



## UN ESTUDIO SOBRE LOS NIVELES DE VAN HIELE EN MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN Y EN EJERCICIO. ALGUNOS RESULTADOS PRELIMINARES

María Candelaria Afonso Martín  
Matías Camacho Machín  
Universidad de la Laguna

### Resumen

El objetivo de este estudio es doble: por una parte, se trata de, determinar, analizar y comparar los niveles de razonamiento geométrico de un grupo de maestros de Educación Primaria tanto en ejercicio como en formación y, por otra, estudiar si existen diferencias de niveles según el sexo de los individuos estudiados. Participaron en la investigación 183 individuos, de los cuales 68 eran maestros de Educación Primaria en activo y 115 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. Como instrumento de análisis se utilizó el Test de Usiskin (1982). Los resultados mostraron que tanto los maestros en formación como los maestros en activo, se encontraban mayoritariamente entre el Nivel 1 y el Nivel 2 de pensamiento geométrico, por debajo de lo esperado si se tiene en cuenta que el nivel adecuado para una enseñanza en la Educación Primaria debería ser al menos un nivel más de lo que se espera que esos estudiantes alcancen (Afonso, Camacho y Socas, 2009, p. 358), esto es, en el Nivel 3 de van Hiele. Estos resultados contrastan con los de una investigación similar desarrollada con profesores y estudiantes para profesores en Turquía (Halat y Şahin, 2008).

### Abstract

This study has a double aim. On one hand, to establish, analyse and compare the geometric reasoning levels of van Hiele of pre-service and in-service Primary Mathematics teachers. On the other hand, we investigate if there are differences of the level according to the kind of the participants in the study. The participants were 183 teachers and future primary teachers, 68 in-service teachers and 115 students of the third course of the Teacher's Degree in Primary Education. The Test of geometric understanding developed by Usiskin (Usiskin, 1982) is used like instrument of analysis.

The results showed that both student teachers and in-service teachers, are mostly in the levels 1 and 2 of geometric thinking. These results are lower than can be expected if we consider that the appropriate level for teaching Geometry

in Primary Education should be at least one level superior of that we expect to achieve the pupils (Afonso, Camacho-Machín y Socas, 2009, p. 358), that is to say, the level 3 of geometric thinking.

These results differ from those obtained in Turkey by Halat y Şahin (2008) for pre-service and in-service mathematics teachers.

## **Introducción**

Nuestra experiencia de muchos años en la formación de los futuros maestros de Educación Primaria ha permitido constatar el bajo rendimiento de los estudiantes, principalmente en Geometría (Tatto et al 2008, p. 143). En el reciente estudio internacional TEDS-M (Teacher Educational Development Study in Mathematics) señalan que la media obtenida para el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro de Educación Primaria en nuestro país (481), se encuentra casi veinte puntos por debajo de la media internacional, que es de 500 puntos. En particular, en relación con la Geometría, se constataron también los escasos conocimientos que revela la muestra amplia de estudiantes que participó en dicho estudio (Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez, 2014). Hemos podido observar las dificultades que tienen en visualizar e interpretar diferentes elementos geométricos, así como los errores que cometen cuando definen y justifican propiedades geométricas. Desde hace varios años se ha prestado una atención especial a destacar la importancia que debe tener en el currículo la enseñanza y aprendizaje de los contenidos geométricos tanto en la Educación Primaria como en Secundaria. Esta afirmación se puede evidenciar haciendo un análisis de éstos.

Pese a todo ello, la realidad en las aulas de Primaria y Secundaria es que la Geometría sigue siendo la parte de las Matemáticas que casi siempre se deja para las últimas semanas del curso y, en muchos casos, una gran mayoría de los profesores se desentiende de ella y trata de justificar el no enseñarla por “falta de tiempo”. Además, en muchos casos, se emplea una enseñanza no adecuada, lo que conlleva a que los alumnos adquieran los conceptos incorrectos o mal

presentados, lo que suele ser consecuencia de la carencia de dichos conceptos por parte de muchos profesores.

Podríamos mencionar muchos trabajos referidos a Geometría en los que veríamos la trascendencia que ésta tiene con respecto al desarrollo del pensamiento de los profesores y alumnos en formación.

