FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
ISSN: 1695-6613

LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL MODELO DE COMPETENCIA MATEMÁTICA FORMAL[1]

Raquel M. Ruano Barrera

Martín M. Socas Robayna

M. Mercedes Palarea Medina

Universidad de La Laguna

Resumen

La modelización ha sido foco de interés para los investigadores en los últimos 40 años. Este interés se ha visto reflejado en la creación de múltiples grupos para profundizar en el tema y la publicación de muchos trabajos sobre la Modelización Matemática en Educación. En este artículo se realiza un breve recorrido por las distintas perspectivas de la Modelización Matemática en Educación Matemática.

La organización del contenido matemático para enseñarlo supone para el profesor un problema profesional. El punto de partida es la organización del contenido matemático desde el punto de vista epistemológico. Así trataremos de caracterizar la Modelización Matemática desde la Disciplina Matemática, esto es, precisar la Competencia Matemática Formal para la Modelización Matemática.

Por último, a modo de ejemplo, realizaremos el análisis del contenido matemático de una pregunta relativa a la Modelización Matemática para tratar de resaltar la importancia que este tipo de análisis tiene tanto para los investigadores como para los profesores.

Abstract

Modelling has been a focus of interest for researchers over the past 40 years. This interest is reflecte in the creation of multiple groups to study the subject in-depth and the publication of many papers on mathematical modelling in education. This article takes a brief tour through the different perspectives of mathematical modelling in mathematics education.

Organizing mathematical content in order to reach it is a professional problem for the teacher. The starting point is the organization of the mathematical content from the epistemological point of view. Therefore, we will attempt to characterize mathematical modelling from the discipline of mathematics, i.e., specifying Formal Mathematical Competence for mathematical modelling.

Finally, by way of example, we will analyze the mathematical content of a question connected to mathematical modelling to try to highlight the importance of this type of analysis for both researchers and teachers.

Introducción

La modelización ha sido un foco de atención para los investigadores en los últimos 40 años. Durante las últimas reformas curriculares de inicios del siglo XXI se ha introducido la modelización en los currículos de un gran número de países. Parece imponerse así un acuerdo social, reforzado por programas internacionales como PISA (Programme for International Student Assessment) en el nivel preuniversitario y los desarrollos del pacto de Bolonia para la enseñanza superior, sobre la conveniencia de introducir en todos los niveles de enseñanza aspectos relacionados con las aplicaciones de las Matemáticas y con la modelización.

El interés de la comunidad investigadora en Educación Matemática por este campo, al cual es usual referirse como "Modelización y Aplicaciones" (Modeling and Applications), ha ido en aumento tal como se describe en diversos trabajos (Burkhardt, 2006). El movimiento parece iniciarse con el estudio de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI), celebrada en Kuwait en 1986, estudio que promovió el impulso mundial para la inclusión en los currículos de Matemáticas de contenidos o temas conectados con las *aplicaciones de las Matemáticas,* tanto relacionados con otras disciplinas como con sus aplicaciones a la vida cotidiana. Lo reforzaron grupos de investigación internacionales como el ICTMA *(The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications)* cuyo primer congreso bienal se celebró en 1982 y, más recientemente, el ICMI Study 10 coordinado por investigadores de reconocido prestigio como Mogens Niss, Werner Blum, Peter Galbraith y Hans-Wolfang Henn, en el que han participado un número muy importante de investigadores (Blum et al., 2007).

Desde 2005, la sociedad europea de investigación en Educación Matemática (ERME) creó un grupo específico sobre el tema, liderado por la investigadora alemana Gabriele Kaiser que, a su vez, es la editora de dos números especiales de la revista internacional *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ZDM dedicados exclusivamente a esta cuestión.

La RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) también ha promovido la investigación en modelización; en concreto, en la RELME 23, celebrada en Santo Domingo (República Dominicana) en 2009, se creó el grupo de modelización y tecnología que tiene como propósito investigar y difundir aspectos relacionados con la modelización matemática en la enseñanza de las Matemáticas.

En España, también hay un gran interés por la enseñanza de la modelización, como se expresa en la revista de Didáctica de las Matemáticas UNO, que publicó en 2002 un número especial sobre "*Modelización y matemáticas"*. Otra muestra de dicho interés lo constituye la presentación de la primera revista electrónica *"Modelling in Science Education and Learning"* que publicó su primer volumen en 2008, cuyo objetivo es la difusión de trabajos relacionados con el uso de modelos matemáticos en la enseñanza de las ciencias.

La Modelización Matemática en la Investigación en Educación Matemática

Como mencionamos anteriormente, en los últimos años ha habido un creciente interés en los trabajos relacionados con las aplicaciones de la Modelización Matemática (MM) en Educación Matemática que se ha denominado, en general, Modelación Matemática, que ha llegado a consolidarse como un campo de investigación de esta disciplina científica (Blum et al. 2007). El uso de la modelación en la escuela se muestra de diferentes maneras según los puntos de vista desde donde se mire la didáctica y de acuerdo con los objetivos de la actividad. Actualmente podemos encontrar estudios con enfoques muy variados, (Kaiser y Sriraman, 2006) que presentan una clasificación de los trabajos, atendiendo a criterios de tipo epistemológico y a otros aspectos propios de la Educación Matemática, señalando diferentes perspectivas, denominadas: Realista, Contextual, Educativa, Sociocrítica, Epistemológica y Cognitiva, considerada esta última como una metaperspectiva. Estas perspectivas dan lugar a diferentes maneras de ver la utilización de la aplicación de la modelación en el aula de Matemáticas, así como la investigación acerca de su uso.

Otros autores, como por ejemplo, Doerr y Pratt (2008) presentan la organización de las investigaciones en modelización atendiendo, especialmente a dos criterios: el epistemológico y el psicológico. Dentro del primero, distinguen dos situaciones, aquellas que conciben la modelización como objeto matemático independiente del mundo que queremos modelar, y las que observan la modelización como un proceso cíclico e iterativo, dependiente del aspecto que queremos modelar. En la perspectiva psicológica, las investigaciones se orientan, especialmente, hacia temas que tienen que ver con la naturaleza de las actividades de los estudiantes, por ejemplo, relacionadas con las demandas cognitivas, cuando realizan tareas de modelización.

También se encuentran diferentes trabajos que ponen de manifiesto la posibilidad de organizar la modelización matemática desde las diferentes posibilidades que tiene el microsistema educativo: currículo, aprendizaje y enseñanza y su contexto social y cultural, es decir, las diferentes posibilidades que tiene en el aula de clase. En este sentido, la modelización puede concebirse de distintas maneras, entre ellas como:

- Una estrategia de los seres humanos para la explicación y producción del conocimiento y, también, para el aprendizaje (D' Ambrosio, 2009).

- Una herramienta didáctica (Biembengut y Hein, 2004).
- Una competencia y una herramienta para desarrollar competencias matemáticas (Zöttl, Ufer y Reiss, 2011).
- Una herramienta para posicionarse de manera crítica frente a las demandas sociales y democráticas (Araújo, 2007).

Si bien el principal énfasis en las anteriores perspectivas radica en los aspectos que se ponen de relieve por medio de la investigación, también es cierto que cada una de ellas tiene implicaciones directas o indirectas sobre las diferentes maneras de actuar en el aula de Matemáticas. Con respecto al énfasis que se puede otorgar a la identificación y delimitación de los contextos, tópicos, o fenómenos que se desean modelizar, también se pueden reconocer, al menos, dos tendencias, que dependen del papel activo que ejerza el profesor o los estudiantes en tal elección. En el primero de ellos, los protagonistas son los estudiantes, quienes de acuerdo con sus necesidades e intereses identifican los contextos, fenómenos o situaciones sobre los cuales se realiza el proceso de modelización; una muestra de estos trabajos puede encontrarse en Aravena, Caamaño, y Giménez (2008). En una segunda aproximación, el papel principal lo tiene el profesor, quien de acuerdo con su conocimientos, los contenidos temáticos y la realidad institucional, elige tales contextos o fenómenos; sobre este énfasis pueden encontrarse trabajos que se enfocan en el estudio de un fenómeno amplio y complejo (Villa-Ochoa y López, 2011; Biembengut y Hein, 2004).

