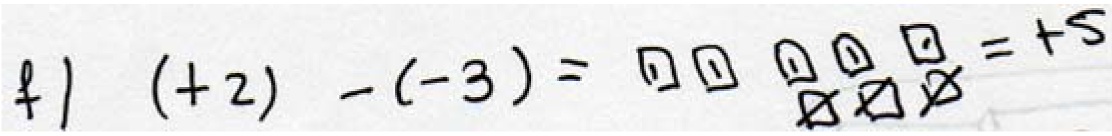
La representación precisa del opuesto permite conceptualizar la resta no sólo considerándola con la idea de quitar, sino como suma del opuesto, modelo imprescindible cuando se trata de restar una expresión polinómica entre paréntesis, como por ejemplo 5 x - (x - 1).

Nuestros experimentos de enseñanza nos han permitido estudiar el progreso y el comportamiento de los alumnos cuando estudian cantidades positivas y negativas. Lo reflejamos mediante dos fragmentos de la entrevista realizada a dos alumnos que participaron en uno de estos experimentos de enseñanza, Deborah y Sergio.

<u>Fragmento de la entrevista con Deborah</u>

P: Ahora ésta: (+2) - (-3)

D: Pongo dos fichas positivas y a más dos no le puedo quitar menos tres, entonces añado una positiva y otra negativa, y otra y otra y le quito tres, menos tres y me queda cinco, menos cinco.



P: Vamos a hacer ahora el apartado d)

D: Pongo tres ***y***... una ***b***.

P: ¿Tienes que añadir una ***b***?

D: Una ***b*** negativa ¿no?

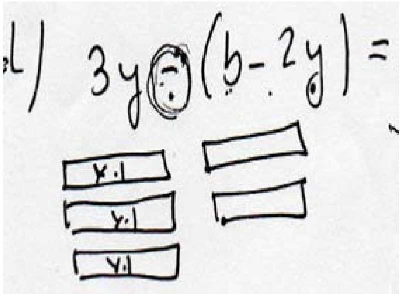
P: ¿Y por qué negativa? Sigue... añades una ***b*** negativa y ...

D: Dos ***y.***

P: Dos ***y*** ¿positivas o negativas?

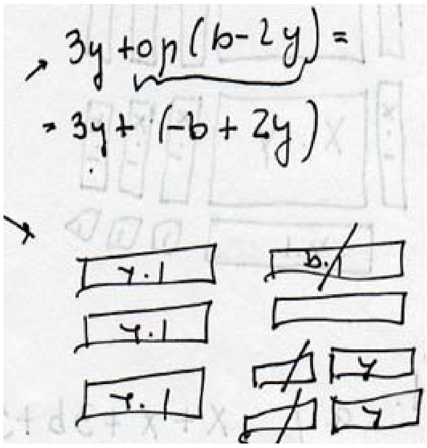
D: Negativas.

P: ¿Por qué?



[Creemos que la confusión de Deborah se debe a que sólo resta quitando y nunca sumando el opuesto, así que cuando tiene que restar un paréntesis no sabe qué hacer].

P: Deborah te lo explico. Esto lo puedes hacer de dos maneras: Restar es quitar o sumar el opuesto. Lo hemos dicho reiteradas veces en clase. Tres ***y*** más el opuesto de... Ahora, estabas intentando pensar algo parecido pero te equivocabas en una cosa: para calcular el opuesto le damos la vuelta a todas las fichas ¿verdad?, Entonces, ¿cuál sería el opuesto de todo esto?



D: Menos ***b*** más dos veces ***y***.

P: Aquí sabes operar, pues a las tres fichas ***y*** le añadirías una ***b*** negativa .... ¿Vale? Otra manera sería quitar. Entonces dibujarías tres fichas ***y***, y a tres fichas ***y*** le quitas una ***b***, como no la tienes, añadiríamos un cero de ***b*** y ahora ya le podrías quitar la ***b.*** Tienes que quitar dos fichas negativas de ***y***, que no tienes. Luego tienes que añadir un cero de ***y***, sigues sin poder quitar dos fichas negativas de ***y***, luego tienes que añadir otro cero. Ahora, ésta y ésta se irían y al final ¿te quedaría?

D: Cinco ***y*** menos ***b***.

[Luego se le plantea que realice la siguiente operación y la resuelve perfectamente usando la idea de quitar. Entendemos que Deborah en este momento resuelve un conflicto, que el Puzzle le había ayudado a generar y que era necesario para darle sentido a este tipo de operaciones].

