Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional[1]

Pre calculus course in using supported geogebra for the development of variational thinking

Curso de pré cálculo apoiado no uso de geogebra para o desenvolvimento do pensamento variacional

Fecha de recepción: enero de 2014
Fecha de aceptación: julio de 2014

Jorge Enrique Fiallo Leal[2]
Sandra Evely Parada Rico[3]

Resumen

En este artículo se presentan los resultados iniciales del diseño, experimentación y evaluación de un curso de precálculo**,** planteado como una alternativa preventiva para afrontar la problemática actual de deserción y repitencia en los curso de Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander. El propósito principal de dicho curso es aportar herramientas para desarrollar en estudiantes de primer nivel universitario su "pensamiento variacional"**,** con el fin de favorecer en ellos un nivel matemático pertinente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial. El trabajo en el aula está orientado al trabajo activo de los estudiantes en un proceso de resolución de problemas, en el que se involucre el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones y la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos, alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo Diferencial: la variación y la acumulación.

Palabras clave: precálculo, cálculo, acumulación, pensamiento variacional, GeoGebra.

Abstract

We present initial results of the design, experimentation and evaluation of a course in pre-calculus, proposed as a preventive alternative to confront problematic present of desertion and repetition in the Differential Calculus course at the Industrial University of Santander. The main purpose of this course is to provide tools to develop in students their first university level its "variational thinking" with the purpose of favoring in them pertinent a mathematical level to the exigencies of the course of

1 Artículo de investigación.

2 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: jfiallo@uis.edu.co

3 Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombia). Contacto: sparada@uis.edu.co

Differential calculus. The classroom work is oriented to the active work of the students in a process of problem solving, in which the reasoning, communication, representation, connections and technology as key to the production of meaningful learning involves around of the two central ideas of differential calculus: variation and accumulation.

Keywords: Precalculus, calculus, accumulation, variational thinking, GeoGebra.

Resumo

Apresentamos resultados iniciais do desenho, experimentação e avaliação de um curso de pré-Cálculo, proposto como uma alternativa preventiva para enfrentar a problemática atual de deserção e repetência nos curso de Cálculo Diferencial na Universidade Industrial de Santander. O propósito principal de dito curso é contribuir ferramentas para desenvolver em estudantes de primeiro nível universitário seu "pensamento variacional", com o fim de favorecer neles um nível matemático apropriado às exigências do curso de Cálculo Diferencial. O trabalho no sala está orientado ao trabalho ativo dos estudantes num processo de resolução de problemas, no que se envolva o razonamiento, a comunicação, a representação, as conexões e a tecnologia como chaves para a produção de aprendizagens significativas, ao redor das duas ideias centrais do Cálculo diferencial: a variação e a acumulação.

Palavras-chave: pré-cálculo, cálculo, acumulação, pensamento variacional, GeoGebra.

Introducción

> *El Cálculo es un edificio intelectual enorme, articulado alrededor de dos ideas centrales: acumulación y variación*
>
> Ímaz y Moreno (2010)

El Cálculo Diferencial es uno de los cursos que representa una de las mayores problemáticas en los estudiantes universitarios debido a múltiples razones, entre ellas, a la falta de los conceptos previos necesarios para el inicio del curso y la dificultad que se presenta en los estudiantes para comprender los conceptos fundamentales. Al respecto, Hitt (2005) plantea que el Cálculo reúne una cantidad de conceptos que están íntimamente relacionados, y el manejo pobre de algunos subconceptos impide el desarrollo profundo de temas de Cálculo como límites, continuidad derivada e integral. Hitt señala algunas de las dificultades que tienen los estudiantes y algunos profesores de educación media para desarrollar un entendimiento profundo de estos conceptos. La dificultad respecto al concepto de función obedece a que, generalmente, se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en su comprensión. En general, las tareas de conectar diferentes representaciones de un concepto no son tenidas en cuenta por muchos profesores como algo fundamental en la construcción del conocimiento matemático. Por otra parte, aunque en los documentos orientadores del currículo matemático, tanto a nivel internacional (NCTM, 2003) como a nivel nacional (MEN, 1998, 2003, 2004, 2006), se propone que, además de los contenidos, se deben desarrollar procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la demostración, las representaciones, la comunicación y las conexiones, en las instituciones escolares de básica y media, los profesores siguen centrando su enseñanza en el aprendizaje de contenidos y algoritmos para la solución de ejercicios.