A continuación se hace un recorrido por cada una de las perspectivas citadas en Kaiser y Sriraman, (2006), tomando como referencia los aportes de Blomhoj (2009), que mantiene la misma clasificación que estos autores, pero enriquece el trabajo añadiendo ejemplos, algunas cuestiones que se investigan y el papel del ciclo de modelización, para cada una de las perspectivas enunciadas.

Perspectiva Realista

Para la perspectiva realista o aplicada de la modelización, hay una tendencia hacia lo pragmático-utilitario. El interés se centra en la resolución de problemas reales que tengan sentido práctico para los alumnos. En esta perspectiva es fundamental que los estudiantes trabajen con la modelización de situaciones auténticas o del mundo real, ya que a partir de éstas, se ayuda el desarrollo de competencias asociadas a la producción y uso de modelos que sean relevantes para la formación profesional de los estudiantes (Kaiser y Sriraman, 2006).

El proceso de modelización debe ser evaluado a través de la validación de datos reales y, en consecuencia, es necesario estudiar con profundidad la modelización en diferentes profesiones y, áreas de aplicación que den lugar a la construcción de modelos matemáticos (Blomhoj, 2009). Los contextos tomados del mundo real deben ser comprensibles para los estudiantes y, para ellos, la modelización, como tal, debería estar en su horizonte. En esta perspectiva se puede situar a Biembengut y Hein (2004) quienes entienden la modelización como un proceso que tiene como objeto la obtención de un modelo matemático de un fenómeno o una situación problema. Según estos autores, ese proceso de trasformación requiere de una serie de subprocesos: elección del tema que se desea modelizar, reconocimiento de la situación problema, delimitación del problema, familiarización con el tema que va a ser modelizado, consideración de un referencial teórico, formulación del problema e hipótesis, formulación de un problema matemático y desarrollo, resolución del problema, partir del modelo y aplicación, interpretación de la solución y validación del modelo.

En otras palabras, la modelación es el proceso que permite transformar una situación del mundo real, a través de abstracciones y simplificaciones que se concretan en la obtención de un modelo, el cual será validado y reinterpretado en la situación real que le dio origen (Córdoba, 2011).

Perspectiva Contextual

El interés de esta perspectiva radica en la solución de problemas reales, pero con una preocupación central en la relación de este proceso de solución con el sujeto que los resuelve y con el contexto en el que el modelo se crea, con el fin de comprender la naturaleza misma del proceso de modelación y las distintas restricciones que sobre éste ejerce el medio en el que surge la necesidad de modelación.

La perspectiva contextual defiende la importancia del contexto no sólo en la formulación, sino también en la solución de un problema de modelización. Esta perspectiva de investigación se centra en desarrollar y probar los diseños para la modelización, definida como una actividad de solución de problemas que son guiados, según Lesh y Doerr (2003) por seis principios:

1. Principio de realidad: la situación debe ser significativa para los estudiantes y relacionarse con sus experiencias anteriores.
2. Principio de construcción del modelo: la situación debe crear la necesidad de que los estudiantes desarrollen construcciones matemáticas.
3. Principio de autoevaluación: la situación debe permitir a los estudiantes evaluar sus propios modelos.
4. Principio de documentación: la situación y el contexto requieren que los estudiantes expresen sus ideas acerca de la solución del problema.
5. Principio de generalización de construcción: debe ser posible generalizar el modelo como solución a otras situaciones similares.
6. Principio de simplicidad: la situación problema debe ser simple.

El objetivo central de esta perspectiva es el diseño didáctico de actividades que apoyen el proceso de aprendizaje de los estudiantes mediante la modelización matemática, entendida como un tipo particular de solución de la situación-problema.

Por esta razón, desde esta perspectiva, es especialmente útil considerar los aspectos psicológicos asociados a la resolución de problemas, los cuales actúan como base para comprender las dificultades de aprendizaje relacionadas con la modelización matemática y la enseñanza de modelos matemáticos (Blomhoj, 2009).

Perspectiva Educativa

La perspectiva educativa, como su nombre lo indica, tiene un objetivo claramente pedagógico y está centrada en los procesos de aprendizaje, y por tanto, en la promoción de la formación de conceptos matemáticos. Aquí, se pueden distinguir dos tipos de corrientes: una, didáctica, en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje de los alumnos, y, otra, que se puede considerar de carácter conceptual, en la que el papel de la modelación[1] es clave para introducir nuevos conceptos y para desarrollarlos. Desde esta perspectiva, la modelización matemática puede ser tratada como un medio para el aprendizaje de las Matemáticas o como una meta educativa.

Desde esta perspectiva, el proceso de modelización viene reflejado en la siguiente figura 1:

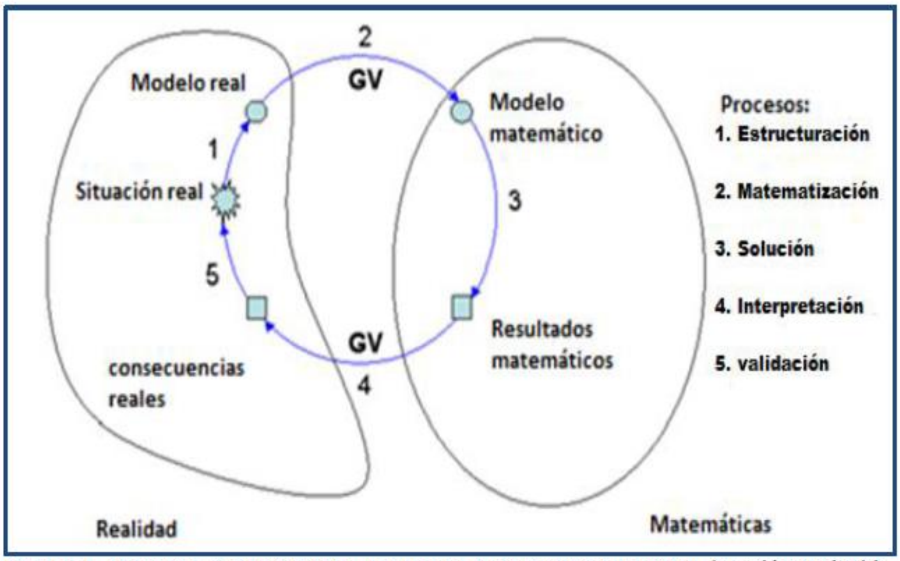


Figura 1. Proceso de modelización desde la perspectiva educativa
(versión traducida del original, Blomhoj, 2009, p.12)

En esta perspectiva las nociones básicas asociadas al modelo, modelización, ciclo de modelización, aplicaciones y competencias de la

[1] Llamamos modelación matemática a la actividad que se realiza en la clase de Matemáticas cuya naturaleza se deriva de la actividad científica de la modelización matemática.

modelización, así como el significado de estas nociones en relación con la enseñanza de las Matemáticas, constituyen un elemento central para estructurar el aprendizaje de las Matemáticas. (Blomhoj, 2009).

Perspectiva Socio-Crítica

La perspectiva socio-crítica, tiene relación con las dimensiones socioculturales de las Matemáticas, y se centra, particularmente, en el papel que éstas desempeñan dentro del funcionamiento y formación de la sociedad. En este sentido, esta perspectiva pone énfasis en la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del rol de las Matemáticas en la sociedad, en el rol y la naturaleza de los modelos matemáticos y en la función de la modelización matemática en la sociedad (Kaiser y Sriraman, 2006). La filosofía socio-crítica sostiene que el uso de la modelización matemática en la sociedad puede crear una motivación importante para el aprendizaje de las Matemáticas, pero también a llevar a los estudiantes a reflexionar críticamente sobre problemas sociales.

Esto implica que, en las prácticas de enseñanza, los estudiantes trabajen con la modelización de situaciones que tienen un carácter real, pero que se relacionan con problemas de tipo social, cultural o del medio ambiente.

Perspectiva Cognitiva

La perspectiva cognitiva tiene como principal objetivo analizar los procesos cognitivos involucrados en la modelización matemática. En este sentido, desde esta perspectiva se persiguen entre otros aspectos, la reconstrucción de las rutas de modelización individuales de cada uno de los estudiantes y la identificación de sus dificultades, durante la actividad de modelización, o bien, promover los procesos de pensamiento matemático mediante el uso de modelos (Kaiser y Sriraman, 2006).

