FORMACIÓN DEL PROFESORADO
E INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XII
ISSN: 1695-6613

COMPRENSIÓN MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA EN SECUNDARIA DE ESTUDIANTES DEL GRADO EN MATEMÁTICAS CUANDO RESUELVEN UN PROBLEMA CON GEOGEBRA

Alexánder Hernández Hernández
Josefa Perdomo-Díaz
Matías Camacho-Machín
Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio exploratorio sobre la comprensión matemática para la enseñanza, en un contexto de uso de tecnología para la resolución de problemas. Se muestra el estudio de un caso: un grupo de 4 estudiantes del Grado en Matemáticas, que resuelve un problema de variación, usando GeoGebra y un protocolo que integra diversas aproximaciones al problema. Se analizaron los documentos escritos y la grabación de una exposición en la que los estudiantes mostraron la resolución de la tarea. En los resultados se muestran evidencias tanto de la competencia matemática como de la actividad matemática de los estudiantes. Por último, se discuten los aportes del GeoGebra y el protocolo para estos resultados, así como sus limitaciones.

Abstract

In this paper, we present an exploratory study about mathematical understanding for teaching, in a context where technology is used to solve problems. A case study is displayed: a group of 4 students of the Degree in Mathematics, which solves a variation-problem with GeoGebra and a protocol that integrates several approaches to the problem. Data analysed were the students' written documents and the recording of their presentation of the solution of the task. The results show evidence of both the students' mathematical competence and mathematical activity. Finally, we discuss the contributions of the GeoGebra and the protocol to these results, as well as their limitations.

Introducción

Actualmente el software diseñado específicamente para la enseñanza de las Matemáticas ha hecho que se plantee la necesidad de reestructurar la manera en que se aborda la resolución de problemas. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) plantean que el uso de la tecnología modifica y extiende las fases de resolución de problemas. Para ellos, en la resolución de problemas con tecnología, se pueden distinguir cinco episodios: comprensión, exploración, búsqueda de múltiples aproximaciones, extensión, e integración y reflexión.

Esta investigación se plantea desde la necesidad de incluir, de forma explícita, en la formación del profesorado el uso de la tecnología como una herramienta para la resolución de problemas y, por tanto, para el desarrollo del conocimiento matemático. ¿Qué actividades con uso de la tecnología son interesantes para proponer a futuros profesores? ¿Qué conocimientos matemáticos promueve el uso de la tecnología? ¿Qué comprensión de las Matemáticas para la enseñanza muestran los futuros profesores al usar la tecnología?

Camacho-Machín, Moreno y Afonso (2014) plantean que los profesores jóvenes aunque diestros en el uso de las tecnologías, tienen dificultades para usar las TIC en sus clases. Consideran que una de las razones podría ser que no han descubierto las potencialidades de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como recurso útil en la Educación Secundaria. Con el objetivo de determinar la actividad matemática que surge cuando se usa un SGD y de buscar la forma de guiar a los futuros profesores en el descubrimiento de las potencialidades que ofrece la tecnología, los autores marcan y analizan tres problemas comparando la resolución convencional (lápiz y papel) con la resolución que hace uso del GeoGebra. De su estudio concluyen que estos no son capaces de aprovechar el dinamismo del GeoGebra, que es necesario distinguir entre resolver el problema con rigor y reflexionar sobre la enseñanza de las Matemáticas en Educación

Secundaria, y que las actividades de formación de profesores, que relacionan la resolución de problemas con tecnología, requieren de una guía que permita explorar el recurso con todas sus ventajas. Terminan su trabajo con una *Guía de Implementación* con distintas actividades que deberían incluirse en tareas con SGD: aproximación dinámica, aproximación algebraica y extensiones.

El estudio que aquí se presenta se realizó en el contexto de una asignatura optativa de 4º curso del grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna, denominada *Matemáticas para la Enseñanza*. Los contenidos de esta asignatura abarcan distintos temas relacionados con la práctica docente: naturaleza y procesos del pensamiento matemático, resolución de problemas, utilización de los medios tecnológicos, innovación en la enseñanza y didácticas específicas. Una parte de la asignatura está dedicada a la resolución de problemas desde distintas aproximaciones, teniendo como referencia los episodios propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) y haciendo uso del SGD GeoGebra.

