Anuario Jurídico y Económico Escurialense, XXXVII (2004) 409-425 / ISSN: 1133-3677

Concepto de solución para los juegos cooperativos

Elena MARTÍNEZ RODRÍGUEZ
Real Centro Universitario
«Escorial-María Cristina»
San Lorenzo del Escorial

Palabras clave

I. LA TEORIA DE JUEGOS

La Teoría de Juegos es una moderna disciplina que ha despertado un gran interés por sus muchas aplicaciones a los problemas sociales, económicos y políticos. Hablando en términos generales e intuitivos, podríamos decir que la Teoría de Juegos estudia situaciones de conflicto y cooperación a las que denominamos juegos, en las que interactúan individuos racionales, analizando los comportamientos y resultados que son de esperar, bien mediante decisiones individualizadas (caso de los juegos no cooperativos), bien mediante acuerdos entre los participantes (caso de los juegos cooperativos).

En los últimos 20 años la Teoría de Juegos ha experimentado una expansión significativa en tres importantes aspectos: la investigación académica, no han cesado de aumentar las publicaciones especializadas en las que se estudia o aplica la Teoría de Juegos. En el aspecto docente, en los nuevos planes de estudio ha aumentado sensiblemente su presencia en los programas de licenciatura y de doctorado, especialmente en los de Economía. Y por último, en el aspecto de divulgación podemos afirmar que el conocimiento de la Teoría de Juegos ha crecido fuertemente a partir de la concesión en 1994 del Premio Nobel de Economía a tres de sus primeros y más importantes creadores: John F. Nash, John C. Harsanyi y Reinhard Selten. Este premio podemos considerarlo como un símbolo de la importancia que actualmente tiene el pensamiento estratégico en la Economía.

A pesar de que sí hay antecedentes en la Teoría Económica sobre la reacción de los agentes económicos y su interacción, la economía tradicional se ha basado, casi exclusivamente, en perspectivas provenientes de la competencia perfecta y el monopolio, situaciones que excluyen el problema de la competencia. Tanto en la competencia perfecta como en el monopolio, el mercado está en equilibrio y no hay amenazas de entrada de nuevos competidores, de guerra de precios, de nuevas tecnologías o de nuevas políticas gubernamentales, ni interacciones entre las reacciones y decisiones de los participantes en condiciones estáticas a corto plazo. La evolución de las estructuras de mercado hacia la libre competencia, el lento pero progresivo proceso de globalización a todos los niveles (económico, político, legal...), la posibilidad de resultados alternativos posibles dependiendo de entornos probables (consideración del riesgo asociado a un proceso de decisión), los distintos grados de información de cada agente económico implicado sobre las condiciones del mercado han puesto de manifiesto la necesidad de estudiar situaciones en las que los participantes tratan de «negociar» un reajuste de algunos de sus intereses comunes y antagónicos que les beneficie mutuamente; esto es, tratan de determinar su comportamiento estratégico adecuado a la nueva situación del entorno. Con el desarrollo de la Teoría de Juegos por los autores distinguidos con el Premio Nobel de Economía en 1994 se ha creado un instrumento matemático adecuado para representar y analizar aquellas situaciones en la que los participantes toman sus decisiones teniendo en cuenta las reacciones de sus posibles competidores, que a su vez actúan considerando las reacciones de los demás (comportamiento estratégico).

Los fundamentos de la Teoría de Juegos fueron expuestos por John von Neumann y Oskar Morgenstern, quienes en 1928 demostraron **el teorema del minimax**, quedando establecido el tema con la publicación en 1944, de su libro *The Theory of Games and Economic Behavior*[1].

Nash[2] distinguió entre juegos cooperativos, en los que existen acuerdos que se cumplen, y no cooperativos, donde no los hay. El equilibrio de Nash se refiere al equilibrio de juegos no cooperativos, en los que los jugadores tiene información completa, tanto de las consecuencias de la elección de una estrategia (pagos) como de las estrategias de los participantes.