Creemos que uno de los factores más importantes que influyen en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria es la escasez de conocimientos geométricos de los maestros tanto en ejercicio como en formación, la dificultad de la materia, el interés y hábitos utilizados para la comprensión de los contenidos y la seguridad en el conocimiento de los propios contenidos geométricos e, incluso, el sexo podría ser considerado como un factor importante para tenerlo en cuenta.

En relación con la calidad de la enseñanza y con el conocimiento de los contenidos, la implicación del profesorado, resulta fundamental a la hora de observar el rendimiento de los alumnos. Debemos ser conscientes de que existen evidencias de grandes carencias en cuanto a su formación matemática tanto para el profesorado en formación como para el que está en ejercicio como ponen de manifiesto las prácticas docentes.

En esta investigación, como continuación del trabajo desarrollado con profesores en activo (Afonso, 2004), planteamos determinar y comparar los conocimientos geométricos, en relación con los niveles de pensamiento geométrico tanto de los futuros profesores como de los que se encuentran en activo, con el objetivo de utilizar los planteamientos prescriptivos de la Teoría de pensamiento geométrico de los van Hiele como metodología de enseñanza. En un estudio anterior con profesores del primer ciclo de Secundaria se pudo constatar la escasez de conocimientos geométricos (Afonso, Camacho y Socas, 2009). El estudio se realizó con un grupo de 11 profesores en activo y de la investigación desarrollada, se concluyó que:

*una propuesta curricular en Geometría, en términos de van Hiele, requiere de un profesorado con determinadas aptitudes y actitudes (perfil del profesor). Para ellos, esto supone el desarrollo de cambios significativos en su epistemología y presentan seis características que definen el perfil del profesor y entre ellas, que se resumen en:*

*1. Formación científica en Geometría, al menos con un nivel de pensamiento geométrico superior al que pretende trabajar con sus alumnos.*

*[.....] (p. 358)*

Con anterioridad, otros investigadores obtuvieron resultados similares en relación con los conocimientos geométricos de profesores en formación. Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Duatepe (2000) y Knight, (2006) realizaron sus investigaciones en España (Valencia), Turquía y EE.UU., respectivamente, y encontraron que los estudiantes para profesores de Primaria se encontraban por debajo del Nivel 3 (Deducción informal); incluso en el estudio de Knight (2006) los profesores de Educación Secundaria no alcanzaban, en líneas generales, el nivel 4 (Deducción formal).

Halat y Şahin (2008) desarrollaron una investigación similar a la que se presenta aquí en la que obtuvieron como resultados principales que no existe diferencia entre los estudiantes y los profesores en activo en cuanto a niveles de pensamiento geométrico; no obstante, los estudiantes mostraron una diferencia de niveles entre ellos de modo que los hombres se encontraban en un nivel de pensamiento superior que las mujeres.

En este artículo, centrado en la formación geométrica de profesores de Matemáticas para enseñanza Primaria, tanto en ejercicio como en formación se nos plantean dos objetivos principales:

- Determinar los niveles de razonamiento geométrico de un grupo de maestros de Educación Primaria en ejercicio y otro grupo de futuros maestros de Educación Primaria (maestros en formación) comparando los resultados obtenidos para ambos grupos.
- Analizar si existen diferencias de niveles de pensamiento en cuanto al sexo de los encuestados.

## Marco conceptual

El modelo de razonamiento geométrico de van Hiele tiene su origen en los trabajos doctorales presentados en la Universidad de Utrech por los profesores holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele Geldof. Para los van Hiele, el pensamiento matemático sigue un modelo concreto que debe ser considerado para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, en general, y de los conceptos geométricos, en particular. Esta teoría tiene dos características que la diferencian de otras teorías de aprendizaje. Por una parte, es descriptiva ya que, por un lado, propone un modelo de razonamiento geométrico para los individuos y señala que una persona se encuentra en un nivel de razonamiento determinado si posee unas características determinadas que los sitúan en él (son los cinco “niveles de razonamiento”) y, por otra, se considera una teoría prescriptiva, en el sentido de que establece una serie de directrices que indican cómo los profesores pueden ayudar a sus alumnos para que alcancen un nivel superior de razonamiento, es decir, establece que si los estudiantes trabajan secuencias de enseñanza siguiendo cinco "fases de aprendizaje" propuestas por ellos, adquieren un nivel superior de pensamiento geométrico. De acuerdo con Crowley (1987), esos niveles son jerárquicos (se ordenan en nivel creciente de complejidad) y no son continuos. Posteriormente, Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) establecieron lo que denominaron “grado de adquisición de los niveles” que abogan por una “no continuidad de los niveles”. Para nuestros planteamientos, utilizamos las ideas originales propuestas por los van Hiele.