Puesto que una tarea que haga uso de la tecnología no conlleva intrínsecamente que aporte algo esencial o diferente a la formación sobre Matemáticas para la enseñanza, nos queda preguntarnos ¿de qué forma, el realizar estas tareas con GeoGebra, contribuye a la formación como profesores de Matemáticas?

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio exploratorio de la comprensión matemática para la enseñanza en la Educación Secundaria, que muestran los estudiantes de la asignatura *Matemáticas para la enseñanza* al utilizar GeoGebra para resolver problemas. Para ello se analiza un caso, usando el modelo MUST, acrónimo de Mathematical Understanding for Secondary Teaching, que describe la comprensión de las Matemáticas que necesita el profesorado de Secundaria.

Marco Conceptual

Resolución de problemas con tecnología

Cuando se habla de resolución de problemas de Matemáticas, uno de los primeros autores que se tiene en cuenta es Pólya y su obra “How to solve it?” (1945), en la que describió un método general para la resolución de problemas, dividido en cuatro etapas y un conjunto de heurísticos generales. Schoenfeld (1985) pone de manifiesto que no es suficiente conocer las etapas y los heurísticos, sino que existen distintas dimensiones que intervienen en el éxito cuando se resuelven problemas como los recursos de que dispone el individuo, el control que se hace de ellos, su sistema de creencias o las prácticas de enseñanza que ha vivido. La irrupción de la tecnología en la sociedad ha provocado cambios en la forma de entender la resolución de problemas. En este sentido, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009; 2013) plantean que el uso de SGD o de Cálculo Simbólico conlleva una concepción diferente de la forma de resolver problemas, además de aportar nuevos recursos para poner en práctica. Según estos autores, la resolución de problemas con tecnología es una actividad en la que un resolutor experto transita por cinco episodios: Comprensión, Exploración, Búsqueda de múltiples aproximaciones, Extensión, Integración y reflexión.

Comprensión Matemática para la Enseñanza Secundaria

Cada vez hay un mayor consenso entre los investigadores de la necesidad de hablar de un conocimiento de las Matemáticas propio del profesor de dicha materia, distinto del conocimiento de la disciplina que se requiere en otras profesiones (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Carrillo, 2015). En este estudio se ha usado el modelo denominado “Mathematical Understanding for Secondary Teaching [MUST]” (Heid, Wilson, & Blume, 2015), que describe la comprensión matemática para la enseñanza en Secundaria desde tres perspectivas:

Competencia Matemática, *Actividad Matemática* y *Contexto Matemático de Enseñanza*[1]. Estas tres perspectivas, de forma conjunta, proporcionan una mirada holística del conocimiento de las Matemáticas que necesita un profesor de Educación Secundaria y la manera en que debe usarlo para enseñar a sus estudiantes.

La *Competencia Matemática* comprende aspectos relacionados con el conocimiento y la habilidad matemática propia del profesor. Debe ser más amplia que la de una persona que no se dedique a la docencia y abarcar desde las Matemáticas de Primaria hasta Matemáticas avanzadas. Los principales elementos de esta perspectiva son la *comprensión conceptual, la fluidez en los procedimientos*, *la competencia estratégica* y *el razonamiento flexible*.

La *Actividad Matemática* describe las acciones matemáticas específicas que un profesor pone en práctica. Puede entenderse también como una serie de actividades que componen el "hacer matemático" de un profesor. El profesor debe ser consciente de ellas y de cómo estas acciones sirven para involucrar a sus estudiantes en el estudio de las Matemáticas. Las acciones que identificamos dentro de esta perspectiva se pueden agrupar en: i) identificar, reconocer y conectar ideas, ii) observar, conjeturar, demostrar, generalizar y extender argumentos, y iii) definir, representar, modificar y transformar elementos.

El *Contexto Matemático de Enseñanza* reúne aspectos de la comprensión matemática que no se aprecian en otras profesiones. Es visible cuando se realiza la práctica docente, por ejemplo: cuando se reconoce la naturaleza de los errores de los estudiantes, al verificar que una solución de un estudiante cumple las condiciones del problema o dar por equivalente una definición alternativa.

[1] Traducción de Mathematical Proficiency, Mathematical Activity y Mathematical Context, respectivamente.