Ímaz y Moreno (2010) señalan que los libros de texto actuales de Cálculo Diferencial se han dedicado a proponer una especie de *análisis light*, con un exceso en el rigor que proviene de una concepción de la matemática moderna de hace más de cuatro décadas. En estos libros, los autores se preocupan por presentar las demostraciones de los teoremas más importantes del Cálculo Diferencial, pero no se realiza ninguna discusión sobre la comprensión de dichos conceptos y el proceso de demostración. Así, en los libros de texto se hacen intentos por explicar cada regla, lo que da a entender que el único objetivo es deducir la regla en elaboración para practicar con ejercicios, en lugar de utilizar las explicaciones como una herramienta de pensamiento. Las explicaciones son muy cortas con aspectos esenciales del razonamiento formal, por lo que los estudiantes deben acudir a los profesores para comprenderlas, pero el material proporcionado requiere profundización en el conocimiento matemático y pedagógico del contenido por parte de los profesores.

Como una alternativa de solución a la problemática, en varias universidades se ha propuesto el desarrollo de un curso de precálculo, enfocado al repaso de los conceptos, procedimientos y algoritmos necesarios en el curso de Cálculo Diferencial, generalmente repaso de temas como: conjuntos y operaciones, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, trigonometría, geometría analítica, funciones y límites, sin tener en cuenta las orientaciones dadas para el desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 2004), ni el uso de las tecnologías digitales. Es por ello que el curso de precálculo que se plantea en esta investigación, se propone como una alternativa preventiva para atender la problemática de repitencia y deserción referente a la materia Cálculo Diferencial, de las carreras de ingenierías y ciencias de la Universidad. El propósito principal del curso es desarrollar "pensamiento variacional", relacionado con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En esta dirección, Vasco (2003) expresa que "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que cavarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad" (p. 6).

A diferencia de un curso tradicional de precálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y su objetivo principal apunta al repaso de los preconceptos necesarios para el curso de Cálculo Diferencial, o de los conceptos vistos en la secundaria. En este curso se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software. Proveer a los estudiantes de representaciones dinámicas sobre ideas centrales de Cálculo, como la variación y la acumulación, puede generar en ellos un pensamiento dinámico que contribuye a la construcción de significados de las ideas estudiadas y sentar las bases necesarias para afrontar con éxito el curso de Cálculo Diferencial.

Se presentan en este artículo algunas consideraciones teóricas y metodológicas, como también algunos resultados obtenidos del diseño, experimentación y evaluación de un curso de precálculo con un enfoque de resolución de problemas de variación y acumulación, apoyado en el uso de GeoGebra como una herramienta cognitiva que ayuda al desarrollo del pensamiento variacional.

Marco conceptual

para la construcción de un marco conceptual que sustente esta propuesta, se presentan algunas investigaciones que dan cuenta de los errores y dificultades que se han detectado en el área, algunas sugerencias planteadas por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2004), por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003) y algunos elementos teóricos propuestos para la construcción de un marco conceptual de un enfoque de resolución de problemas que incorpore el uso de las tecnologías digitales (Santos-Trigo y Moreno, 2013).

Respecto a las dificultades, Artigue (1998) reseña las investigaciones que muestran que las concepciones que tienen los estudiantes de los números reales, no son apropiadas para el aprendizaje de Cálculo, los estudiantes tienen dificultad para distinguir los diferentes conjuntos numéricos debido a la dependencia de las representaciones semióticas. En cuanto a las funciones, señala la dificultad que tienen los estudiantes para identificar lo que es realmente una función y el reconocimiento de las sucesiones como funciones; las dificultad para sobrepasar una concepción de función como proceso y la dificultad de relacionar la función como objeto y como proceso; la dificultad de relacionar los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones, y la dificultad para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico. Respecto a las dificultades con el concepto de límite, se destacan las investigaciones que señalan los obstáculos epistemológicos de los estudiantes, debido al sentido común de la palabra límite, que lleva a la concepción de límite como algo infranqueable o como último término de un proceso, o tienden a restringir la convergencia a la convergencia monótona; la sobregeneralización de procesos finitos a procesos infinitos, la fuerza de una geometría de las formas que impide que identifiquen claramente los objetos involucrados en el proceso de límite y su topología subyacente, haciendo difícil entender la sutileza entre el juego de marcos numéricos y geométricos.