<u>Fragmento de la entrevista con Sergio</u>

Profesora: 6 negativas. Muy bien. Seguimos trabajando con números enteros, la siguiente cuestión que te planteo es (-4) + (-3) - (-2) = ¿Qué haríamos?

Sergio: 4 fichas negativas y 3 negativas,… (dibuja)

Profesora: Y ahora ¿qué pasaría?

Sergio: Sumo.

Profesora: ¿Y sumar qué significa?

Sergio: Añadir.

Profesora: Y entonces ¿te da?

Sergio: 7.

Profesora: ¿7?

Sergio: Negativo…, menos (-2).

Profesora: Muy bien. Tendrías que seguir haciendo esa operación.

Sergio: Sería el opuesto.

Profesora: Bien ¿es la única manera de interpretar la resta?

Sergio: No.

Profesora: ¿También se puede ver cómo?

Sergio: Quitar.

Profesora: ¿Pero tú la prefieres hacer por el opuesto?

Sergio: Sí.

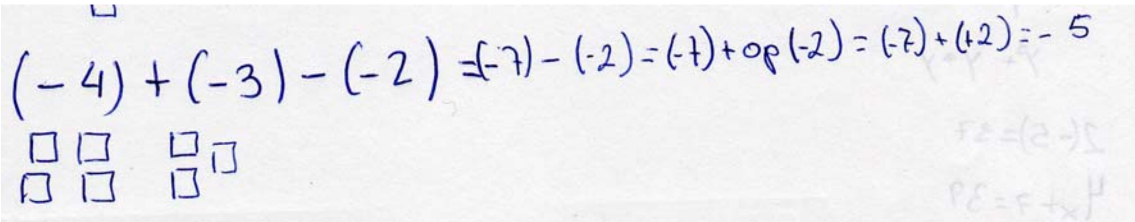
Profesora: Pues, hazla.

Sergio: … (dibujando). Se quedarían -5.

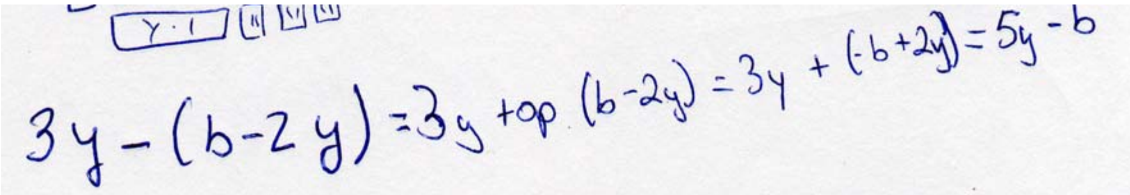
Profesora: Bien ¿Qué operación te quedaría después de realizar el opuesto?

Sergio: (- 7) + (+2) se anulan.

Profesora: Vale. Muchas gracias.



Hemos observado cómo el ejercicio resuelto por Deborah lo realiza utilizando la idea de quitar, sin embargo, Sergio lo resuelve usando el opuesto como se puede ver a continuación.



En estos fragmentos de entrevistas de dos alumnos de una misma clase de 2º de ESO se aprecian las distintas estrategias escogidas por cada uno para resolver ejercicios que implican el menos, lo que muestra la versatilidad del material didáctico. El Puzzle Algebraico permite que cada uno de ellos elija la estrategia de resolución que le resulte más cómoda, ya que ayuda a conceptualizar la resta tanto quitando como con la idea de opuesto. El aprendizaje, utilizando cualquiera de los otros materiales, es parcial, ya que se decanta por una de estas ideas, no atiende a la riqueza y variedad de significados del concepto de resta y no potencia las necesarias rupturas conceptuales entre la Aritmética y el Álgebra.

Consideraciones finales

La revisión y el análisis que hemos hecho de los diferentes recursos y materiales didácticos para el estudio del lenguaje algebraico en la Educación Obligatoria así como el estudio comparativo, nos permiten considerar que el Puzzle Algebraico ofrece más posibilidades que el resto de materiales presentados ya que, además de ser más fácil de usar, facilita la manipulación y conceptualización de los objetos algebraicos tratados, ya sea la simbolización de la cantidad desconocida o general; o la interpretación geométrica de símbolos y operaciones. Nuestros experimentos de enseñanza ponen también de manifiesto la ayuda de estas representaciones para la comunicación en las clases de Álgebra y para el tránsito entre el lenguaje natural y el algebraico.