En nuestro estudio fijamos nuestra atención sobre la *Competencia Matemática* y la *Actividad Matemática* debido a que, entre las tareas propuestas a los participantes, no se les plantea que enseñen a otros individuos, ni de forma real ni hipotéticamente, por lo que no podemos observar los aspectos relacionados con el *Contexto Matemático de Enseñanza*.

Marco metodológico

La investigación se realizó en el contexto de la asignatura *Matemáticas para la Enseñanza*, optativa de cuarto del Grado en Matemáticas. Los participantes fueron los 16 estudiantes matriculados en el curso 2015/2016. A estos se les asignaba una Tarea que consistía en resolver un problema siguiendo un protocolo y realizar, posteriormente, una exposición oral. La Tarea se realizó en grupos de cuatro personas, a cada uno de los cuales se le presentaron cuatro problemas de Cálculo diferentes, en los que el objetivo final era el de maximizar o minimizar el área de una familia de figuras.

En este artículo se presenta el análisis de la *Competencia Matemática* y la *Actividad Matemática* de uno de los grupos de estudiantes, formado por Álvaro, Isidro, Laura y Marta (seudónimos), al realizar la tarea asignada (ver anexo).

En la tarea se enuncia el problema *Rectángulo inscrito* (*Tabla 1*), acompañado de un *Protocolo de Resolución* (PR), diseñado tomando como referencia los episodios descritos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) y las recomendaciones de la *Guía de implementación* de Camacho-Machín, Moreno y Afonso (2014). La estructura del *Protocolo de Resolución* (PR) se describe con detalle en Hernández, Camacho-Machín y Perdomo-Díaz (enviado).

RECTÁNGULO INSCRITO: De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio R, determinar el de mayor área.

Tabla 1. Enunciado del problema analizado que aparece en la Tarea.

Los datos recogidos y analizados fueron: un archivo en pdf, un informe de la resolución del problema, y una grabación de la presentación.

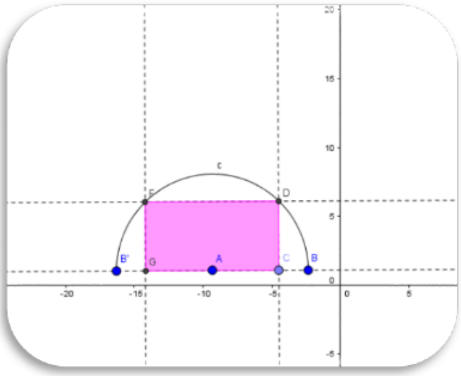
Resolución de la Tarea por parte de los estudiantes

En este apartado se describe el proceso de resolución que los estudiantes mostraron en el problema “Rectángulo inscrito”. Para ello se sigue el orden marcado por el esquema general del PR. En cada apartado del PR, la información principal se obtiene del informe presentado por el grupo, que se complementa mediante la información extraída de la presentación.

Aproximación dinámica

En el informe escrito, los estudiantes detallan los pasos seguidos para representar una familia de rectángulos inscrita en una semicircunferencia. La construcción con GeoGebra realizada por los estudiantes parte con el trazado de una semicircunferencia con extremos B y B’ y el segmento que los une. Luego, inscriben un rectángulo en ella, que tenga el primer vértice (C) sobre el diámetro, desde el cual trazan una recta perpendicular al diámetro que corta a la circunferencia en el segundo vértice. Reiterando el proceso, dibujan los otros dos vértices del rectángulo, de modo que, cuando arrastran C sobre el diámetro, varían los cuatro vértices del rectángulo. Consiguen, así, visualizar toda la familia de rectángulos inscrita en la semicircunferencia (Ilustración 1).

- Construimos dos puntos arbitrarios A y B, y la recta a que los une.
- Ayudándonos de la herramienta simetría central construiremos el punto B' simétrico de B respecto al punto A.
- Construimos la semicircunferencia de diámetro BB'.
- Luego, creamos el segmento que se identifica como el diámetro de la semiesfera, aquel que une los puntos B y B', y construimos un punto C perteneciente a dicho segmento.
- Ayudándonos de las herramientas "recta perpendicular" e "Intersección" construiremos nuestro rectángulo inscrito en nuestra semicircunferencia partiendo del punto C.
- Definimos nuestro rectángulo con la herramienta polígono utilizando los puntos obtenidos anteriormente, y obtenemos el polígono CDFG.
- Utilizando la herramienta "Longitud o distancia" podemos visualizar el tamaño de la base y altura de nuestro rectángulo y el diámetro de nuestra semicircunferencia.