En esta perspectiva se puede ubicar el trabajo de Borromeo (2010). En su artículo, la atención se centra en la reconstrucción de rutas de aprendizaje y en la influencia que tienen los estilos de pensamiento matemático de los estudiantes en los procesos de modelización. Además, plantea un ciclo de modelación particular que tiene un importante papel como instrumento para analizar las tareas y estudiar individualmente los procesos de modelización. A continuación presentamos el ciclo de Modelización desde la perspectiva cognitiva (Figura 2).

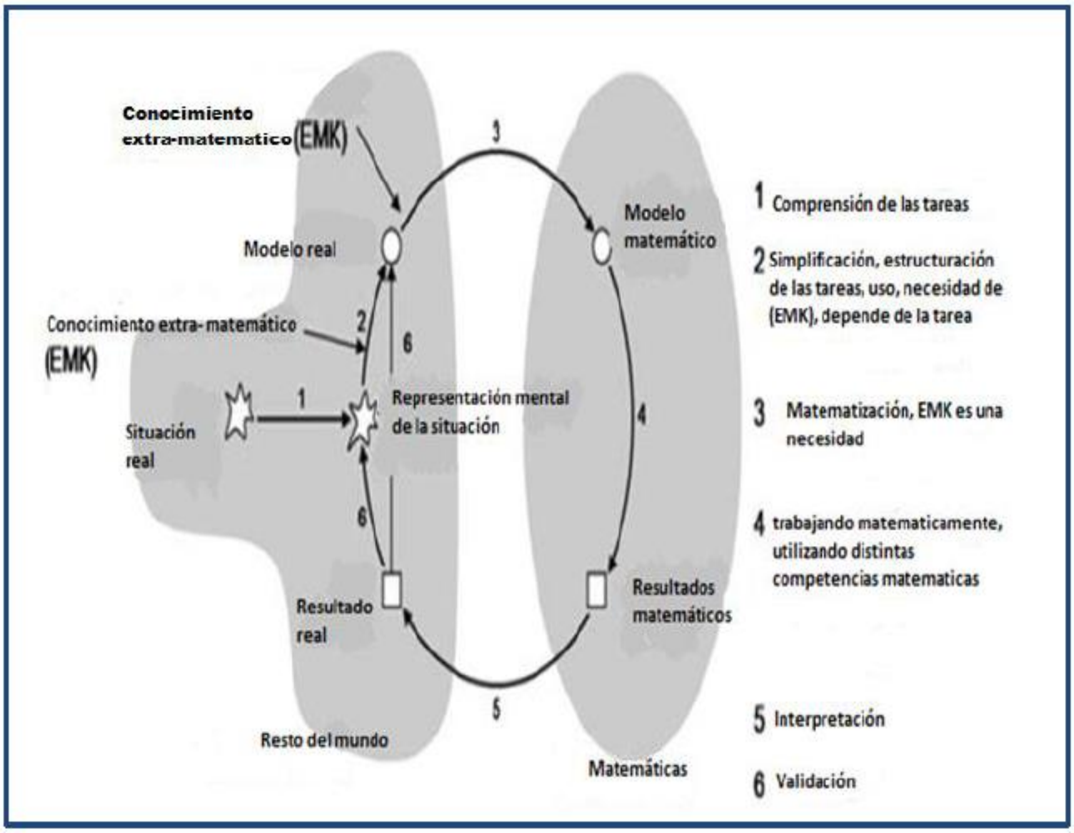


Figura 2: Ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva (versión traducida del original, Borromeo, 2010, p. 7)

Además de estructurar el proceso de modelización, este ciclo tiene como fin identificar las habilidades cognitivas necesarias para modelizar una situación dada (Blomhoj, 2009).

Perspectiva Epistemológica

En esta línea de investigación se puede ubicar el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la aproximación a las praxeologías de Chevallard y el contracto didáctico de Brousseau. A diferencia de la perspectiva realista, la perspectiva epistemológica le da menos importancia al trabajo con situaciones propias del mundo real.

En la TAD por ejemplo, cualquier actividad humana es susceptible de ser modelizada mediante praxeologías[2] (Bosch et al 2006) y, en consecuencia, la modelización no se ve limitada a cuestiones extra-matemáticas (Kaiser y Sriraman, 2006).

Lo mismo ocurre con el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR) que también se inscribe en esta perspectiva, debido a la tradición adquirida por la perspectiva científico-humanista determinada principalmente por los aportes de Freudenthal (1973) y continuados por Treffers (1987).

Uno de los objetivos que persigue esta perspectiva, es lograr que los contenidos fundamentales de la Matemática puedan ser reinventados en el trabajo con la modelización de fenómenos reales, sin perder aspectos importantes de la epistemología de los conceptos.

Literalmente, para Freudenthal (1973), "Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos… incluida la matemática misma." (p. 44).

Desde la TAD se realiza un análisis epistemológico del papel de la MM en la actividad matemática, dado que para aplicar la transposición didáctica debe tenerse claro cómo está organizado el "saber sabio", es decir, en el caso que nos ocupa, la MM en la propia disciplina.

De las perspectivas anteriores observamos que la que toma en consideración a la Modelización Matemática como un objeto que también puede modelar a otros objetos matemáticos es la perspectiva epistemológica.

Es importante mencionar, desde las prácticas educativas, que entre los diferentes estudios que se desarrollan en estos días en torno a la modelación es difícil encontrar ejemplos que se sitúen estrictamente en

[2] Todo sujeto al enfrentarse a una serie de problemas y situaciones en su vida diaria se ve obligado a recurrir a técnicas para resolverlos (praxis) así como a un conjunto de conocimientos (logos) que describen explican y justifican las técnicas que se utilizan (praxeologías).

una de estas categorías. Aun cuando sea posible situarlos en una de estas perspectivas, siempre encontramos elementos que pueden considerarse como pertenecientes a otras.

En nuestro trabajo, situado en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)[3] (Socas 2001, 2007), trataremos de mostrar que la Modelización Matemática, no debe ser considerada, únicamente, desde la visión epistemológica, sino que hay que tener en cuenta también, las perspectivas semiótica y fenomenológica. Desde esta triple visión, la Modelización Matemática, no se contrapone a ninguno de los enfoques anteriores, sino que permite ampliarlos y complementarlos.

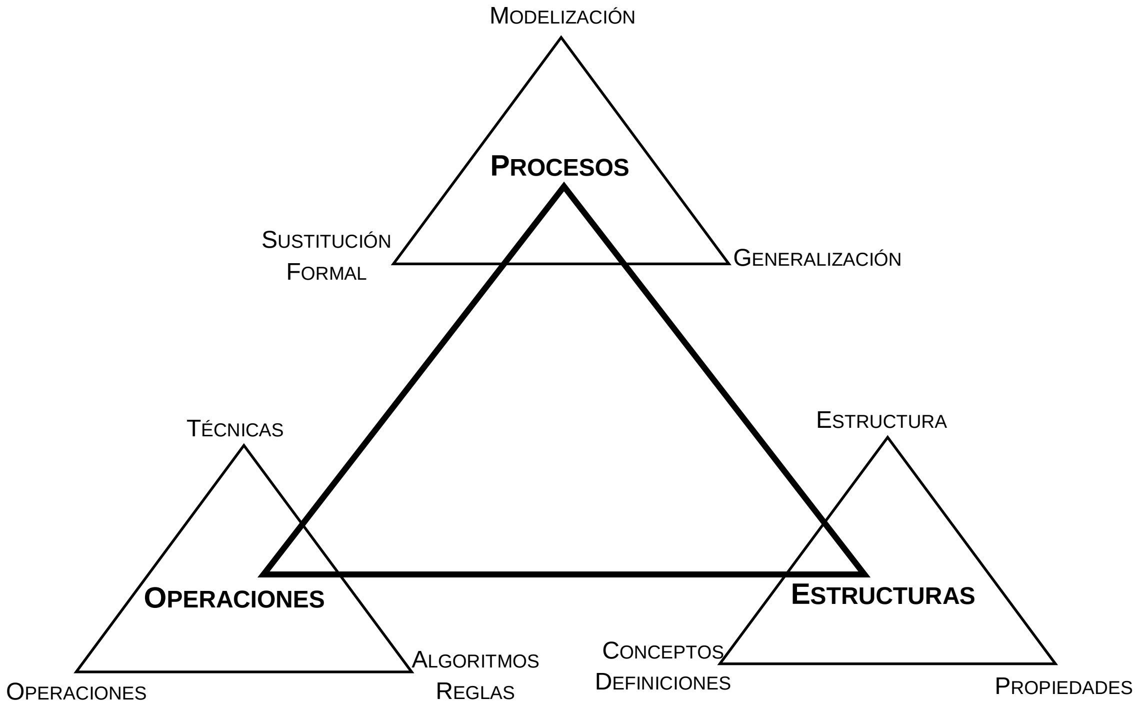
La Modelización Matemática en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

La Competencia Matemática Formal (CMF) (Socas, 2010 y 2012) es uno de los tres Modelos de Competencia que conforman el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2007); en él se considera la Modelización como uno de los tres procesos fundamentales que caracterizan los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico, junto con la Sustitución Formal y la Generalización.