Selten[3] desarrolló los aspectos dinámicos. Este autor ha trabajado suponiendo que las distribuciones de probabilidad asociadas a los distintos entornos en los que se puede desarrollar el juego son conocidas, analizando también juegos con probabilidad de errores en el juego y su impacto en el equilibrio.

---

1. NEUMANN, J., and MORGENSTERN, O., *The Theory of Games and Economic Behavior,* Pricenton University Press, 1944.
2. NASH, J., «Equilibrium Points in n-Person Games», *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 34 (1950) 48-49.
3. SELTEN, R., *Models of Strategic Rationality,* Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, 1982.

Harsanyi[4] considera situaciones en las que no se conocen completamente las consecuencias de la elección de una estrategia o incluso las mismas estrategias, es decir, juegos con información incompleta.

El problema de negociación puede analizarse bajo dos enfoques claramente diferenciados: el enfoque no cooperativo y el enfoque cooperativo. En el primer caso, el objetivo es encontrar predicciones teóricas de qué acuerdos, si existen, se alcanzarán. El proceso de negociación se describe como un juego no cooperativo, cuya forma extensiva viene determinada por el procedimiento y el contexto de cada negociación. Para determinar el resultado del proceso de negociación se aplica un concepto de equilibrio, siendo el equilibrio de Nash el concepto de solución más importante para este tipo de juegos. Sin embargo, aunque todo juego finito posee al menos un equilibrio de Nash, esta solución presenta dificultades con respecto al número de puntos de equilibrio, con respecto a la forma en que tales equilibrios podrían estar relacionados y con el hecho de que el resultado que proporciona el punto de equilibrio pueda no ser eficiente (Pareto-óptimo). Estas debilidades del equilibrio de Nash sugieren una posibilidad de cooperación entre los jugadores, de forma que se garantice un resultado mejor que el que puedan obtener de forma independiente. Bajo este enfoque cooperativo se han propuesto diferentes conceptos de solución, algunos de los cuales quedarán expuestos en este artículo.

El trabajo se ha organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta la formulación del juego cooperativo. La sección 3 se dedica a la racionalidad de los participantes o jugadores. En la sección 4 se analizan distintos conceptos de solución propuestos, en concreto el concepto de solución de von Neumann-Morgenstern y el valor de Shapley. El trabajo finaliza con una sección dedicada a las conclusiones.

II. JUEGOS COOPERATIVOS

En los juegos cooperativos se parte de que es posible que algunos jugadores puedan llegar a acuerdos vinculantes (a los que quedarían obligados de manera ineludible), por lo que trata de estudiar los

4. HARSANYI, J., «Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players», partes I, II and III. *Magement Science,* 14 (1967) 159-182, 320-334, 486-502.

resultados que puede obtener cada una de las coaliciones de jugadores que se puedan formar. Se trata, por tanto, de estudiar cómo pueden actuar grupos de jugadores, interesándonos los comportamientos colectivos sin necesidad de detenernos en las acciones individuales de cada miembro de una coalición.

Sea *J* un juego finito de *n* jugadores, que representamos:

$$J = \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$$

Sea *P(J)* el conjunto de las partes de *J*, que está formado por cada una de las posibles coaliciones que se pueden formar, incluyendo el elemento conjunto vacio Ø (coalición sin jugadores).

Supongamos que los pagos o utilidades de los jugadores son transferibles, lo que supone que las ganancias o pérdidas obtenidas por la coalición *S* pueden repartirse entre los jugadores que la componen.

Se denomina función característica a una función que asigna a cada coalición un número real, asignando al conjunto vacío el valor cero.

$$\begin{aligned} v : P(J) &\rightarrow R \\ S &\rightarrow v(S) \end{aligned}$$

verificando $v(\varnothing) = 0$

v(S) es el valor de la coalición *S* y es igual a la cantidad mínima que puede obtener la coalición si todos sus miembros se asocian y juegan en equipo.