Podemos analizar la variación del área de la familia de rectángulos obtenida, mediante la herramienta "Elige y mueve" deslizando el punto C a lo largo del diámetro de la semicircunferencia.

Ilustración 1. Extracto del informe realizado por el grupo (página 2).

Durante la exposición, los estudiantes explican los pasos de la construcción y comentan cómo varía la representación al mover el punto C:

> *Marta H.: "…obtenemos un rectángulo que podemos mover con el punto C y se nos va transformando en un cuadrado, un rectángulo, etc…"*

También discuten con el profesor sobre la necesidad de escoger el punto C en el diámetro de la semicircunferencia y no en la recta. La conversación surge a raíz de que, por error, muestran una construcción que no está terminada:

Álvaro M.: "…este no está terminado de hacer, se sale el punto porque hay que construir el punto en el diámetro de la circunferencia…en la construcción sí estaba, en la preparada en el power point. Aquí el punto está escogido sobre la recta y por eso se sale de la semicircunferencia..."

Al analizar la variación del área de los rectángulos, en el informe se describe cómo el rectángulo de menor área se obtiene cuando el punto C se aproxima al borde o al centro de la semicircunferencia. Observan que el área aumenta en valores intermedios, y destacan que el área del cuadrado inscrito no es la máxima. Terminan el análisis señalando que el rectángulo cuya altura es la mitad de la base, es el de área máxima, aunque describen este hecho como una tendencia, término más propio para hablar de límites (Ilustración).

Podemos observar, en primer lugar, que cuando C se encuentra cerca de los puntos A y B, el rectángulo será mínimo. A medida que lo aproximamos a un cuadrado el área aumentará pero comprobamos que si seguimos desplazando C, el cuadrado no representa el área máxima. Por último, nos percatamos de que el área tiende a ser máxima cuando la altura es la mitad de la base.

Ilustración 2. Extracto del informe realizado por el grupo (página 3).

Durante la exposición, los estudiantes indican que la facilidad para manipular la construcción permite dar una primera aproximación a la solución:

Profesor: "¿De qué les ha servido el GeoGebra a la hora de resolver el problema?"

Álvaro M.: "… la idea de que se alcanza el valor máximo cuando la base es el doble de la altura, ya nos podemos hacer una idea simplemente jugando con las condiciones en GeoGebra…podemos hacernos una idea de esas

A continuación, dentro de la aproximación dinámica, describen en el informe cómo trazan el lugar geométrico. Definen un punto H, con abscisa la base del rectángulo y ordenada el área, usando la herramienta Lugar Geométrico con este punto H, respecto al primer vértice construido del rectángulo (C). De esta forma trazan una curva que representa el área de los rectángulos (Ilustración).

Por otro lado, obtendremos la representación gráfica del área de los rectángulos, hallando el lugar geométrico que relaciona una de las dimensiones del rectángulo con su área, mostramos el procedimiento que hemos seguido para calcularlo:

- Podemos definir un punto H de coordenadas (base de nuestro rectángulo, área de nuestro rectángulo) que nos ayudará a visualizar como varía el área en función de la variación de la longitud de la base.
- Con la herramienta "Lugar geométrico" podemos obtener el conjunto de los puntos que describen la curva que se forma al moverse el punto construido en el paso anterior.

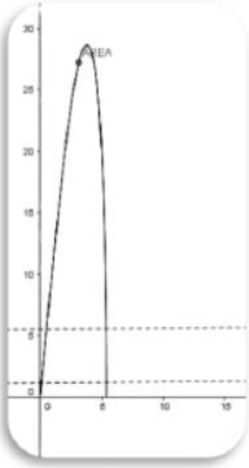


Ilustración 3. Extracto del informe realizado por el grupo (página 3).