La CMF es considerada como una organización esencial del análisis del contenido matemático que permite describir los tres campos conceptuales antes citados desde la perspectiva disciplinar. Estos campos conceptuales, se organizan fenomenológicamente en tres referentes básicos relacionados entre sí: Operaciones, Estructuras y Procesos. Estos referentes, a su vez, están caracterizados, por Operaciones, Algoritmos y Técnicas, en el referente Operaciones; por Conceptos, Propiedades y Estructuras, en el referente Estructuras; y por Sustitución Formal, Generalización y Modelización, en el referente Procesos. Estas relaciones se expresan

[3] El Enfoque Lógico Semiótico es una propuesta teórico práctica (formal – experimental) que pretende aportar elementos para el análisis, la descripción y la gestión de situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que se presentan en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencia (Semiosis).

esquemáticamente en la siguiente figura:



En esta organización fenomenológica del Campo conceptual, se observan los diferentes fenómenos con los que la Modelización Matemática está implícitamente relacionada; éstos pueden describirse como caminos o itinerarios que recorren necesariamente la Modelización Matemática; por ejemplo, el camino mínimo está determinado por la ruta: Modelización - Sustitución Formal - Técnica operativa - Operación. Sin embargo, debemos tener en consideración que, además de estos cuatros objetos matemáticos necesarios y presentes en toda modelización, ésta puede estar relacionada también con la Generalización y con los elementos del referente Estructuras.

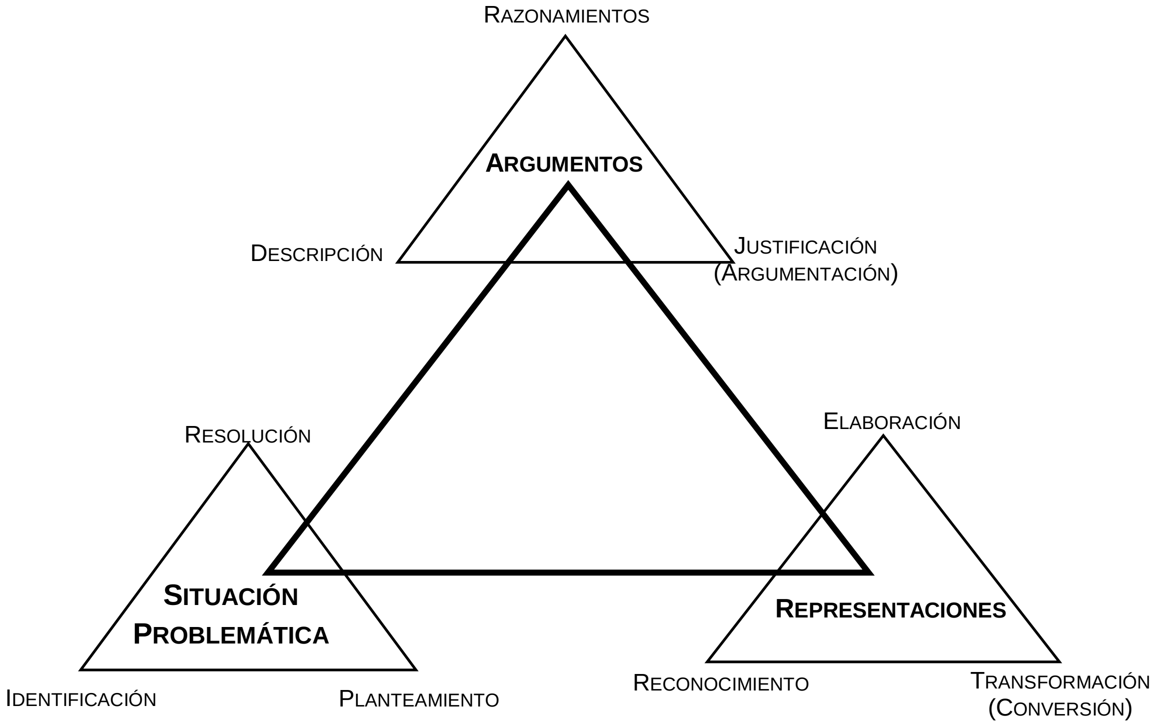
Los diferentes campos conceptuales están necesariamente contextualizados en los tres referentes siguientes:

- Situaciones problemáticas, que se abordan con los objetos del campo conceptual.

- Lenguaje (Representaciones) de los objetos matemáticos implicados.

- Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática.

La contextualización del campo conceptual se expresa, de forma esquemática, como sigue:



Análogamente, las tres componentes del contexto quedan determinadas por las respectivas semiosis como se indica a continuación:

- En las Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución.

- En las Representaciones (lenguaje): reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción).

- En los Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

De manera resumida, caracterizamos fenomenológicamente, la Modelización Matemática (MM) como el proceso matemático por excelencia, que está determinado por sus elementos básicos (objetos matemáticos) y por las relaciones que estos tienen entre sí.

Este proceso esencial de la actividad matemática ocurre, como hemos señalado, en:

- Un contexto, determinado por la Situación problemática que el resolutor debe identificar, plantear y resolver.

- Unas Representaciones, que requieren reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción).

- Unas Argumentaciones que implican descripción, justificación y razonamientos.

Desde el punto de vista educativo, el planteamiento de una situación problemática que involucre el proceso de Modelización, se puede organizar a partir de situaciones diversas: físicas, económicas, numéricas, algebraicas, analíticas, geométricas…, en las que se parte de una descripción no organizada de un comportamiento regular en la que no está explicitada la regla.

A partir de la Situación problemática o de la formulación de la tarea, que supone su identificación o reconocimiento, el citado proceso se puede describir mediante cinco fases que facilitan el planteamiento y la resolución y que la caracterizan matemáticamente: (1) Sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) Matematización o formulación en términos de la regla; (3) Resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el Análisis del modelo construido; (4) Validación (verificación) de la regla y, (5) Interpretación.

En resumen, la caracterización de la MM, desde la Disciplina Matemática, se realiza al considerar los diferentes aspectos que la caracterizan: epistemológicos, semióticos y fenomenológicos, del objeto matemático MM, es decir, describir la MM en el campo conceptual y el contexto, así como determinar las relaciones existentes.

Desde ELOS, al igual que desde TAD, consideramos la Modelización Matemática de sistemas matemáticos, esto es, la modelización intramatemática como, por ejemplo, la modelización algebraica de un sistema numérico o topológico y la modelización diferencial de un sistema geométrico, como una parte esencial de la actividad de modelización que es inseparable de la modelización de sistemas extramatemáticos. En efecto, aunque el proceso de modelización parte de un sistema extramatemático, por ejemplo, un sistema proveniente de las ciencias de la salud, de las ciencias económicas o de las ciencias físicas como sistema que se desea modelizar, el progresivo desarrollo de la actividad de modelización incluye, necesariamente, etapas en las que interviene la modelización intramatemática.

Esta noción de MM es coherente con el desarrollo histórico de las Matemáticas y permite considerarla como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a jugar el papel de sistema (matemático) y así sucesivamente, lo que conduce a trabajar con "modelos de modelos" del sistema inicial. Aparece así, claramente, el carácter recursivo de la actividad de Modelización Matemática.

Entendemos que si ésta excluye los sistemas intramatemáticos, el proceso de estudio de un sistema extramatemático queda abortado a partir de la primera modelización, lo que limita la noción de modelización.

Proponemos, pues, una forma de interpretar la modelización matemática que incluye de manera esencial la modelización matemática de sistemas matemáticos, esto es, aquellos procesos que se llevan a cabo para responder a cuestiones problemáticas que surgen en un sistema matemático (como, por ejemplo, un sistema aritmético, geométrico, entre otros) cuya resolución requiere la construcción de un modelo matemático (que puede ser algebraico, analítico o de cualquier otro tipo) como un trabajo en dicho modelo.