Los cinco niveles definidos por los van Hiele son: visualización (Nivel 1), análisis (Nivel 2), deducción informal (Nivel 3), deducción formal (Nivel 4) y rigor (Nivel 5). Pasamos a continuación a describir las características fundamentales de cada uno de los cinco niveles<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup> Hemos optado por esta numeración para los niveles, pese que algunos autores comienzan desde 0 y consideran los niveles del 0 al 4

Una persona se encuentra en el Nivel 1 (Reconocimiento o Visualización), si las descripciones que hace son visuales; distingue las figuras geométricas por sus formas individuales, como un todo, sin observar relaciones entre tales formas o entre sus partes, ni sus propiedades matemáticas; sus descripciones están basadas en su semejanza con otros objetos que conocen, por ejemplo, se parece a..., tiene forma de..., es como, etc. El estudiante se encuentra en el Nivel 2 (Análisis), si distingue los componentes o elementos de las figuras geométricas y establece algunas de sus propiedades. Se dice que un alumno ha alcanzado el Nivel 3 de pensamiento geométrico (Deducción informal), si es capaz de relacionar entre sí las propiedades de las distintas figuras, organizarlas lógicamente y empezar a entender el papel de las definiciones; pueden aportar argumentos informales. Una persona se encuentra en el Nivel 4 (Deducción formal), si comienza a desarrollar el razonamiento matemático formal. Las demostraciones ya tienen sentido para ella, y siente su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación. Finalmente, alguien se considera que se encuentra en el último, el Nivel 5 (Rigor), si puede trabajar en distintos sistemas axiomáticos y es capaz de compararlos entre sí; por tanto, estudia la Geometría desde un punto de vista totalmente abstracto.

Clements y Battista (1992) refieren la existencia de un Nivel 0 llamado Pre-reconocimiento. La diferencia principal entre este nivel y el siguiente, es que, en el Nivel 1, los estudiantes pueden decir con facilidad que tal figura es un cuadrado, aquella es un rectángulo u otra es un paralelogramo, basándose en su apariencia, pero los estudiantes que se encuentran en ese nivel de Pre-reconocimiento no son capaces de ver las diferencias entre los cuadriláteros basándose exclusivamente en la apariencia de las figuras, sino que necesitan que se les expliciten más propiedades.

---

## **Metodología**

La investigación que se presenta es principalmente descriptiva y consiste en el análisis de los datos obtenidos después de que un grupo de estudiantes para profesores de Primaria y profesores en activo cumplimentaran un Test de respuestas múltiples de Geometría, validado con anterioridad por varias investigaciones.

### **Participantes**

Participaron en la investigación, 183 profesores y futuros profesores de Educación Primaria, de los cuales 68 estaban activos (en ejercicio) y 115 eran estudiantes del Grado en Educación Primaria. De estos últimos, 43 (37,39%) eran hombres y 72 (62,61%) mujeres. En relación con los profesores en ejercicio (68), 30 (44,1%) eran hombres y 38 (55,9%) mujeres. Los profesores de Primaria en formación estaban finalizando el tercer curso de sus estudios universitarios en el año 2014. Los profesores en activo poseían una experiencia en la Enseñanza Primaria, que iba desde 1 a 33 años en la enseñanza pública o concertada. Los centros en los que impartían docencia los profesores en ejercicio, que imparten Matemáticas en Educación Primaria, fueron seleccionados, aleatoriamente, atendiendo a su disponibilidad. Los profesores de Primaria en formación eran estudiantes que habían cursado tres asignaturas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas: Matemáticas, Didáctica de la Estadística, Azar y Probabilidad y estaban finalizando la asignatura de Didáctica de la Medida y de la Geometría.