Por tanto, *G=(J,v)* es un juego en forma coalicional o en forma de función característica con pagos transferibles si *J* y *v* están especificados.

En función de la relación entre los valores de las distintas coaliciones podemos hablar de los siguiente juegos cooperativos:

Juegos cooperativos monótonos, si al crecer el número de jugadores que forma una coalición se cumple que el beneficio o ganancia que obtiene la coalición no diminuye. Es decir:

Se dice que un juego *G=(J,v)* es monótono si $\forall\ S, T \subset J$, con $S \subset T$, se verifica que

$$v(S) \leq v(T)$$

Juegos cooperativos superaditivos, si dos coaliciones, *S* y *T* que no tienen ningún jugador en común, se unen el valor de la nueva coalición $(S \cup T)$ es al menos igual a la suma de los valores de las coaliciones que se unen.

Se dice que un juego *G=(J,v)* es superaditivo si $S, T \subset J$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

Si, por el contrario, el valor de la nueva coalición es, como mucho la suma de los valores de las coaliciones que se unen, se dice que el juego es subaditivo.

Para muchos juegos cooperativos la descripción más natural es la forma de la función característica. Supongamos un juego n-personal, en el que cada jugador elige una de sus diferentes alternativas y como consecuencia de estas elecciones, se obtiene un resultado: un pago para cada participante. Una vez que se ha planteado así el juego (forma normal) podemos preguntarnos qué pasaría si una coalición de jugadores, a la que denominamos *S*, decide actuar al unísono para conseguir el máximo pago conjunto que les permita el juego y cuál sería la cuantía de dicho pago conjunto. Este problema es realmente el mismo al que nos enfrentamos en los juegos bipersonales. Los miembros de *S* constituyen, de hecho un solo jugador, pudiendo calcular el máximo pago posible, suponiendo que el resto de los jugadores que no están en la coalición actúan hostilmente contra ella. A esta cifra es lo que hemos denominado *v(S),* valor de la coalición *S*. De forma análoga se puede calcular el valor de cualquier coalición.

Este procedimiento sigue planteando la misma cuestión que en los juegos bipersonales: ¿los jugadores excluidos de la coalición tratarán realmente de minimizar los pagos de *S*?. La respuesta de Neumann-Morgenstern [5] es la misma que daban en los juegos bipersonales: lo harán si el juego es absolutamente competitivo. Por este motivo, Neumann-Morgenstern suponen que el juego de n personas es de suma cero, esto es, si al valor de cualquier coalición *S* se le añade el valor de la coalición compuesta por el resto de los participantes no

5. NEUMANN, J. von, y MORGENSTERN, O., o.c.

incluidos en *S*, la suma será siempre la misma. Si se forman más de dos coaliciones, la suma de los valores de cada una podrá disminuir, pero nunca aumentará.

III. RACIONALIDAD INDIVIDUAL

Cuando nos enfrentemos por primera vez con un juego de *n* personas, el primer impulso consiste en buscar la mejor estrategia (o el mejor conjunto de estrategias) para cada jugador y encontrar el pago que cabe esperar obtengan un grupo de jugadores inteligentes, que, en resumen, es lo que hacemos en los juegos bipersonales de suma cero al aplicar una teoría determinada. Formalmente, si *G=(J,v)* es un juego en su forma función característica, en donde *J*={1,2,......,n} es el conjunto de jugadores y *v* es la función característica, de forma que si los jugadores deciden cooperar, el problema consiste en cómo repartir el valor *v(J)* entre los *n* jugadores.