Asumimos que la modelización no es únicamente un aspecto de las Matemáticas, sino que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. En toda actividad matemática se puede identificar un sistema en torno al cual se formulan cuestiones problemáticas que motivan, y dan origen, a la construcción de ciertos modelos.

En Chevallard (1989) se introduce un esquema simplificado de la actividad o proceso de modelización elemental en el cual intervienen, esencialmente, dos tipos de entidades: un sistema matemático o extramatemático y un modelo (matemático) de este sistema. Según el autor, el proceso de modelización queda descrito en las siguientes tres etapas: (1) descripción del sistema que queremos estudiar, (2) construcción del modelo propiamente dicho y, (3) implementación del modelo obtenido.

En nuestro trabajo de investigación, el proceso de modelización matemática también supone el desarrollo de las tres etapas anteriores que, en la práctica educativa desarrollamos, en las cinco fases, descritas anteriormente, que no son necesariamente lineales:

1. Fase de sistematización de la situación problemática, que supone la explicitación y el reconocimiento de la regla, que consideramos como el primer paso, en el que se precisan aquellos aspectos de la situación problemática (sistema matemático o extramatemático) que nos proponemos estudiar.
2. Fase de matematización, es decir, de formulación en términos de la regla, es decir, de la construcción del modelo propiamente dicho; en esta fase se establecen, las representaciones apropiadas y las relaciones entre las variables que se han tenido en cuenta en la primera.
3. Fase de resolución de la situación problemática en términos del modelo construido.
4. Fase de verificación y validación de la regla. En este paso se realiza la validación del modelo, comprobando su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van surgiendo a lo largo del proceso de modelización.

5. Fase de interpretación de los resultados obtenidos en la fase anterior, en la situación problemática inicial, reajustando el modelo si fuera necesario.

De esta manera, se considera, el proceso de modelización como un proceso matemático que requiere del control constante del modelo en la situación problemática inicial, es decir, de su adecuación o no, y de su capacidad para dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso.

Si analizamos la caracterización fenomenológica que se propone en ELOS para los campos conceptuales numéricos, algebraicos y analítico, observamos que la modelización es el proceso cumbre que puede implicar a todos los objetos del campo conceptual; en particular, a los procesos de Generalización y Sustitución Formal, así como a las Estructuras y a las Operaciones. Sin embargo, esto no significa que toda MM, suponga necesariamente la implicación de todos los objetos matemáticos, sino que la MM se puede determinar por diferentes caminos. Estos caminos o rutas permiten caracterizar fenomenológicamente la MM en el campo conceptual considerado.

En consecuencia, la MM está determinada, en el camino más corto, por: Modelización - Sustitución Formal - Técnicas Operatorias - Operaciones y, en el camino más largo, por: Modelización – Generalización - Sustitución Formal – Estructuras - Operaciones.

En cualquier caso, todos los caminos están contextualizados en las Situaciones problemáticas, en las Representaciones y en los Argumentos (Razonamientos) que están implicados en el desarrollo de las Situaciones Problemáticas.

Finalmente, en relación con los tres Procesos (Sustitución Formal, Generalización y Modelización), conviene señalar que éstos responden a las competencias matemáticas generales propios de cada proceso, que son:

el reconocimiento del proceso, su formulación y su manipulación (validación), como señala Chevallard (1989) para el proceso de MM.

En resumen, observamos, que todo proceso de MM conlleva un proceso de Sustitución Formal, es decir, supone siempre el uso de al menos dos representaciones (lenguaje natural, algebraico, geométrico…), por lo que resulta necesario realizar la conversión entre las distintas representaciones y las transformaciones en ellas.

En la práctica, la mayor parte de las situaciones problemáticas que implican el proceso de MM, también necesitan del proceso de Generalización Algebraica, lo que requiere el uso de varias tareas relacionadas con el proceso de Generalización; entre ellas la particularización, la iteración, la recursividad, el método inductivo… En este sentido, podemos considerar el proceso de MM como un proceso recursivo, al aplicar tareas que caracterizan a la Generalización algebraica. Igualmente, a la hora de validar el modelo y comprobar si éste responde a las preguntas planteadas inicialmente en la situación problemática, realizamos particularizaciones, tarea, también, asociada al proceso de modelización.

Finalmente, los razonamientos que están implicados en el proceso de MM suelen ser los razonamientos asociados a los esquemas "partes – todo", los razonamientos inductivos y los deductivos.

Análisis del Contenido de una situación problemática relativa a La Modelización Matemática

Una de las tareas básicas del profesor de Matemáticas es organizar el contenido matemático para enseñarlo, lo que supone para el profesor un problema profesional que requiere el análisis, la comprensión y la planificación. El primer ámbito que el profesor necesita organizar, es el contenido matemático que deriva de la propia disciplina, que podemos denominar contenido matemático disciplinar o formal.

El modelo de Competencia Matemática Formal (CMF), descrito anteriormente, es un instrumento útil que, teniendo en cuenta el contexto, permite relacionar y describir tanto a nivel individual como institucional los significados de los objetos matemáticos y sus relaciones, los errores, las dificultades y los obstáculos.

El CMF es un instrumento técnico que puede ayudar a los profesores a analizar los significados atribuidos a los objetos matemáticos desde la perspectiva institucional (currículo y libros de texto, entre otros). Pero también se puede utilizar para caracterizar el dominio de la actividad matemática, en las diferentes tareas que se propongan al alumnado y, en consecuencia, analizar e interpretar sus producciones en la realización de estas tareas, así como analizar los errores y hacer conjeturas sobre las dificultades, obstáculos y el origen de los mismos, tanto desde el punto de vista de la docencia como de la investigación.

A continuación consideramos una situación problemática relacionada con la Modelización Matemática extraída del cuestionario 2 de la Memoria de Tesis: "Competencias y errores de alumnos de Secundaria en los procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización. Implicaciones didácticas para la transición del lenguaje aritmético al algebraico", que está en fase de redacción para su presentación y lectura. El cuestionario está basado en los tres procesos fundamentales relacionados con la Cultura Matemática: Sustitución Formal, Generalización y Modelización, aunque en este trabajo trataremos de analizar, a modo de ejemplo, la pregunta que denominaremos 4 del cuestionario 2, que está relacionada con la modelización.

En ésta, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, particularmente, en el proceso de modelización, en la que se pide la identificación y resolución del problema. Se sitúan las tareas en el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo que, en este caso se concretan en las fases o momentos que caracterizan el Proceso de Modelización.

> *PREGUNTA 4: Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con la misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio:*
> *¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?*

Se presenta una situación problemática en la que figuran enunciados verbales, dados en lenguaje natural, dentro de un contexto geométrico. Podemos distinguir tres situaciones:

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una modelización geométrica-numérica, en la que realizando una sustitución formal (conversión de registro al lenguaje gráfico o numérico), considerando las estructuras geométricas implícitas en el enunciado de la tarea (área, longitud,…), utilizan una técnica para determinar el resultado mediante operaciones.

- Los resolutores pueden interpretar la situación problemática como una generalización algebraica, para lo cual deben ser capaces de identificar los datos, las incógnitas y las relaciones existentes entre ellos, y plantear para todos los rectángulos de área $8 \cdot x$, la ecuación adecuada para el que tiene de área 64 m^2, esto es: $160 = 8 \cdot x$, siendo x la longitud del frente del nuevo terreno. En este caso, atenderemos a las estrategias utilizadas para la resolución de la ecuación (tanteo, procedimientos aritméticos, algebraicos o la combinación de varios) y a la comprobación (validación) de que el resultado satisface las condiciones del problema.

- Los resolutores pueden dar un paso más allá e interpretar la situación planteada como una modelización funcional, en la que realizan una generalización, por entender que la situación planteada es una particularización del caso general f(x) = 8x, que relaciona el área de todos los rectángulos de ancho 8 metros y largo desconocido.

Los argumentos o razonamientos considerados son los relacionados con los esquemas partes–todo, las inducciones o las deducciones realizadas.

La pregunta puede presentar dificultades para los alumnos ya que su correcta resolución exige, el dominio de conceptos asociados a la Geometría: superficie, área, dimensiones, longitud, largo, ancho y, por lo tanto, el reconocimiento de la estructura geométrica implícita en el problema.