### **Datos e instrumentos utilizados.**

Los datos fueron recopilados durante los meses de enero y febrero de 2014 para los profesores en activo y en el mes de mayo del mismo año para los estudiantes del Grado en Educación Primaria. Se suministró a todos los participantes el Test de conocimientos geométricos utilizado por Usiskin (1982) que denominaremos Test de Geometría de van Hiele (TGVH), que

consta de 25 preguntas de elección múltiple con 5 posibilidades de respuesta<sup>2</sup>. En el TGVH, los ítems 1 al 5 corresponden al Nivel 1; los ítems 6 al 10, al Nivel 2, los ítems 11 al 15 al Nivel 3; los ítems 16 al 20 al Nivel 4 y los ítems 21 al 25 al Nivel 5. Dicho test ha sido ampliamente utilizado para medir el nivel de pensamiento geométrico en la que se encuentra un individuo. Utilizamos, tal y como se indicó en el marco conceptual, el esquema de los cinco niveles numerándolos del 1 al 5<sup>3</sup>. Ahora bien, al igual que Halat y Şahin (2008), usamos el nivel de pre-reconocimiento (Nivel 0) para situar a aquellos estudiantes que ni siquiera se encuentran en el Nivel 1, como veremos a continuación.

El sistema de clasificación en niveles de los participantes es el que se denomina “débil” (se considera que alcanza el Nivel de pensamiento geométrico correspondiente si tiene entre tres y cinco preguntas de las correspondientes al Nivel correctas). Este criterio fue utilizado por (Usiskin, 1982). Sin embargo (Halat y Şahin, 2005) en su investigación utilizaron el criterio “fuerte” (cuatro de cinco respuestas correctas por nivel).

Para determinar en qué nivel de pensamiento geométrico se encuentra un participante en la investigación se procede de la siguiente forma:

A cada individuo se le asigna un valor (peso) por cada Nivel alcanzado (si responde correctamente a tres o más ítems de dicho Nivel). De esta manera, se asignará:

- 1 punto si supera los ítems del Nivel 1 (Ítems 1-5)
- 2 puntos si supera los ítems de Nivel 2 (Ítems 6-10)
- 4 puntos si supera los ítems de Nivel 3 (Ítems 11-15)
- 8 puntos si supera los ítems de Nivel 4 (Ítems 16-20)
- 16 puntos si supera los ítems de Nivel 5 (Ítems 21-25)

---

<sup>2</sup> La traducción al español fue hecha por los investigadores. Somos conscientes de la fiabilidad limitada de este tipo de Test, pero a efectos prácticos de análisis optamos por su uso.

<sup>3</sup> Existen varios estudios que utilizan la escala 0-4 para los niveles



Una vez hecha esta asignación, cada estudiante tendrá una puntuación ponderada  $N$ . Entonces, un individuo se encuentra en el Nivel 1 si  $1 \leq N < 3$ ; en el Nivel 2 si  $3 \leq N < 7$ ; en el Nivel 3 si  $7 \leq N < 15$ ; en el Nivel 4 si  $17 \leq N < 31$ ; y en el Nivel 5 si  $N = 31$

### **Análisis y discusión**

Para el análisis de los datos obtenidos, se vaciaron los resultados de las hojas de respuestas cumplimentadas por los participantes en una hoja de cálculo, configurando una tabla de frecuencias y porcentajes (Tabla 1) en la que se indicó el número de participantes que se encontraba en cada nivel de pensamiento geométrico atendiendo al valor  $N$  obtenido mediante las consideraciones anteriores. A continuación, se realizó un contraste estadístico (t-test) con nivel de confianza  $\alpha \leq 0,05$  utilizando como discriminante las variables sexo, estudiante/profesor y Nivel de pensamiento geométrico (Tablas 2 y 3).

Para el análisis de los resultados obtenidos, consideramos a continuación los objetivos propuestos en el trabajo que se presenta. En relación con el primer objetivo de la investigación (Determinar los niveles de razonamiento geométrico de un grupo de Maestros de Educación Primaria en ejercicio y otro grupo de futuros Graduados en Educación Primaria (Maestros en formación) y comparar los resultados obtenidos para ambos grupos).

De esta manera, en la tabla 1, se pone de manifiesto que el nivel de razonamiento geométrico mayoritario en el que se encuentran tanto los futuros profesores como los profesores en ejercicio es el Nivel 2 (46,09% y 44,12%, respectivamente). Sin embargo, conviene destacar que un poco más de la tercera parte de los profesores en ejercicio se encuentra en el Nivel 4 de pensamiento geométrico (32,35 %), resultado que contrasta con el obtenido por (Halat y Şahin, 2008) para quienes únicamente el 2,8 % de profesores se encontraba en el Nivel 4.