En la exposición oral detallan como el lugar geométrico permite representar el área en función de la medida de la base y de cómo se puede usar esta representación para resolver el problema. Arrastrando un vértice del rectángulo, colocan el punto H en el máximo de la gráfica y, analizando los valores obtenidos conjeturan, de nuevo, que la altura es la mitad de la base. Enlazan la conjetura realizada con la aproximación numérica, que fue presentada antes en la exposición, e indican que necesitan verificar la idea obtenida con una tabla de valores:

Laura G.: "El Lugar geométrico lo utilizamos para ver como varia el área del rectángulo…miramos la longitud de la base y la longitud de la altura y podemos decir que la razón entre ellos es de dos, es decir, que la base es el doble de la altura, pero lo verificamos con una tabla"

Aproximación Numérica

En el apartado de la aproximación numérica, el grupo presentó una tabla en la que registraron los valores de las medidas de la base y de la altura y el área de distintos rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 5 unidades (Ilustración). Resaltaron la fila en la que el área era de 25 unidades como la máxima alcanzada y dan por verificado que la base (7,097 unidades) es el doble de la altura (3,523 unidades). En la exposición oral lo explican de manera similar.

▶ En este apartado, construiremos una tabla con los distintos valores del lado y el área de nuestro rectángulo que nos ayudará a confirmar las intuiciones a las que habíamos llegado. Describiremos a continuación, como lo hemos realizado:

- En primer lugar, podemos fijar el radio de nuestra circunferencia en un tamaño en particular, por ejemplo, R=5 y construiremos una tabla de valores para observar si las relaciones entre la base del rectángulo y su área se corresponden con las hipótesis que habíamos postulado anteriormente.

Base	Altura	Área
3,607	4,664	16,819
3,695	4,646	17,167
2,907	4,784	13,910
3,084	4,756	14,667
3,255	4,728	15,390
3,430	4,697	16,109
3,605	4,664	16,813
4,129	4,554	18,802
4,042	4,573	18,485
4,216	4,534	19,116
4,304	4,513	19,423
4,390	4,492	19,724
4,652	4,426	20,590
4,739	4,403	20,866
4,827	4,379	21,136
4,914	4,355	21,399
4,916	4,354	21,407
5,004	4,329	21,662
5,179	4,277	22,151
5,440	4,195	22,824
5,702	4,108	23,422
5,964	4,013	23,937
6,139	3,947	24,230
6,313	3,878	24,480
6,399	3,842	24,588
6,661	3,729	24,842
7,097	3,523	25,000
7,270	3,433	24,960
8,580	2,568	22,035
8,755	2,416	21,154
9,016	2,163	19,502
9,191	1,970	18,108
9,278	1,865	17,304

- Observamos que el valor máximo que alcanza el área, se da cuando la razón entre la altura y la base es dos, es decir, cuando la base es el doble que la altura, confirmando nuestras intuiciones.

Ilustración 4. Extracto del informe realizado por el grupo (página 4).

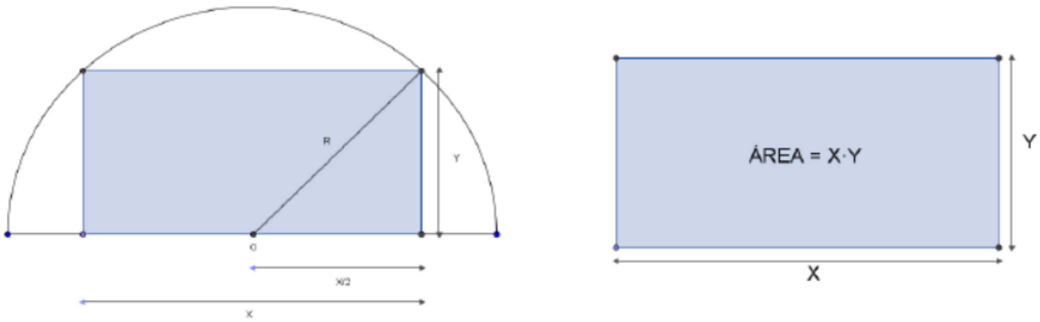
Aproximación Algebraica

El grupo comienza este apartado del informe con una representación del rectángulo inscrito para deducir las expresiones algebraicas que relacionan las medidas de los lados del rectángulo entre sí, con su área y con el radio de la semicircunferencia (Ilustración). A partir de estas expresiones, escribieron la forma algebraica de la función “área del rectángulo” dependiendo sólo de la base, para luego, haciendo uso de métodos de cálculo, calcular el máximo de la función. Deducen que dado un radio R el área máxima es R^2 y terminan comprobando la solución con el ejemplo de radio 5. Concluyen que manipulando la construcción se podría comprobar el caso general (Ilustración).