Pero este objetivo es demasiado ambicioso. Hasta los juegos cooperativos más elementales son demasiado complejos para permitir un solo pago. Supongamos, por ejemplo, tres empresas, A, B y C, cuyo valor contable es de un millón de euros. Imaginemos que dos de ellas, o las tres, pueden formar una coalición. Si se formase esta coalición, el grupo valdría 9 millones de euros más, es decir, que la coalición de dos empresas tendría un valor contable de 11 millones de euros y la de tres de 12 millones: el millón que valía cada compañía más los 9 millones de la prima en que hemos valorado la coalición. Supondremos que las tres empresas tiene información completa y perfecta. La representación del juego en forma coalicional es

$$J=\{1,2,3\}$$

siendo 1 la empresa A, 2 la empresa B y 3 la empresa C.

La función característica es: $v: P(J) \to R$ con

$$v(\varnothing) = 0 \quad v(\{1\}) = 1 \quad v(\{2\}) = 1 \quad v(\{3\}) = 1 \quad v(\{1,2\}) = 11$$
$$v(\{2,3\}) = 11 \quad v(\{1,3\}) = 11 \quad v(\{1,2,3\}) = 12$$

Evidentemente, queremos saber qué coalición se formará y cómo se repartirá el dinero entre los socios. Podemos observar que para cada posible coalición (AB, AC, BC, ABC) hay infinitas formas (pagos) de repartir el dinero entre los socios. No obstante, sí podemos limitar el número de pagos posibles eliminando aquellos que claramente no se materializarán en la práctica.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ un vector de distribuciones de pagos, de forma que cada x_i representa el pago que recibe el jugador i. El pago de una coalición $S \subset J$ será

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

En primer lugar, vamos a considerar como posibles vectores de distribuciones de pagos del juego aquellos vectores que cumplan el principio de eficiencia, denominándolos preimputaciones y siendo su notación *PI(J,v)*. Es decir, el conjunto de preimputaciones está formado por todos los vectores de distribuciones de pagos que verifican que la suma de los pagos que reciben los jugadores es igual al valor de la coalición total:

$$PI(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J)\}$$

En nuestro ejemplo:

$$PI(J,v) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 12\}$$

En segundo lugar, el pago final que recibe cada jugador debe ser individualmente racional, es decir, ningún jugador aceptará un pago inferior al que obtendría por sí mismo sin participar en ninguna coalición.

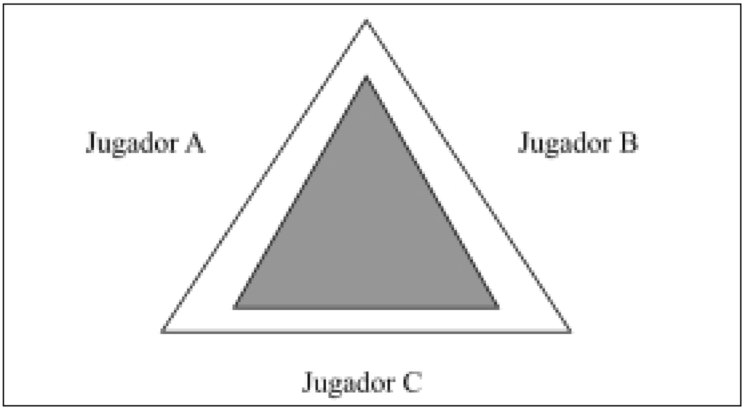
El conjunto de vectores de distribuciones de pagos que verifican el principio de eficiencia y el principio de racionalidad individual recibe el nombre de conjunto de imputaciones, que notamos por *P(J,v)*, siendo:

$$P(J,v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x(J) = v(J),\ x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

En nuestro ejemplo:

$$P(J,v) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 12;\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_2 \geq 1\}$$

Si n = 3 podemos representar gráficamente el conjunto de imputaciones en el plano gracias a una propiedad geométrica de los triángulos equiláteros [6], en los que la suma de las distancias de cualquier punto interior hasta los tres lados es la misma. El conjunto de imputaciones de nuestro ejemplo podemos representarlo mediante los puntos interiores de un triángulo equilátero que estén separados al menos 1 punto de cada lado. El la figura 1 las imputaciones son todos los puntos que pertenecen a la zona sombreada.