Cantoral y Farfán (1998) plantean que "El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional entre los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico. Esa ruptura además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación; sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se precisa entre otras cosas del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende".

A pesar de los estudios documentados por Artigue (1998) y los planteamientos realizados por Cantoral y Farfán (1998), se sigue observando en las aulas que "la instrucción" de dichos objetos matemáticos siguen estudiándose con un enfoque tradicional

—manejo algebraico y algorítmico—, de manera estática y con problemas rutinarios. Por ejemplo, para estudiar funciones, maestros y alumnos usan regularmente la definición estática de conjuntos, tablas y fórmulas, lo que conlleva a dificultades de interpretación de situaciones que no permiten ver los aspectos que desean verse con relación a la "variación". Al respecto, Carabús (2002) menciona que si el alumno concibe la función solamente como una correspondencia, no pone en juego su pensamiento y lenguaje variacional. En este sentido, el pensamiento variacional implica que el estudiante sea capaz de reconocer los valores que puede tomar una variable en cierto intervalo, así mismo necesita explorar cómo varía la función en dicho intervalo. López y Sosa (2008) enfatizan en que la forma como se trabajan estos conceptos no favorece la construcción de conceptos asociados con la funcionalidad del concepto; así mismo, mencionan que para evitar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en estos temas se requiere proveer experiencias de modelación y visualización que permitan explicar fenómenos de carácter variacional.

En el documento *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales* del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2004), se plantea que:

> El estudio de procesos de variación y cambio constituye uno de los aspectos de gran riqueza en el contexto escolar. El énfasis actual en la educación matemática orientado hacia el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas significativas para los estudiantes, hacen del estudio de la variación y el cambio con mediación de herramientas tecnologías computacionales gráficas y algebraicas un campo de acción y formación potente en la educación matemática. Lo que se debe desarrollar es una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos (p. XXV).
>
> Se podría caracterizar el pensamiento variacional como la capacidad que tiene el estudiante para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas (p. 17).

En los principios y estándares del NCTM (2003, p. 300), se señala que:

> Los programas de enseñanza de todas las etapas, deberían capacitar a todos los estudiantes para: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para analizar y comprender relaciones cuantitativas y analizar el cambio en contextos diversos.

Uno de los caminos para lograr la construcción del pensamiento variacional es mediante la resolución de problemas que promuevan el análisis de situaciones de variación y cambio a través de diferentes sistemas de representación: numérico, gráfico, algebraico y verbal. La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones. Para lograr esto, se pueden proponer diferentes representaciones de una situación de cambio para que sean contextualizados e interpretados por los estudiantes. También se deben plantear problemas para que el estudiante pueda producir una representación a partir de otra.

Lo anterior es posible mediante la presentación de simulaciones a los estudiantes o mediante la petición de producir una simulación a partir de las representaciones (MEN, 2004). Para el logro de estas metas, el uso de las tecnologías digitales ha sido incorporado en diferentes proyectos o programas académicos, logrando que los problemas o tareas matemáticas tengan un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Se deben plantear problemas que permitan el cambio de una representación a otra haciendo énfasis en sus conexiones. En este sentido, GeoGebra se convierte en una herramienta poderosa, dado que se constituye en un laboratorio de experimentación, análisis, conjeturación, comprobación y conexión de las diferentes representaciones.

Con el objetivo de lograr la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales, Santos-Trigo y Moreno (2013) plantean elementos de un marco conceptual que caracteriza las fases que sustentan el uso de las herramientas en la resolución de problemas, destacando entre sus componentes el acercamiento visual y empírico, la representación funcional, la búsqueda de diversos caminos para la construcción de un modelo algebraico que incluya métodos analíticos y geométricos, y la relevancia de contrastar los procesos y las estrategias utilizados en los diversos acercamientos.