La construcción de nuestro rectángulo nos permite desplazar y ampliar el diámetro de nuestra semicircunferencia para poder estudiar un caso general y comprobar que los resultados que hemos obtenido se cumplen para un caso general.

Ilustración 5. Extracto del informe realizado por el grupo (página 5).

Hallamos una expresión algebraica del área del rectángulo inscrito en función de una sola variable.



$$A = \text{Área del rectángulo} = X * Y$$

Podemos encontrar que la relación entre "X" e "Y" es:

$$\left(\frac{X}{2}\right)^2 + Y^2 = R^2$$

Ilustración 6. Extracto del informe realizado por el grupo (página 4).

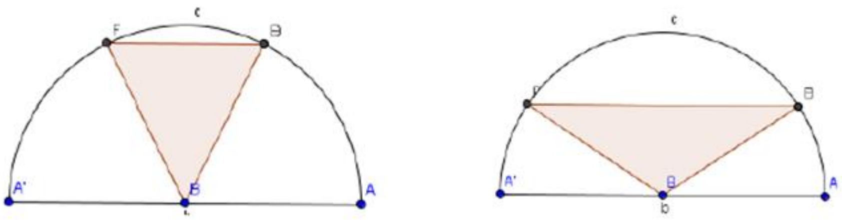
También le dedican cierto tiempo en la exposición a explicar estos pasos, haciendo hincapié en la representación gráfica de la función área respecto de la medida de la base del rectángulo que, al restringir su dominio, coincide con el lugar geométrico representado.

Extensiones

Tanto de forma escrita como oral, el grupo presenta una extensión del problema, denominada por ellos como "problema similar". Plantean un problema en el que se inscribe un triángulo en una semicircunferencia, de forma que uno de los vértices es el centro y su lado opuesto es paralelo al diámetro. Para explicarlo, hacen referencia explícita al problema que se les planteó: "…tomando como base del triángulo la base superior del rectángulo que hemos utilizado anteriormente…"

Respecto a la contextualización, toman como idea realista la realización de un concierto y, luego se limitan a nombrar objetos reales como figuras matemáticas, como lona semicircular y escenario rectangular (Ilustración).

Si construimos un triángulo inscrito a una semicircunferencia de radio arbitrario R, tomando como base del triángulo la base superior del rectángulo que hemos utilizado anteriormente y como vértice opuesto a la base el centro de la semicircunferencia, obtenemos el esquema siguiente:



Y podemos plantearnos cuando el área de este triángulo será de área máxima y que relación guardara este momento con las características de la semicircunferencia.

Para la celebración de un concierto se desea instalar un escenario rectangular que se debe instalar sobre una lona semicircular de radio R que se utiliza para no estropear el pavimento. ¿Cuál será el área máxima que podrá ocupar nuestro escenario? ¿Qué relación existe entre el radio R de nuestra lona y las dimensiones del escenario?

Ilustración 7. Extracto del informe realizado por los estudiantes (pp. 5 y 6).

Análisis de la Competencia y Actividad Matemática de los estudiantes

Al utilizar el modelo MUST como referencia para analizar el proceso de resolución que estos estudiantes utilizaron en la Tarea "Rectángulo inscrito", se identifican descriptores asociados tanto a la *Competencia Matemática* como a la *Actividad Matemática*. Siguiendo el orden del PR (aproximación dinámica, numérica, algebraica y extensiones), comentamos a continuación los más claros.