IV. CONCEPTOS DE SOLUCIÓN PARA JUEGOS COOPERATIVOS

4.1. *Concepto de solución de Neumann-Morgenstern (N-M)*

Von Neumann y Morgenstern renunciaron desde el primer momento a encontrar un pago que resultase una solución única para todos los juegos n-personales, debido a la estructura tremendamente complicada de este tipo de juegos. Afirman que los únicos resultados razonables son determinadas imputaciones, aquellas que verifiquen una serie de principios generales comúnmente aceptados por la sociedad. De esta forma, una solución consiste no en una, sino en muchas imputaciones que tienen, en conjunto, una cierta consistencia interna. En concreto, para N-M una solución es un conjunto de imputaciones que tiene dos propiedades esenciales: 1) Ninguna

6. MORTON, D., *Introducción a la teoría de juegos,* Alianza Universidad, 4.ª ed., 1986, p. 194.

imputación que esté comprendida en la solución puede estar dominada por otra imputación que también pertenezca a la solución. 2) Cualquier imputación que no esté comprendida en la solución estará dominada por una imputación que sí esté dentro de la solución. Esta definición que proponen N-M nos lleva a considerar como solución de un juego cooperativo todas aquellas coaliciones que no puedan ser impugnadas, ya que sus correspondientes imputaciones (distribuciones de pagos eficientes) no están dominadas.

En definitiva, el concepto de solución presentado por N-M puede entenderse como una expansión del principio de racionalidad individual, que se recoge en el conjunto de imputaciones a todas las coaliciones, mediante el principio de racionalidad coalicional. Los pagos son coalicionalmente racionales cuando los miembros de cada coalición reciben un pago total por lo menos igual al que obtenían cuando estaban en una coalición más restringida. ¿Por qué iban a formar una nueva coalición jugadores que obtienen mejores resultados si permanecen en la coalición a la que actualmente pertenecen?

El conjunto de vectores de distribuciones de pagos coalicionalmente racionales (si existen) constituye el **core** del juego, cuya notación es *C(J,v)*. Así:

$$C(J,v)=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n : x(J)=v(J),\ x(S)\geq v(S)\quad \forall S\in P(J)\}$$

Podemos observar en la definición del core que es un subconjunto del conjunto de imputaciones.

Si un juego cooperativo no tiene core será inestable, ya que cualquiera que fuese la distribución de pagos, habría otra coalición que tenga el poder y motivación suficientes para impugnarlo y buscar otro resultado que le sea más ventajoso.

Si un juego cooperativo tiene core será estable, en el sentido de que existen acuerdos de distribución de pagos que ningún grupo de jugadores podría impugnar unilateralmente, ya que ningún grupo conseguirá por sí solo más de los que cualquiera de esos acuerdos le permite obtener. Ahora bien, el core puede ser un conjunto unitario (hay una única solución) o bien puede estar formado por varios elementos (existen varias soluciones).

Ilustraremos con un caso estas tres posibilidades: el core es vacio, el core es unitario y el core es no vacio y no unitario.

Tres empresas de construcción, que denominaremos X, Y, Z, respectivamente, reciben la propuesta de realizar conjuntamente una urbanización de lujo. El beneficio neto estimado de este proyecto es una cantidad *A*. También cabe la posibilidad de que la unión temporal la formen sólo dos de las tres empresa; en este caso el beneficio neto estimado es *B*, cumpliéndose $0 \leq B \leq A$. La representación del juego en forma coalicional es

$$J=\{1,2,3\}$$

siendo 1 la empresa X, 2 la empresa Y y 3 la empresa Z.

La función característica es: $v : P(J) \to R$ con

$$v(\emptyset)=0 \quad v(\{1\})=0 \quad v(\{2\})=0 \quad v(\{3\})=0 \quad v(\{1,2\})=B$$
$$v(\{2,3\})=B \quad v(\{1,3\})=B \quad v(\{1,2,3\})=A$$

Vamos a definir el core del juego. Para ello, además de definir los puntos que cumplen el principio de eficiencia (preimputaciones) y el principio de racionalidad (imputaciones), hay que encontrar las condiciones que deben cumplir los valores *A* y *B* para que se cumplan las restricciones correspondientes a la racionalidad de las coaliciones.