Estos elementos y fases, están planteados, de manera implícita, en las sugerencias dadas en el documento del pensamiento variacional y tecnologías computacionales (MEN, 2004), en donde se recomiendan los siguientes momentos que se implementarán y profundizarán de acuerdo con el nivel del desarrollo cognitivo de los estudiantes y con los logros que se pretendan alcanzar:

- Observación de la simulación del fenómeno: descripción, predicción, verificación.
- Aproximación al tipo de gráfica que se producirá al relacionar las magnitudes que varían.
- Registro de los datos en una tabla y análisis de la información suministrada.
- Visualización de la gráfica formada por el conjunto de valores registrados y análisis de la misma.
- Relación entre los registros —tabular y gráfico—.
- Aproximación a la expresión algebraica que mejor relaciona las variables.
- Cálculo de regresión.
- Análisis de la función y de su relación con el fenómeno en estudio.
- Otras extensiones al estudio de la función: construcción geométrica de la derivada, análisis de la derivada, cálculo de la derivada, interpretación (MEN, 2004, p. 32).

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, el curso de precálculo se diseña como una alternativa preventiva que permita abordar la problemática de deserción y repitencia de los estudiantes del curso de Cálculo Diferencial. Lo que se debe desarrollar es una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de variación y cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos. Hay que partir de lo que el estudiante sabe y plantear tareas que involucren los conceptos e ideas fundamentales del Cálculo. Intentar resolver en un curso de precálculo lo que el estudiante no aprendió en la escuela es un método que generalmente fracasa (Moreno, 2012).

Aspectos metodológicos

Para poner en funcionamiento lo expuesto en los dos apartados anteriores, se planteó el diseño, desarrollo y análisis de resultados de un curso de precálculo, dirigido a 300 estudiantes de primer semestre de 2013 de las carreras de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander, que obtuvieron los resultados más bajos en una prueba de caracterización. Este proyecto requirió de tres momentos que se presentan a continuación.

Fase I. Diseño de las actividades

El diseño de actividades estuvo orientado a promover en el aula un proceso activo de resolución de problemas que involucran razonamiento, comunicación, representación, conexiones y el uso de la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos alrededor de las dos ideas centrales de Cálculo: la variación y la acumulación. La puesta en marcha de las actividades pretende proveer a los estudiantes de herramientas, que les permitan responder favorablemente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial. Los criterios generales del diseño de las actividades fueron:

- Problematizar los contenidos de estudio de Cálculo con situaciones del contexto —un problema para cada sesión—.
- Generar espacios donde los estudiantes trabajen como si fueran matemáticos, mediante la introducción de diferentes conceptos de Cálculo en el contexto de resolución de problemas.
- Hacer uso de la tecnología en todas las sesiones mediante el trabajo en computadores y con el apoyo de GeoGebra.

La componente didáctica para el diseño de las actividades, consistió en una reinterpretación de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, que dieron lugar a las siguientes pautas para su diseño:

1. Fase de información y exploración libre: al inicio de la actividad se plantea el problema relacionado con la temática a estudiar, para que el estudiante lo intente resolver de manera individual o en parejas, sin el uso del software. La idea fundamental de esta actividad consiste en que el estudiante utilice sus conocimientos escolares para resolver el problema de manera intuitiva y logre tener una aproximación a la solución. En esta fase se espera que el estudiante identifique la necesidad de utilizar nuevos conceptos, de aclarar conceptos vistos en el bachillerato y que el profesor identifique las principales dificultades conceptuales y los errores generales de los estudiantes.

2. Fase de socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior: en esta fase el profesor promueve la participación de los estudiantes para que comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, se aclaren las dudas y, principalmente, se corrijan los errores, se repasen conceptos y se promueva la necesidad de ofrecer una solución matemáticamente válida al problema planteado.

3. Fase de exploración dirigida: en esta fase se parte de la exploración de un archivo en GeoGebra para que, a través de la exploración y de la orientación guiada por preguntas, el estudiante usando las diferentes herramientas del software, vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados visualizados en las diferentes representaciones que ofrece el software, a través de sus diferentes vistas —algebraica, hoja de cálculo, ventanas gráficas, Cálculo Simbólico - CAS, barra de entrada—. Igualmente, en esta fase se promueve que los estudiantes vean las conexiones que existen entre los conceptos trabajados y entre cada una de sus representaciones.