La construcción y el análisis de la variación del área de los rectángulos ponen de manifiesto elementos de la *Competencia Matemática* del grupo de estudiantes, ya que concibieron y aplicaron correctamente un proceso para realizar una construcción que representara toda y únicamente la familia de rectángulos propuesta en el enunciado. Estas acciones son muestra de la *competencia estratégica* y la *fluidez en los procedimientos* del grupo. En esta fase inicial del proceso de resolución, el grupo también da muestras de su *Actividad Matemática*, ya que tienen que *representar* la familia de rectángulos inscritos en la semicircunferencia; para ello *definen* un punto de arrastre sobre el diámetro, *se dan cuenta* de cuáles son las dimensiones de interés (base, altura, diámetro) y *observan* su variación al visionar toda la familia de rectángulos. Al estudiar el lugar geométrico tuvieron que *definir* un punto a partir de sus propiedades y *representar* la gráfica del área del rectángulo al variar la medida de su base. Por último, en distintos momentos de la Aproximación Dinámica, queda evidenciado el razonamiento matemático de los estudiantes, *cuando conjeturan* la relación doble y mitad entre las medidas de la base y la altura del rectángulo.

En la resolución por Aproximación Numérica, los estudiantes *representaron* las relaciones entre los lados y el área de los rectángulos usando una tabla de registro y mostraron también su fluidez en los procedimientos que implican el uso de la hoja de cálculo. A la hora de confirmar sus hipótesis, mostraron un razonamiento flexible al dar la conjetura como correcta, aunque la medida de la base toma el valor 7,097 mientras que el doble de su altura es 7,046. Además, los estudiantes se *dieron cuenta* de que la tabla no es válida para un caso general.

La Aproximación Algebraica fue abordada por el grupo haciendo uso de su *comprensión conceptual* y expresando de forma algebraica las relaciones pitagóricas presentes en un rectángulo inscrito en una semicircunferencia. Continuaron mostrando *fluidez en los procedimientos* para conseguir expresar la función área dependiente de una sola variable y calcular su máximo, para luego determinar el rectángulo buscado. Observando la realización de esta parte, desde la perspectiva de la Actividad Matemática, se identifica cómo fueron capaces de *representar* la función área y *conectarla* con la representación del lugar geométrico. El razonamiento matemático está presente en distintos momentos, cuando *restringen* el dominio de la función área, cuando *justifican* que el rectángulo buscado tiene como área el cuadrado del radio o cuando reconocen que pueden *comprobar* con distintos casos particulares la solución general.

Consideraciones finales

En este estudio nos planteamos explorar qué aspectos de la *Comprensión Matemática para la Enseñanza Secundaria* muestran los estudiantes del Grado de Matemáticas cuando usan la tecnología para resolver problemas. En particular, se analiza su *Competencia* y *Actividad Matemática* en un entorno de uso del GeoGebra para la resolución de un problema de máximos y mínimos.

Respecto a la *Competencia Matemática* que mostró el grupo de estudiantes, hemos podido reconocerla por cuatro de los aspectos que la describen: *comprensión conceptual*, *fluidez en los procedimientos*, *competencia estratégica* y *razonamiento flexible* (Heid, Wilson, & Blume, 2015). La *comprensión conceptual* se identificó cuando los estudiantes demostraron conocer el concepto de rectángulo inscrito, lo construyeron usando las propiedades de paralelismo y perpendicularidad de sus lados, y lo inscribieron en el círculo tomando los vértices sobre la circunferencia y el diámetro. También demostraron conocer y saber usar las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, dadas por el Teorema de Pitágoras, al escribir la ecuación que relacionaba el radio de la circunferencia con la altura y la mitad de la base del rectángulo inscrito. La *fluidez de los procedimientos* y la *competencia estratégica* se identificó cuando los estudiantes eligieron la estrategia y dieron, sin error, los pasos para resolver cada "pequeño problema" que surgió en la resolución. Diseñaron e hicieron una construcción dinámica, eligieron y registraron las dimensiones relevantes en una tabla, y plantearon y resolvieron el sistema de ecuaciones para relacionar el radio de la circunferencia con una solución general. Mostraron el *razonamiento flexible* al aceptar igualdades numéricas considerando cierto margen de error.