Hemos recogido de una experiencia de enseñanza cómo dos alumnos de la misma clase, que han recibido la misma enseñanza, resuelven los mismos ejercicios utilizando dos ideas de resta, distintas. El Puzzle da libertad de elección de la estrategia más conveniente para cada estudiante, puesto que ayuda a conceptualizar la resta tanto quitando como con la idea del opuesto. Permite mostrar los diferentes sentidos que el significado del concepto de resta tiene en Álgebra y, de esta manera, potencia las necesarias rupturas conceptuales entre la Aritmética y el Álgebra.

Hemos observado también que su uso en diferentes procesos de enseñanza, pone de manifiesto que el papel de la representación del Puzzle se mantiene independientemente de su utilización física, es decir, el alumno abandona rápidamente su utilización manipulativa, sin embargo, mantiene su manipulación mental. De este modo, cumple su papel de representación del objeto matemático y no se convierte en el fin mismo del aprendizaje.

Este material didáctico, Puzzle Algebraico, es un registro de representación "autosuficiente" que permite tanto las elaboraciones sintácticas como semánticas del objeto matemático.

Finalmente, consideramos que:

- El uso del material didáctico conocido como "Puzzle Algebraico", como representación semiótica autosuficiente puede facilitar en gran medida la actividad matemática, dado que estimula y favorece el desarrollo del conocimiento matemático.

- La utilización de materiales didácticos como registros de representaciones semióticas autosuficientes es importante en la Educación Obligatoria (Primaria y ESO), en la que resulta esencial que los alumnos exploren los objetos matemáticos en diferentes representaciones semióticas. Dichas exploraciones deben centrarse tanto en los registros de representación semióticos analógicos como en los registros de representación digital.

Referencias bibliográficas

BOC (2007a). Decreto 126/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias.

BOC (2007b). Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico y otros (Eds.), *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: ICE/Horsori.

Domínguez, E., Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R., Socas, M. M. (2005). Números enteros y expresiones algebraicas en 2º de ESO. Experiencia Didáctica con el Puzzle Algebraico. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* VII, 299-320.

Domínguez, E.; Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, M. M.; Ruano, R. y Socas, M. M. (2006). Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: El Puzzle Algebraico. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, 2006, Monografía IV,* 59-77.

Domínguez, E.; Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, M. M.; Ruano, R. y Socas, M. M. (2007a). Investigación e innovación en el aula de matemáticas. Un ejemplo en la ESO con alumnos de un programa de diversificación curricular. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática,* 8, 105-134.

Domínguez, E.; Hernández, J.; Muñoz, M.; Palarea, M. M.; Ruano, R., Socas, M. M. (2007b). *Puzzle Algebraico: Secuencia de Actividades*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg.* (Traducido por el Departamento de Matemática

Educativa del CINVESTAV. IPN. México, 1997).

Filloy, E., Rojano, T. (1985a). Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 154-158. Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, Subfaculty of Mathematics, OW & OC.

Filloy, E., Rojano, T. (1985b). Operating on the models of teaching. En S. K. Damarin y M. Shelt (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology Mathematics Education*, pp. 75-99. Madison: University Wisconsin.

García Azcárate, A. (1999*). Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas. Números y Álgebra*. Madrid: Ediciones Universidad Autónoma de Madrid.

Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra.* Colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje, 33. Madrid: Síntesis.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM (Traducción al castellano, 1991: Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Granada: SAEM Thales).

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Palarea, M. M., Socas, M. M. (1994a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Suma*. Monográfico Lenguaje y Matemáticas, 16, 91-98.

Palarea, M. M., Socas, M. M. (1994b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l’enseignement-apprentissage de l’algèbre scolaire (12-16 ans). A*ctes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM.* Vol II, 111-119. Toulouse. (France).

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*. 12 (1).

Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en Pensamiento Algebraico. *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* 261-282. Valladolid: Diputación de Valladolid.

Socas, M. M. (2000). Álgebra para todos. Análisis de un material didáctico: “Puzzle Algebraico”. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, II,* 299-330.

Socas, M. M., Palarea, M. M. (1997). The three dimensions of error in the understanding of algebraic language. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the PME-21*, 1, 264. Finland.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M., Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*, 23. Madrid: Síntesis.