4. Fase de explicitación: en la actividad propuesta se sugiere la discusión con los estudiantes y con el profesor, se promueve la participación de los estudiantes para que éstos planteen sus propias soluciones y las discutan con el grupo y con el profesor. El papel del profesor debe ser la de promotor del debate, la reflexión y la discusión de las ideas expuestas, de tal manera que se llegue a la construcción del conocimiento, el cual es el objetivo de la actividad.

5. Orientación libre: se plantea un nuevo problema para aplicar lo que aprendió. Una tarea retadora, en donde el estudiante tenga que aplicar lo aprendido, pero no de manera mecánica.

Uno de los productos de esta fase fue el diseño de quince actividades con dos componentes: 1) trabajo con lápiz y papel, y 2) uso de la tecnología como medio de representación dinámica, comprobación y visualización de procesos que no son posibles de exponer con lápiz y papel. Otro producto fue la construcción de una versión de cada actividad para el estudiante y otra para el maestro. En esta última se expresa, en términos generales, la orientación de la actividad en el aula, los objetivos, el uso que se le debe dar al archivo y un análisis a priori de las posibles respuestas del estudiante. Las actividades diseñadas se titularon así: a) análisis de datos, b) números y operaciones, c) medidas, d) razones en el triángulo rectángulo, e) razones en el plano cartesiano, f) funciones trigonométricas, g) cuerdas vibrantes, h) fenómenos físicos, i) perímetro fijo-área variable, j) caja sin tapa, k) funciones por partes, l) derivada como razón de cambio, m) transformaciones de funciones y n) área fija-perímetro variable.

A manera de ejemplo, a continuación se muestra la actividad perímetro fijo–área variable, planteada al estudiante. Los comentarios que se hacen en seguida de cada actividad no van en la hoja de la actividad que se le entrega al estudiante, estos se dejan explícitos como guía para el profesor.

- **Actividad 1. Resuelve el siguiente problema en tu hoja de trabajo**

Un granjero tiene una valla de alambre de longitud 14 hectómetros para cercar un terreno rectangular, destinado a la siembra de pasto para el ganado. Si el granjero desea obtener la mayor extensión de cultivo posible ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno? Explica y justifica tu respuesta.

Comentario: en esta actividad se espera que el estudiante realice algunos cálculos numéricos —principalmente con números naturales— y dé una respuesta de valores de los lados del rectángulo entre 3 Hm y 4 Hm. La idea del número 14 es precisamente llevar al estudiante a pensar en otros conjuntos numéricos. Cuando los estudiantes discutan sus soluciones se darán cuenta que la solución no pertenece a los números naturales. Algunos estudiantes presentarán respuesta aproximadas a 3.5, pero no se atreven a decir 3.5 porque el rectángulo es un cuadrado y para ellos el cuadrado no es rectángulo. Estos procedimientos empíricos y concepciones erróneas las debe aprovechar el profesor para reflexionar sobre los conjuntos numéricos, las propiedades del rectángulo y la necesidad del uso de otros conceptos matemáticos para la resolución de problemas.

- **Actividad 2. Actividad de exploración**

Abre el archivo de GeoGebra "Perfijo_Area", mueve el punto B, explora, observa, analiza y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué magnitudes varían en esta situación?, ¿cómo varían esas magnitudes?

2. ¿Qué magnitudes permanecen constantes?

3. ¿Qué valores podrían tomar las magnitudes en observación y en qué unidades de medidas? Justifica tu respuesta.

4. ¿Qué sucede con una de las magnitudes a medida que varían las otras? Justifica tu respuesta.

5. ¿Existe alguna(s) variable(s) que dependan de otra(s)? Justifica tu respuesta.

6. Toma como variable independiente la base (lado AB) del rectángulo ABCD y asume que tiene longitud , elabora en la hoja de trabajo una tabla para algunos valores de (mínimo 10) y las áreas correspondientes a estos valores ¿Cómo halló el área?