Resultados de un cuestionario sobre Modelización con alumnos de Secundaria. Dificultades y errores

En este apartado analizaremos globalmente las respuestas al cuestionario citado anteriormente, que se ha utilizado en múltiples ocasiones, pero ciñéndonos a la pregunta relacionada con el proceso de modelización. El diseño y modo de construcción del cuestionario están recogidos en Ruano y Socas (2001).

La muestra elegida fue de 60 alumnos de Educación Secundaria (4.º de ESO y 1.º de Bachillerato).

Posteriormente se analizan los errores cometidos por los alumnos en las dos preguntas cuyo análisis del contenido se expuso anteriormente y se conjetura el origen de los errores. El análisis de los errores se hará siguiendo el modelo propuesto en Socas (1997 y 2007).

Para organizar la información utilizamos varios procedimientos de análisis. Realizamos la clasificación de los errores ayudándonos de esquemas de análisis en los que se refleja, en primer lugar, el tipo de error cometido; en segundo, los códigos de los alumnos; en tercer lugar, el ítem en el que han fallado y, al final, el número total de errores de cada tipo. En algunas preguntas con respuestas abiertas empleamos una adaptación de las redes sistémicas de Bliss y otros (1983), con modificaciones para ajustarlas a nuestro propósito. En concreto, en el lado derecho de la red, hemos incluido un recuadro con el número del alumno que ha recorrido cada itinerario. La inclusión de este código nos permite hacer un seguimiento de cada alumno y comprobar si existe una persistencia en el mismo tipo de error por parte de cada alumno o, por el contrario, varía dependiendo de la tarea presentada.

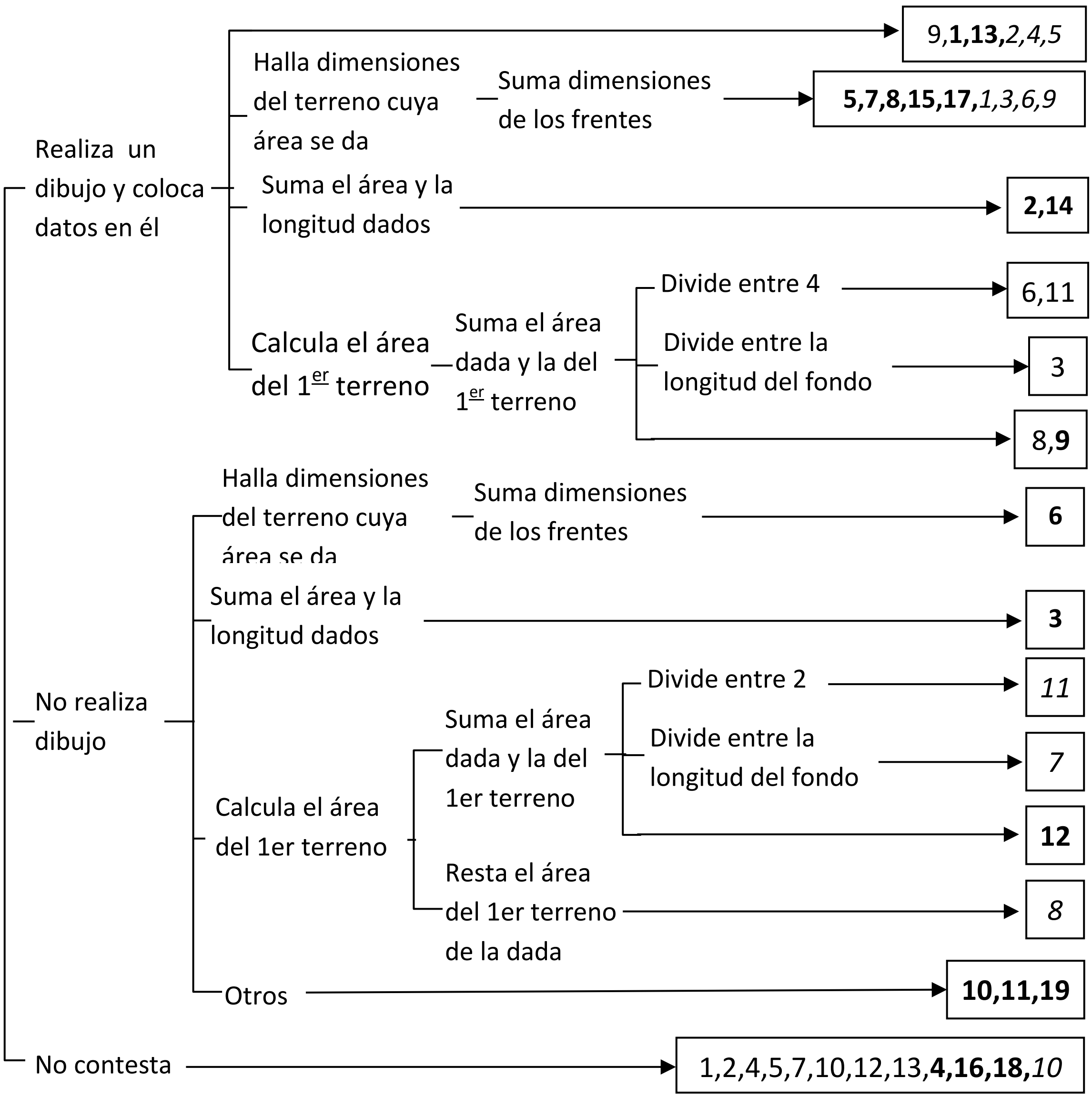
Tras el primer análisis de las respuestas al cuestionario, que se encuentra en Ruano, Socas Palarea (2004), observamos que los alumnos tienen las mayores dificultades con el proceso de modelización. De los seis ítems dedicados a este proceso, tres no han obtenido ninguna respuesta correcta. Así, situamos la modelización en un nivel de dificultad alto con un porcentaje medio de aciertos en preguntas relacionadas con este proceso del 23,74% frente al 47’14% de la generalización y al 53,85% de la sustitución formal. Observamos que los porcentajes de acierto en el proceso de modelización dependen de las tareas realizadas y son muy dispares. Los mayores porcentajes de acierto se encuentran en el reconocimiento del modelo, con una media del 36,37% y, los menores, en la validación del modelo con un 13,64% de acierto. La fase de formulación y desarrollo del modelo se sitúa en medio en cuanto a dificultad, con un 21,21 % de aciertos.

En la TABLA 1 se recogen los errores en todas las preguntas relacionadas con el proceso de modelización. En la primera columna aparece el posible origen del error y, en la segunda, la denominación de cada tipo de error.

<u>TABLA 1</u>

ERRORES EN LA MODELIZACIÓN		
ORIGEN		**TIPO DE ERROR**
Actitudes afectivas		Resolución incompleta
		Modelo incompleto
		Análisis parcial de las variables del modelo
Ausencia de sentido	Aritmética	Interpretación del área como si fuera un perímetro Confusión de raíz cuadrada y división entre 2
		Uso incorrecto de la regla de tres
		Particularización
		Confusión entre multiplicación y potencia
		Incompletitud de los datos
		Necesidad de datos numéricos
	Geometría	Interpretación del área como si fuera un perímetro (Divide entre 4 el área del terreno)
		Resolución incompleta
		Confusión entre longitud y área
	Características propias del lenguaje algebraico	Realización exclusiva de un dibujo
		Resolución incompleta
		Cambio de registro incorrecto

Pasaremos ahora a realizar el análisis de los errores concretos cometidos por los alumnos en la pregunta 4 de C2, cuyo análisis del contenido realizamos antes. Dado que esta pregunta admite una respuesta abierta, antes de tratar de organizar los errores, se introduce una red sistémica, que presentamos a continuación como <u>RED 1</u>.