Grupo	Total	Nivel 0		Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5	
		N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%
Maestros de Primaria en formación	115	5	4,35	28	24,35	53	46,09	12	10,43	15	13,04	2	1,74
Maestros de Primaria en ejercicio	68	1	1,47	9	13,24	30	44,12	4	5,88	22	32,35	2	2,94

Tabla 1: Niveles de pensamiento geométrico y porcentajes para Maestros en formación y en ejercicio. (Criterio débil: 3/5 correctas en el TGVH)

Conviene señalar también que un pequeño grupo de profesores en activo (4,35 %) no alcanzaron el Nivel 1. Desde nuestra perspectiva, se puede considerar que, aproximadamente, la cuarta parte de futuros profesores (23,47 %) se encuentra en niveles adecuados para enseñar Geometría en Primaria (Niveles 3 y 4). El porcentaje de profesores en ejercicio aumenta hasta el 38,32 % lo que supone un poco más de la tercera parte. Comparando los resultados de (Halat y Şahin, 2008), en nuestra investigación se obtuvo un mayor número de profesores en niveles adecuados para la enseñanza. Conviene señalar que hay dos futuros profesores y dos profesores en ejercicio que se encuentran en el máximo nivel de pensamiento geométrico. Atendiendo a los resultados presentados en la Tabla 2, la media de Nivel de pensamiento geométrico, tanto para los Maestros en formación como para los Maestros en ejercicio, es inferior a 3 y se puede concluir en que no existe diferencia significativa entre los niveles de pensamiento geométrico entre los maestros en formación y los maestros en ejercicio ( $p < 0,05$ ).

	Muestra	Media	Desviación Típica	Grados de libertad	t	Probabilidad
Maestros de Primaria en formación	115	2,070	1,082	181	-3,269	0,001
Maestros de Primaria en ejercicio	68	2,632	1,196			
Total	183					

Tabla 2: Media, desviación típica y otros estadísticos del t-Test para el contraste de hipótesis de los maestros en formación y en ejercicio

En ambos casos, los niveles medios de pensamiento geométrico no alcanzan el nivel de pensamiento que nosotros consideramos adecuado para la enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria. Los resultados obtenidos en (Halat y Şahin, 2008) son incluso inferiores (1,87 para los Maestros en formación y 1,50 para los Maestros en ejercicio), lo que difiere de nuestros resultados en que para los Maestros en ejercicio el nivel medio es superior que el de los futuros profesores.

En relación con el segundo objetivo (Analizar si existen diferencias de niveles de pensamiento en cuanto al sexo de los encuestados), en la Tabla 3 se puede observar que el nivel mayoritario para las mujeres es el Nivel 2 de pensamiento geométrico, tanto para los Maestros en formación como para los que se encuentran en ejercicio; los resultados indican que los hombres se encuentran en el Nivel 4 que es notablemente superior que el Nivel 2 en que se encuentra la mayoría de las mujeres.

Grupo	Sexo	Nivel 0		Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4		Nivel 5	
		N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%
Maestros de Primaria en formación	Hombres (43)	0	0	11	25,58	17	39,53	4	9,3	10	23,25	1	2,32
	Mujeres (72)	5	6,94	17	23,61	36	50	8	11,11	5	6,94	1	1,38

		N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%	N <sub>i</sub>	%
Maestros de Primaria en ejercicio	Hombres (30)	1	3,33	3	10	9	30	1	3,33	14	46,66	2	6,66
	Mujeres (38)	0	0	6	15,78	21	55,26	3	7,89	8	21,05	0	0

Tabla 3: Niveles de pensamiento geométrico y porcentajes para Maestros en formación y en ejercicio distribuidos por su género. (Criterio débil: 3/5 correctas en el TGVH)

En este mismo sentido, en la Tabla 4 se presentan los resultados de los niveles medios de los Maestros en formación y en ejercicio, pero clasificados por el género. Los resultados presentados indican que, para los maestros en formación, la media de nivel de pensamiento geométrico alcanzada por los hombres (2,326) es superior que la de las mujeres (1,930), al revés que lo ocurrido con los encuestados en (Halat y Şahin, 2008), sin embargo los resultados no son estadísticamente significativos ( $p > 0,05$ ), confirmando en cierta manera lo que se observa en la Tabla 3. En esa misma tabla, se puede observar que para profesores en ejercicio (hombres), la media de nivel de pensamiento geométrico es superior que la de las mujeres (2,342). Otra vez al contrario que los resultados obtenidos por (Halat y Şahin, 2008) que fueron respectivamente 1,39 y 1,65. Estos últimos resultados sí que resultan estadísticamente significativos ( $p = 0,023 < 0,05$ ).