Pertenecerán al core los puntos (x_1,x_2,x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

$$x_1+x_2+x_3=A \text{ (principio de eficiencia)}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \text{ (principio de racionalidad individual)}$$

$$x_1 + x_2 \geq B,\ x_1 + x_3 \geq B,\ x_2 + x_3 \geq B$$

(racionalidad para las coaliciones formadas por dos jugadores)

Teniendo en cuenta la restricción $x_1+x_2+x_3=A$ (principio de eficiencia) se tiene que:

$$x_1 + x_2 \geq B \iff A - x_3 \geq B \iff x_3 \leq A - B$$
$$x_1 + x_3 \geq B \iff A - x_2 \geq B \iff x_2 \leq A - B$$
$$x_2 + x_3 \geq B \iff A - x_1 \geq B \iff x_1 \leq A - B$$

Por tanto el core es:

$$C(J,v)=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 : x_1+x_2+x_3=A,\ 0\leq x_i \leq A-B \quad \forall i=1,2,3\} =$$
$$=\{(x_1,x_2,A-x_1-x_2)\in R^3 : 0\leq x_1\leq A-B,\ 0\leq x_2\leq A-B,\ B\leq x_1+x_2\leq A\}$$

Dependiendo de las expresiones anteriores que definen el core y de valores de A y B, llegamos a las siguientes situaciones:

1. Si (*A*-*B*)+(*A*-*B*)= *B* (es decir, 2 *A*= 3*B*), entonces el core es unitario, obteniendo que *C(J,v)*={(A-B, A-B,2B-A)}. La representación gráfica está el la figura 2.

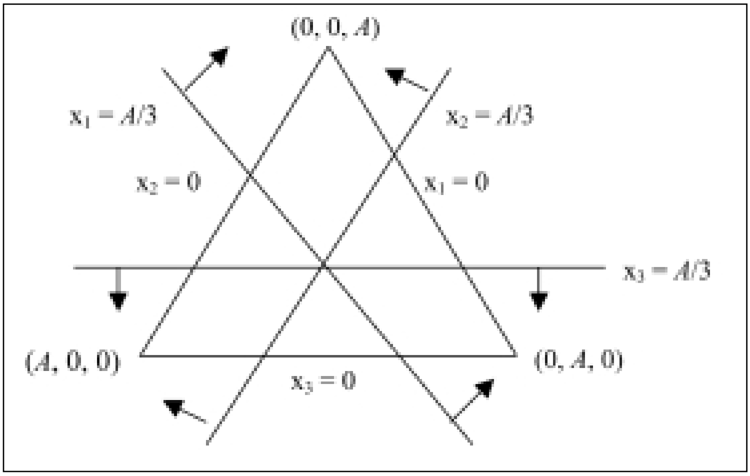


Figura 2

2. Si (*A*-*B*)+(*A*-*B*) < *B* (es decir, 2 *A* < 3*B*), entonces el core es vacío. La representación está en la figura 3.