Respecto a la Actividad Matemática, esta fue identificada por medio de acciones relacionadas con la percepción, el razonamiento y la creatividad matemática (Heid, Wilson, & Blume, 2015). Las acciones señaladas durante el análisis fueron: *darse cuenta, conectar, observar, conjeturar, demostrar, justificar, comprobar, restringir, representar* y *definir*. Hay acciones que se identificaron varias veces (representar, observar, conjeturar o definir), lo que podría estar motivado por la forma en que se planteó la actividad, con el uso de GeoGebra y siguiendo un *Protocolo de Resolución* que incluye distintas aproximaciones a la situación: dinámica, numérica, algebraica y la búsqueda de extensiones (Camacho-Machín, Moreno, & Afonso, 2014). De esta forma, los estudiantes han usado distintas representaciones para trabajar con la familia de rectángulos inscrita en la semicircunferencia, desde la construcción dinámica, hasta la función área de un rectángulo respecto a la mitad de su base, pasando por la definición de un lugar geométrico y una tabla con dimensiones de casos particulares. En cada una de ellas han tenido que hacer observaciones y conjeturas que han conllevado la definición de nuevos elementos, conexiones entre ellos y sus demostraciones.

En resumen, se ha podido constatar que el uso de la tecnología en la resolución de problemas pone de manifiesto elementos de la comprensión matemática que necesitan los profesores para enseñar la disciplina en la Educación Secundaria. El uso del *Protocolo de Resolución*, como guía de implementación de la tarea, ha permitido que los estudiantes pudieran explorar distintas potencialidades del

GeoGebra y trabajar distintas representaciones de un objeto matemático, transitando por los cinco episodios de resolución indicados por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009; 2013). En definitiva, el uso del SGD GeoGebra en la resolución de problemas ha permitido identificar y analizar la comprensión matemática de los futuros profesores, además de explorar el potencial tanto del problema planteado como del protocolo utilizado en su resolución.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Make It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Camacho-Machín, M., Moreno, M., & Afonso, M.C. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica. En *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* (Vol. 11, 9-22 y 45-66).

Carrillo, J. (2015). Estudio personal compartido sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesorado y resolución de problemas. En *Avances y realidades de la educación matemática* (1ª ed., p. 226). Barcelona, España: Graó.

Heid, M., Wilson, P.S., & Blume, G.W. (Ed.). (2015). *Mathematical Understanding for Secundary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* Charlotte (NC), USA: NCTM and IAP.

Hernández, A., Camacho-Machín, M. &Perdomo-Díaz, J. (enviado). Actividad Matemática en la resolución de un problema con GeoGebra: Analisis de un caso de estudiantes universitarios.

Pólya, G. (1945). How to solve it? Princeton, USA: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the Construction of a Framework to Deal with Routine Problems to Foster Mathematical Inquiry. *Primus*, 19(3), 260-279.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1 & 2), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York, USA: Academic Press.

Anexo

TAREA 2. GEOGEBRA

Fecha: Nombre y apellidos:

Resuelve el siguiente problema en los términos que se sugiere. Trabajarás usando diferentes aproximaciones para profundizar en la situación planteada.

- Aproximación dinámica
- Aproximación Numérica y Algebraica
- Extensiones.

Añade las sugerencias que se te ocurran en relación con el problema.

Problema 1

De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio **R**, determinar el de mayor área.

Una aproximación dinámica utilizando GeoGebra

1. Construir el rectángulo inscrito en una semicircunferencia de radio arbitrario. El rectángulo construido, debe moverse y tener el área variable. Indica brevemente cómo se ha hecho.
2. Analizar la variación del área de la familia de rectángulos obtenida.

   Observaciones:

3. Obtener la representación gráfica del área de los rectángulos, hallando el lugar geométrico (comando) que relaciona una de las dimensiones del rectángulo con su área.
4. Identificar visualmente en qué punto la gráfica obtenida alcanza el valor máximo.

Aproximación numérica y algebraica

- Construir una tabla con los distintos valores del lado y el área. Confirma tus intuiciones.
- Hallar una expresión algebraica del área del rectángulo en función de una sola variable. Representar gráficamente la función obtenida y discutir el tipo de propiedades que tiene.
- Comparar ese valor con el que se obtuvo previamente haciendo uso de la representación gráfica.

Hacia un caso general: Cambiar las dimensiones

- Resuelve el problema utilizando técnicas del Análisis Matemático y comprueba los resultados.

Algunas extensiones

- ¿Se te ocurren algunas otras extensiones del problema?
- Enuncia un problema situado en un contexto real.
- Guarda el fichero de GeoGebra utilizado y súbelo al Aula Virtual con el nombre: Apellido1_Nombre.ggb