7. Elabora en la hoja de trabajo una gráfica con los datos obtenidos en la tabla anterior.

8. ¿La gráfica obtenida sugiere una función? Si es función, ¿cuál sería esa función? Justifica tu respuesta.

9. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área?, ¿por qué?, ¿qué rectángulo es?

10. ¿Es suficiente la información obtenida hasta ahora, para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

11. Elabora una conclusión acerca de lo trabajado hasta el momento.

Comentario: en esta actividad se parte de un archivo dinámico construido en GeoGebra figura 1) para que el estudiante explore, identifique los variantes e invariantes y trate de dar una solución el problema apoyado en lo que visualiza en el archivo y lo que escribe en su hoja de trabajo.

En este punto se espera que los estudiantes identifiquen que las dimensiones de los lados del rectángulo varían, lo cual le permitirá concluir que el área del rectángulo también varía y que el perímetro sigue siendo constante. Aunque hay una dificultad ligada a este fenómeno, lo cual se debe a que los estudiantes conciben la variación al transcurrir el tiempo, pero en esta situación no es el caso. Sin embargo, ellos podrían pensar que al variar con el tiempo también lo hará. Los estudiantes deben notar que a medida que los valores aumentan de 0 a 7, los valores de disminuyen de 7 a 0. Además los estudiantes necesitan tomar conciencia del por qué no puede tomar valores menores que cero ni mayores que siete, si esto no pasa, el profesor debe plantear preguntas que le permitan identificar lo anterior descrito, preguntas cómo, ¿qué sucede si el valor de es 2 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es 4 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es 6 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es mayor que 6 Hm?

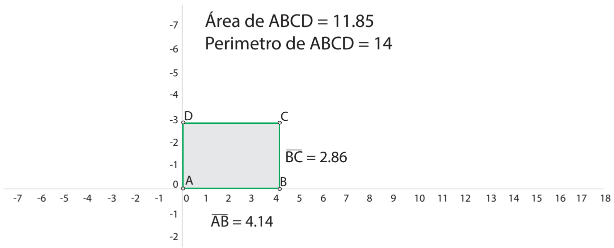

Figura 1. Imagen del archivo Perfijo-Área

Fuente: elaboración propia

Los estudiantes podrán visualizar una posible solución al problema analizando los datos numéricos y podrán tener una aproximación de la gráfica de la función que modela el problema, pero algunos todavía no podrán encontrar su expresión algebraica. Aquí se debe analizar el comportamiento analítico de la gráfica del problema y se puede aprovechar para hablar de las propiedades geométricas y analíticas de la parábola, se debe promover que los estudiantes "vean" que el rectángulo de mayor área con perímetro fijo es el cuadrado. Para esto es importante enseñarle a los estudiantes que los datos numéricos que muestra el software son apenas aproximaciones de números racionales, debe aumentar el número de cifras decimales y hablar de la limitaciones del software y de la necesidad de una justificación matemática de lo que ellos están observando, en ningún momento hay que dejarlos conformar con la justificación de que "eso es así porque ahí se ve". El profesor debe insistir en que los estudiantes justifiquen por escrito todas las respuestas que dan, con esto se están promoviendo los procesos de comunicación razonamiento y demostración.

- **Actividad 3.** Socializa con tus compañeros y el profesor las conclusiones realizadas.

Comentario: como se mencionó al principio, esta fase se debe aprovechar para la comunicación de ideas y la discusión de las soluciones sin dar respuestas definitivas por parte del profesor, son los estudiantes quienes discuten y defienden sus puntos de vista con la orientación del profesor.

- **Actividad 4. Uso del software como herramienta de exploración y verificación.**

1. Abre el archivo "Perfijo_Area". Lleva el punto B hasta el origen del plano (punto (0, 0)) ¿Existe rectángulo? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor del área? ¿Cuál es el valor de perímetro?

2. Abre la hoja de cálculo de GeoGebra y dale animación automática al punto B. ¿Qué datos están registrados en la hoja de cálculo?

3. Lleva nuevamente el punto B hasta el origen del plano cartesiano. Abre la vista algebraica y muestra el punto P, dale animación automática al punto B y observa la trayectoria de P. ¿Qué representa el punto P? ¿Qué representa el rastro de P?