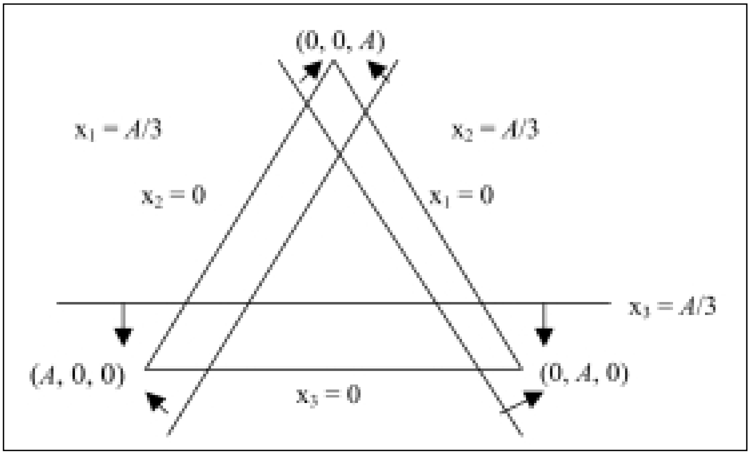


Figura 3

3. Si (es decir,), entonces el core es no vacio, no unitario. La representación está en la figura 4.

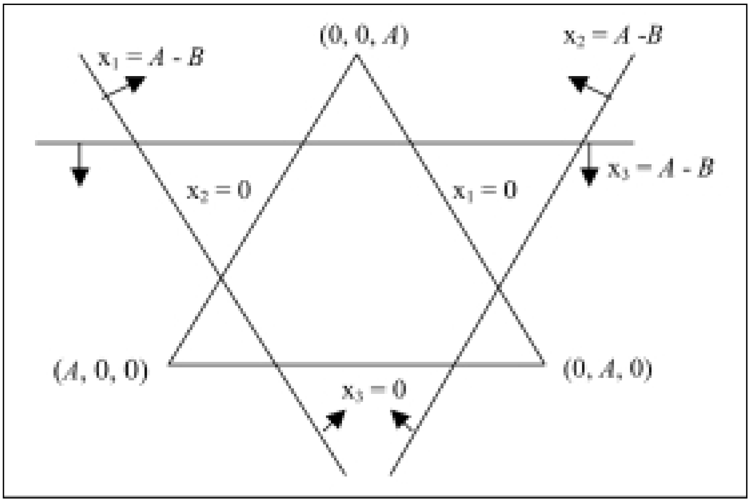


Figura 4

En general, puede haber muchas soluciones diferentes para un juego n-personal concreto (core no vacío, no unitario) sin que N-M traten de encontrar la que sea «la mejor», aunque sí que consideran crucial la cuestión de si siempre existen soluciones, es decir, si el core es un conjunto no vacío.

4.2. *Concepto de solución de Shapley*

El concepto de solución de Shapley [7] para juegos cooperativos es, a diferencia de los anteriormente expuestos, de carácter normativo. Se trata de buscar una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados requisitos previamente establecidos, que se denominan axiomas. Shapley contempló el juego desde el punto de vista de los jugadores y trató de contestar a la

7. SHAPLEY, L. S., «A value for n-Person Games». En KUHN, Tucker (ed.) I, *Contributions to the Theory of Games* II, 1953, pp. 307-317, Princeton, New Yeersey, Princeton University Press.

siguiente cuestión: dada una función característica de un juego, ¿cuál es el valor del mismo para un jugador individual? Predecir el resultado de un juego n-personal basándose únicamente en la función característica parece, como hemos visto en los apartados anteriores, arriesgado. La personalidad de los jugadores, su entorno, las costumbres sociales, las facilidades de comunicación ..., son circunstancias que tienen efecto sobre el pago final. Shapley exige que la función de distribución de pagos verifique una serie de requisitos o axiomas postulados sobre el conjunto de factores importantes (distintos de la función característica) que considera tiene efecto sobre el pago final.

Sea $G=(J,v)$ un juego en forma coalicional, en donde $J=\{1,2,..n\}$. Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots\ldots, \phi_n(v)) \in R^n$$

La función de asignación de pagos debe cumplir los siguientes axiomas [8]:

Axioma 1. Eficiencia. La función de asignación debe distribuir el pago total del juego:

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(v) = v(J)$$

Axioma 2. Simetría. Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, esto es, que verifiquen:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})\ \forall S \in P(J),\ \text{con } i,\ j \notin S$$

debe ser:

$$\phi_i(v) = \phi_j(v)$$

Axioma 3. Tratamiento del jugador pasivo. Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de jugadores no debe recibir ningún pago adicional. Es decir, para cada jugador $\in$ para el que se verifique:

$$v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})\ \ \text{para toda coalición } S \text{ con } i \in S$$