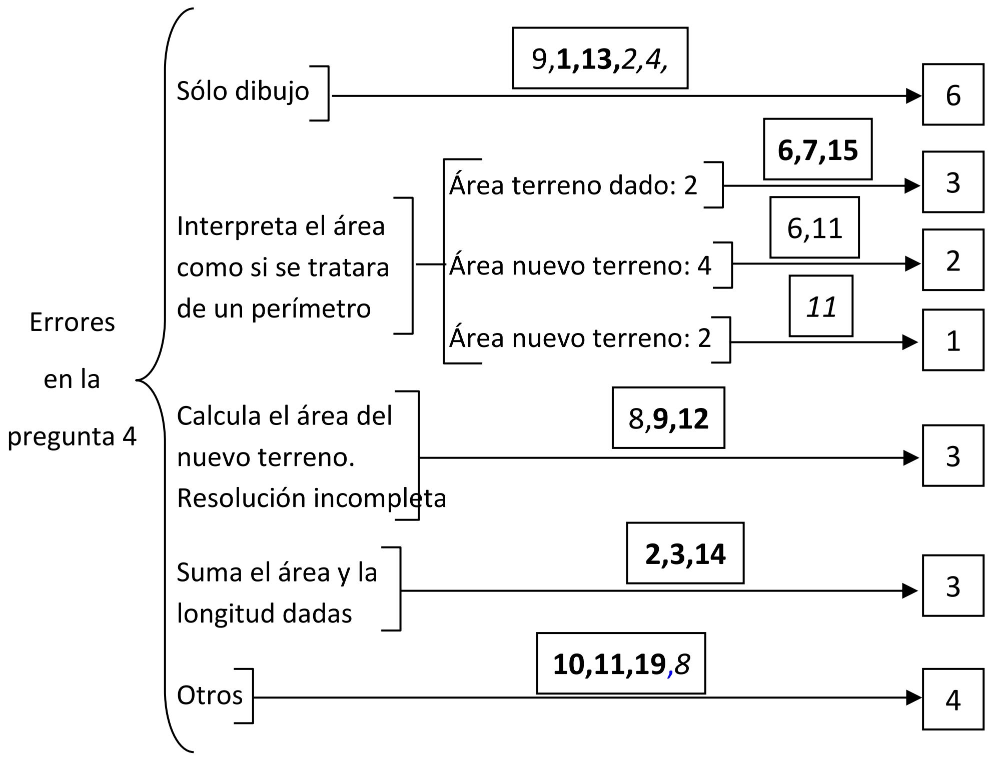


Esta red nos ayuda a clarificar los procesos de resolución seguidos por los alumnos y observar, por ejemplo, que el mayor número de errores ha sido dejar incompleta la resolución del problema y que un número considerable de errores se ha producido porque los alumnos sólo representan gráficamente la situación planteada, pues aun siendo capaces de realizar la conversión entre el lenguaje natural y el gráfico, no han sabido interpretarla para poder responder a la pregunta.

Observamos, también, en la Red 1, que los alumnos han seguido tres razonamientos diferenciados:

1. Dividen el área del terreno dado entre 2 y posteriormente la suma a la longitud dada.
2. Calculan el área del nuevo terreno y posteriormente la dividen entre 2.
3. Calculan el área del nuevo terreno y posteriormente la dividen entre 4.

Esta organización de los errores en la Red nos permite obtener información relevante, pero necesitamos poder clasificar los errores, para ello construimos el ESQUEMA 1 siguiente:



Además de las observaciones anteriores, ahora estamos en condiciones de inferir que los alumnos no tienen clara la realización de cambios de registro y conjeturamos que su origen es la ausencia de sentido, debido a las características propias del Álgebra. Otro grupo de alumnos ha obtenido el área del nuevo terreno correctamente, pero no ha continuado para alcanzar la solución de situación problemática planteada. Aunque todos los pasos seguidos por estos alumnos en el proceso de resolución del problema son correctos, parece que no tienen claro que lo que se les pide es el frente del terreno, no su área. Este error puede deberse a que no saben cómo continuar la resolución, en cuyo caso, situamos su origen en una ausencia de sentido debida a las características propias del Álgebra o bien, a que confunden lo que es la longitud con el área, en cuyo caso, situamos el origen del error en una ausencia de sentido con origen en la Geometría o simplemente, no se sienten motivados para terminar el problema, en cuyo caso, situamos el origen del error en las actitudes afectivas.

Otro error es la confusión entre longitud y área, los alumnos suman el área dada con la longitud del frente del primer terreno. Suponemos que este tipo de error tiene su origen en una ausencia de sentido debido a que los alumnos no han terminado de comprender la diferencia entre los conceptos geométricos de área y longitud. Otro grupo de alumnos interpreta el área como si se tratara del perímetro del rectángulo, pues para hallar la longitud del frente dividen el valor del área entre el número de lados de la figura.

En relación con los razonamientos diferenciados en la Red 1, podemos concretar que en el caso:

- Dividen el área del terreno dado entre 2 y posteriormente lo suman a la longitud dada.

El método de resolución es correcto pero confunden la raíz cuadrada con la división entre 2. Consideramos que este tipo de error tiene su origen en una ausencia de sentido, debida a dificultades que han quedado sin resolver en la Aritmética.

- Calculan el área del nuevo terreno y, posteriormente, la dividen entre dos.

El método de resolución es diferente al usado en el razonamiento anterior, pero el error es el mismo, es decir, confunden la raíz cuadrada con la división entre 2.

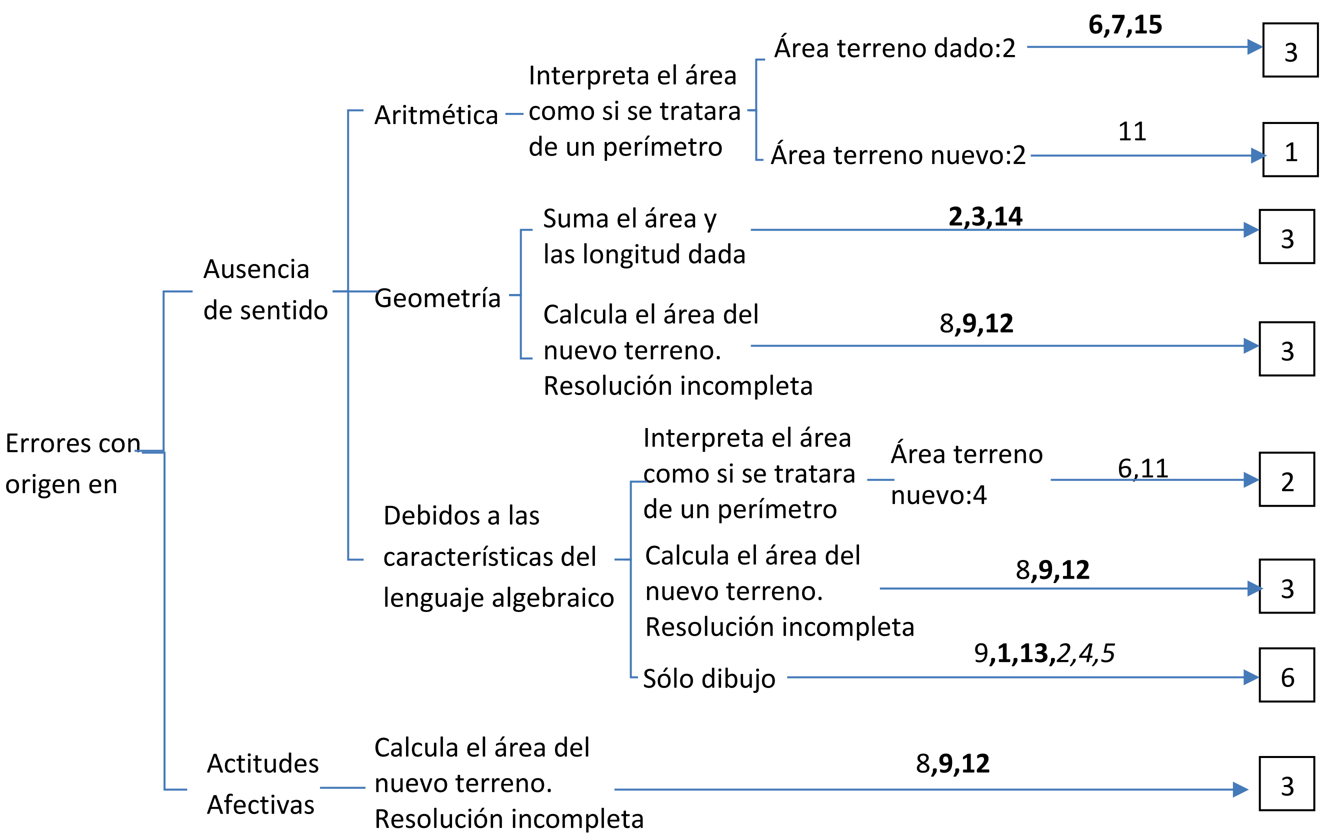
Calculan el área del nuevo terreno y posteriormente la dividen entre 4.