4. En la hoja de cálculo, escoge el modelo de regresión que mejor se ajuste a los datos y llévala a la vista gráfica. ¿La función es la misma que obtuviste en el punto 8 de la actividad 2?

5. ¿Cuál es la función que modela el problema? Explica tu respuesta

6. ¿Cuáles deben ser las dimensiones exactas del terreno para que su área sea máxima? Explica tu respuesta.

Comentario: aquí se quieren aprovechar las potencialidades del software para que los estudiantes vayan realizando las conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos involucrados en la solución del problema y obtengan la expresión algebraica de la función que representa la solución del problema. El profesor debe orientar al estudiante a que ellos sean conscientes que la solución numérica, geométrica, grafica, algebraica y analítica que están visualizando corresponde a diferentes representaciones de la solución del problema (figura 2).

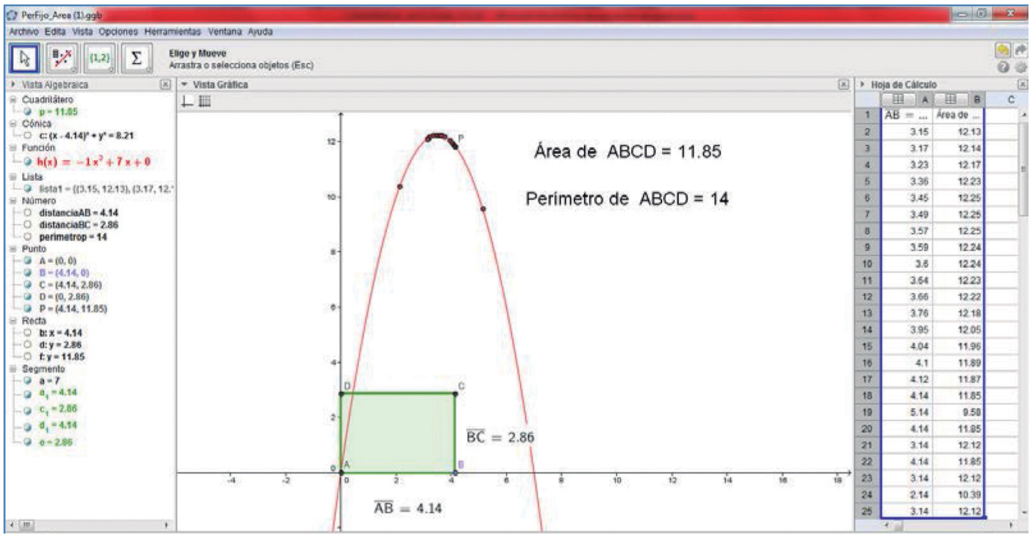

Figura 2. Diferentes representaciones de la solución del problema

Fuente: elaboración propia

Como en todas las actividades, se insiste que el estudiante debe justificar todas sus respuestas con miras a llegar a la solución matemática del problema, de esta manera se promueve la comunicación, el razonamiento y la demostración, de tal manera que el estudiante no se quede satisfecho con lo que ve en el computador o hace el computador, debe buscar respuestas en la teoría matemática. En esta actividad el profesor debe explicar que la ecuación resultante es la síntesis de los datos que suministra el problema, es decir, dado el rectángulo (figura 3).

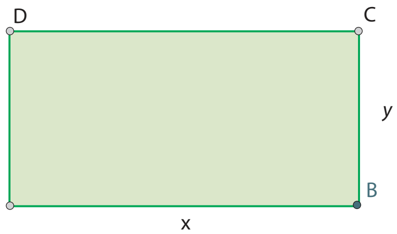

Figura 3. Rectángulo ABCD de lados x, y

Fuente: elaboración propia

Si el perímetro es fijo (en este caso 14) se deduce la ecuación $2x+2y=14 \quad \Rightarrow \quad x+y=7$ Significa que el valor máximo de uno de los lados es 7.

Despejando y se obtiene la expresión $y=7-x$, lo que explica que el máximo valor de y es 7, cuando x es 0 y el mínimo valor de y es 0, cuando x es 7.

El área del rectángulo ABCD es $A=xy$, reemplazando $y=7-x$, se obtiene $A=x(7-x)=7x-x^2$, que es la ecuación dada por el software.