8. PÉREZ, J., y JIMENO, J. L., «Cerdá», *Teoría de Juegos*, Madrid 2003, Prentice Hall, p. 490.

debe ser:

$$\phi_i(v) = v(\{i\})$$

Axioma 4. Aditividad. La función de asignación ϕ debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Dados dos juegos cualesquiera $G=(J,v_1)$ y $G=(J,v_2)$ debe ser

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$

Existe una única asignación $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \ldots\ldots\ldots, \phi_n(v))$ que verifique simultáneamente los cuatro axiomas y recibe el nombre de **valor de Shapley**. Este valor se calcula de la siguiente manera:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in P(J)} q(s)\left[v(S) - v(S - \{i\})\right]$$

donde $q(s) = \dfrac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ y $s = |S|$ el número de jugadores que hay en la coalición *S*.

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar, puesto que el factor *v(S)-v(S-{i})* es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a *S-{i}*, mientras que el factor *q(s)* es la probabilidad de que a *i* le toque incorporarse precisamente a *S-{i}*.

5. Conclusiones

En este trabajo se pone de manifiesto que la cooperación entre los participantes en los juegos n-personales permiten tratar estos juegos como problemas de negociación.

Podemos llegar a un concepto de solución mediante un enfoque axiomático (valor de Shapley) o bien mediante un enfoque no axiomático (el core de un juego n-personal de N-M). En ambos enfoques, se utiliza la función característica para plantear el juego, pero se abordan de forma distinta. El enfoque normativo contempla el juego desde el punto de vista del jugador y, por tanto, trata de buscar el valor del juego para ese jugador con independencia de a qué coalición pertenezca. Este valor viene determinado por la asignación de pagos que verifique un conjunto de requisitos establecidos previamente. En el enfoque no axiomático la solución se centra tanto en predecir las coaliciones más apropiadas que se formarán, como en la distribución de los pagos entre los miembros de dichas coaliciones. En este caso puede no existir solución, existir y ser única, o existir pero no ser única.

VI. BIBLIOGRAFÍA

GARCÍA, J.; MARTÍNEZ, E.; REDONDO, R., y CAMPO, C., *Métodos de Decisión*, Madrid 2002, Prentice Hall.

GIBBONS, R., Un primer curso de teoría de juegos, Barcelona 1992, Antoni Bosch editor.

HARSANYI, J., «Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players», Parts I, II and III, *Magement Science*, 14 (1967) 159-82, 320-34, 486-502.

MÁRMOL, A. M.; MONROY, L., y RUBIALES, V., *Juegos finitos n-personales como juegos de negociación.* XI Jornadas de ASEPUMA. Oviedo 2003.

MORTON, D., *Introducción a la teoría de juegos*, Alianza Universidad, cuarta edición, 1986, p. 194.

NASH, J., «Equilibrium Points in n-Person Games», *Procedings of the National Academy of Sciences*, 34 (1950) 48-49.

NEUMANN, J., and MORGENSTERN, O., *The Theory of Games and Economic Behavior*, Pricenton University Press, 1944.

PEREZ, J.; JIMENO, J. L., y CERDÁ, E., *Teoría de Juegos*, Madrid 2003, Prentice Hall.

SELTEN, R., *Models of Strategic Rationality*, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher 1982.

SHAPLEY, L. S., «A Value for n-Person Games», en KUHN, Tucker (ed.), *Contributions to the Theory of Games* II, pp. 307-317, Princeton, New Yersey, Princeton University Press.

THOMSON, W., «Cooperative Models of Bargaining», R. J. Aumann y S. Hart (eds.), *Handbook of Game Theory*, vol. II, 1994, pp. 1238-1277.

VEGA-REDONDO, F., *Economía y Juegos*. Barcelona 2000, Antoni Bosch, editor.