Éste es el caso más claro de confusión del perímetro con el área pues, para hallar la longitud de uno de los lados del rectángulo, dividen el área entre el número de lados del rectángulo.

Por último, hay alumnos que no siguen un proceso de resolución claro, éstos están englobados en la categoría "otros". Por ejemplo, un alumno emplea de forma errónea una regla de tres para resolver el problema. Otro calcula el área del primer terreno pero luego, en vez de sumarla con el área dada la resta, concluyendo que la longitud del nuevo frente debe ser 32 m^2.

En el ESQUEMA 1.A se resumen los orígenes de los errores cometidos en esta pregunta en tres ejes no disjuntos: actitudes afectivas, ausencia de sentido y obstáculo (Socas, 1997 y 2007).

Esta organización, está basada en la realizada por que sitúa los orígenes de los errores.



ESQUEMA 1.A

Consideraciones finales

Las distintas perspectivas sobre la Modelización Matemática dan lugar a diferentes enfoques tanto sobre la aplicación de la modelación en el aula como a su uso en la investigación.

Desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) la Modelización Matemática se caracteriza fenomenológicamente como el proceso matemático por excelencia, y se determinan los elementos matemáticos básicos (objetos), así como las diferentes relaciones que éstos tienen entre sí.

La noción de Modelización Matemática propuesta desde ELOS es coherente con el desarrollo histórico de las Matemáticas y se considera como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a desempeñar el papel de sistema (matemático), y así sucesivamente, es decir, la Modelización Matemática tiene carácter recursivo.

Desde ELOS, a partir de una situación problemática o de la formulación de una tarea de modelización, que supone su identificación o su reconocimiento, se puede describir mediante cinco pasos o momentos que facilitan el planteamiento y la resolución y que caracteriza matemáticamente la Modelización Matemática: (1) Sistematización, explicitación y reconocimiento de la regla; (2) Matematización o formulación en términos de la regla; (3) Resolución en términos de la regla, mediante la representación elegida, lo que comporta el Análisis del modelo construido; (4) Validación (verificación) de la regla; y (5) Interpretación.

En ELOS se propone la Competencia Matemática Formal (CMF) como un instrumento técnico del análisis de contenido matemático que facilita al profesorado de Matemáticas el análisis de los significados atribuidos a los objetos matemáticos desde diferentes perspectiva: institucional, currículo, libros de texto… También resulta de gran utilidad para caracterizar el dominio de la actividad matemática, de las diferentes tareas que se propongan a los alumnos, y, en consecuencia, para analizar e interpretar las producciones del alumnado en la realización de estas tareas, así como para analizar los errores y hacer conjeturas sobre las dificultades, obstáculos y origen de dichos errores, tanto desde el punto de vista de la docencia como de la investigación.

Las diferentes técnicas de análisis utilizadas han sido de gran utilidad. Por ejemplo, el análisis del contenido matemático implícito en la pregunta del cuestionario, realizado *a priori*, nos permite estudiar los diferentes significados que los estudiantes muestran en su resolución. En el análisis *a posteriori*, el uso de los esquemas de análisis descritos anteriormente ha resultado útil para analizar los errores cometidos por los alumnos en la mayoría de las preguntas, y las redes sistémicas han sido un complemento adecuado para ayudar a ver cuáles son los razonamientos seguidos por los alumnos en preguntas abiertas. Las entrevistas, nos han permitido situar el origen de los errores de manera individual y analizar los procedimientos seguidos por los alumnos a la hora de resolver las distintas actividades.

Hay errores que se repiten independientemente del proceso desarrollado: la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Parece conveniente prestar especial atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del Lenguaje Algebraico, fijándonos principalmente en sus orígenes.

En lo referente al origen de los errores, comprobamos que, en general, podemos distinguir tres orígenes distintos: actitudes afectivas hacia las Matemáticas, ausencia de sentido y obstáculo, si bien, en el caso de la Modelización no hemos situado ningún error con origen en obstáculos. El origen más frecuente es la ausencia de sentido que, en la mayoría de las ocasiones, viene ocasionada por aspectos que han quedado sin resolver en la Aritmética o la Geometría. Así, es importante identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético o geométrico y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el Álgebra.

En el proceso de modelización, la ausencia de sentido se ha producido mayoritariamente por las características propias del lenguaje algebraico. Es importante que los alumnos dominen el proceso de Sustitución Formal, implícito en todo proceso de Modelización, para evitar errores en ésta y en el proceso de Generalización algebraica. Para la corrección de este tipo de errores sugerimos que se recurra a situaciones que creen esquemas fáciles de recuperar que estén apoyados en distintos sistemas de representación y no sólo en argumentos formales, pero haciendo hincapié en el proceso de Sustitución formal para que éste no suponga un escollo para el dominio de la Modelización.

Por otra parte, debemos tener muy en cuenta los errores que tienen su origen en actitudes afectivas, así como buscar las razones por las que los alumnos no han respondido algunas preguntas. En muchas ocasiones los bloqueos que las actitudes causan en los alumnos son la principal causa que les lleva al error. Así, debemos motivarlos y prepararlos para que no tomen el error como algo negativo, sino como una oportunidad para avanzar en el aprendizaje. Debemos enseñar a persistir en la búsqueda de soluciones, a no presentar el trabajo como un producto terminado, sino como un camino que hay que recorrer para llegar a la conclusión final.

(1) Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación EDU2011-29324 de Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias bibliográficas

Araújo, J.L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática. In: J. C Barbosa; A. D Caldeira y J. L. Araújo (Orgs.) *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.* Recife: Sociedad Brasileira de Educação Matemática (SBEM), pp. 17-32.

Aravena, M.; Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Matemática Educativa-Relime*, v. 11, n. 1, pp. 49-92.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16 (2), 105-125.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research. Londres*: Croom Helm.

Blomhoj, M. (2009). Different perspectives on mathematical modelling in educational research. En Blomhoj, et al. (Eds.), *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics*, ICMI, pp. 1-18.

Borromeo, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *J Math Didakt*, 31, 99-118

Bosch, M., García, F., Gascón, J. e Higuera, L. (2006). La Modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una Propuesta desde la teoría Antropológica de lo didáctico, *Educación matemática*, 18 (002), 37-74.

Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H. y Niss, M. (2007) (Eds). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study New York: Springe.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.

Chevallard 1989. Le Passage de l'arithmetique à l'algébrique dans l'enseignement des Mathématiques au Collége (Dexième partie). Perspectives curriculares: la notion de modelisation. *Petit X*, (19), 43-75.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Tesis inédita de Maestría). Instituto politécnico nacional: centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. México.

D' Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, pp. 89-98.

Doerr, H.M. y Pratt, D. (2008). The learning of mathematics and mathematical modeling. In Heid, M.K. e Blume, G.W. (Eds.). *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses*. Charlote, NC: Information Age Publishing, pp. 259-285.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Kaiser, G. y Sriramam, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (3), 302-310.

Lesh, R. y Doerr, H. (Eds.) (2003). *Beyond contructivism: models and modelling perpectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Ruano, R. y Socas, M.M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4.º de ESO. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática* III, pp. 239-265.

Ruano, R., Socas, M.M. y Palarea, M.M. (2004). Cognitive Habilities and Errors of Students in Secondary School in Algebraic Language Processes. En McDougall, D.E. y Ross, J.A. (Eds.). *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology Mathematics Education* (PME-NA XXVI), v.1, pp. 253-261.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, pp. 125-154). En Rico, L. y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori

Socas, M.M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI*, pp.19-52.

Socas, M.M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 10, 9-33.

Socas, M.M. (2012). EL ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO EN EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO (ELOS). APLICACIONES A LA INVESTIGACIÓN Y AL DESARROLLO CURRICULAR. En Arnau, D., Lupiáñez, J. L. y Maz, A. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de* *la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de Universitat de Valencia y SEIEM.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project.* Dordrecht: Kluwer.

Villa-Ochoa, J.A.; López, C.M.J. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; BLUM, W. et al (Eds.). Springer Netherlands, v.1, pp.701-711. (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling).

Zöttl, L; Ufer, S. y Reiss, K. (2011). Assessing Modelling Competencies Using a Multidimensional IRT - Approach. In: KAISER, G.; BLUM, W. et al (Eds.). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling- ICTMA 14. New York: Springer, pp.427-437.