	N	Media	Desviación Típica	Grados de libertad	t	Probabilidad
<b>Maestros de Primaria en formación (Total)</b>	115					
Hombres	43	2,326	1,149	112	-1,916	0,058
Mujeres	72	1,930	1,019			
<b>Maestros de Primaria en ejercicio (Total)</b>	68					
Hombres	30	3	1,339	66	-2,326	0,023
Mujeres	38	2,324	0,994			

Tabla 4: Media, desviación típica y otros estadísticos del t-Test para el contraste de hipótesis de los maestros en formación y en ejercicio

## **Algunas reflexiones finales**

En este estudio descriptivo se han determinado los diferentes niveles de pensamiento geométrico en que se encuentra un grupo de maestros de Primaria en formación y en ejercicio. En ambos casos, se ha podido comprobar que la mayoría de ellos se encuentran, como máximo, en el nivel 2 de pensamiento geométrico (casi el 75 % en el primer caso y más del 60 % en el segundo). Los hombres muestran diferencias significativas con las mujeres, principalmente cuando se trata de profesores en activo. Estos resultados nos permiten concluir que es fundamental incidir en la formación geométrica de nuestros estudiantes y, también, que debemos plantearnos la necesidad de desarrollar cursos de formación continua en Geometría para profesores de Primaria en ejercicio.

Los resultados obtenidos poseen las limitaciones propias del hecho de emplear como instrumento un test de respuestas múltiples, pero se conjetura que, utilizando otros instrumentos (por ejemplo el test de Jaime, utilizado en Afonso (2004)), los resultados serían, casi con toda seguridad, similares. En relación con los resultados obtenidos por (Halat y Şahin, 2008), conviene ser cuidadosos a la hora de comparar nuestros resultados. Ellos emplearon otros criterios más exigentes para clasificar a los participantes; si bien, conviene destacar que, en nuestro caso, los mejores resultados se obtuvieron para los hombres y en el suyo fue para las mujeres.

**AGRADECIMIENTOS:** Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el Proyecto: *La resolución de problemas y la tecnología en la formación y el desarrollo profesional del profesor de matemáticas* (EDU2011-29328).

## **Referencias bibliográficas**

- Afonso, M. C. (2004). *Los niveles de pensamiento geométrico de van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. España.
- Afonso, M. C.; Camacho, M. y Socas, M. M. (2009) In-Service Mathematics Teacher Training From The van Hiele Theory Perspective. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*. Vol. 13(4), pp. 349-377.
- Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En Grouws, D. A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 420-464. New York: Macmillan Publishing Company.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry K-12 (1987 Yearbook)*, pp. 1-16. Reston. NCTM.
- Duatepe, A. (2000). *An investigation of the relationship between Hiele geometric level of thinking and demographic variables for pre-service elementary school teachers*. Unpublished Masters' Thesis, Middle East Technical University.
- Gómez, P. y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de Primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M.T. González; M. Codes; D. Arnauy T.; Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.
- Gutierrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 237-251.
- Knight, K.C. (2006). *An investigation into the change in the Hiele level of understanding geometry of pre-service elementary and secondary mathematics teachers*. Unpublished Masters Thesis. University of Main.
- Halat, E. y Şahin, O. (2008). van Hiele Levels of Pre- and In- Service Turkish Elementary School Teachers and Gender Related Differences in Geometry. *The Mathematics Educator*, Vol. 11, N<sup>o</sup>.1/2, 143-158
- Tatto, M.T.; Schwille, J.; Senk, S.; Ingvarson, L.; Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and

Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project)*. Chicago: University of Chicago. (ERIC Document Reproduction Service N<sup>o</sup> ED220288).