El profesor puede aprovechar las herramientas del software para empezar a trabajar la noción de la derivada como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente a la curva por el punto P. Puede solicitar a los estudiantes que introduzcan en la hoja de cálculo valores del lado desde 3.40 hasta 3.51, arrastrando el punto B con la tecla de mayúsculas (shift) sostenida y la tecla de la flecha hacia la derecha —de esta manera la variación de es en décimas, centésimas o milésimas, … según se quiera—. De esta manera se tienen los valores del lado y del área cercanos al máximo en las columnas A y B, en la columna C se pide hallar la diferencia entre los valores de A ($\Delta A=A_2-A_1$) y en la columna D la diferencia entre los valores de x ($\Delta x=x_2-x_1$), en la columna E la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$. El profesor deberá orientar al estudiante para que analice los valores numéricos de cada una de las columnas y observe que, a medida que la diferencia Δx se aproxime a 0, la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ se acerca a 0 para valores cercanos por la izquierda y por la derecha a 3.5. Observará que las variaciones de A son muy cercanas y por eso ΔA tiende a 0. También observará que para valores a la izquierda de 3.5 la razón es positiva y a la derecha es negativa (figura 4), lo que permitirá discutir ideas crecimiento y decrecimiento, así como de la derivada como pendiente de la recta tangente.

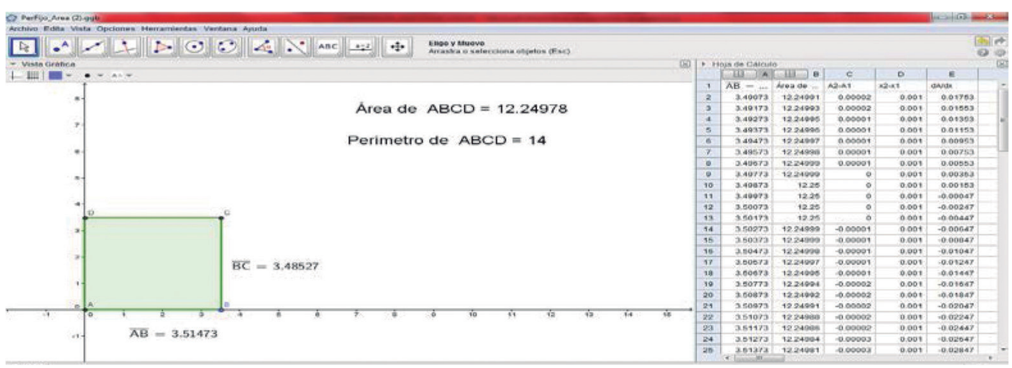

Figura 4. Visualización del comportamiento de la derivada como razón de cambio

Fuente: elaboración propia

Se podrán aprovechar los datos anteriores para realizar el análisis de la variación del lado x y de la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ para que los estudiantes se den cuenta que en este caso las variaciones son proporcionales e igual a 2. Con la ayuda de la herramienta de regresión de dos variables con los datos de la columna A y E para que el estudiante vea la ecuación de la derivada $\frac{dA}{dx}$ es la recta y = 7 - 2x.

Para introducir la idea de derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P y no tener problema de bloqueo con el software, se deben eliminar los datos recogidos en la lista que automáticamente crea el software —lo cual elimina la ecuación $f(x)=7x-x^2$ que representa el área en función de lado x—. Ya conocida la ecuación se introduce en la línea de entrada —posiblemente la llame $g(x)=7x-x^2$ u otro nombre en la vista algebraica—, se muestra el punto P y en la barra de entrada se solicita la tangente del punto P de la función (x). Posteriormente en la barra de entrada se solicita la pendiente de la recta tangente por el punto P y se puede visualizar la recta con los valores de la pendiente (figura 5), analizar el comportamiento de estos valores y ver que la pendiente de la recta tangente tiende a 0, cuando tiende a 3.5, igualmente que cuando la función es creciente la derivada es positiva y cuando es decreciente la derivada es negativa. Se podría analizar los valores de x y de la pendiente en la hoja de cálculo y llegar a la ecuación $y=7-2x$ de la derivada del área con respecto al lado .

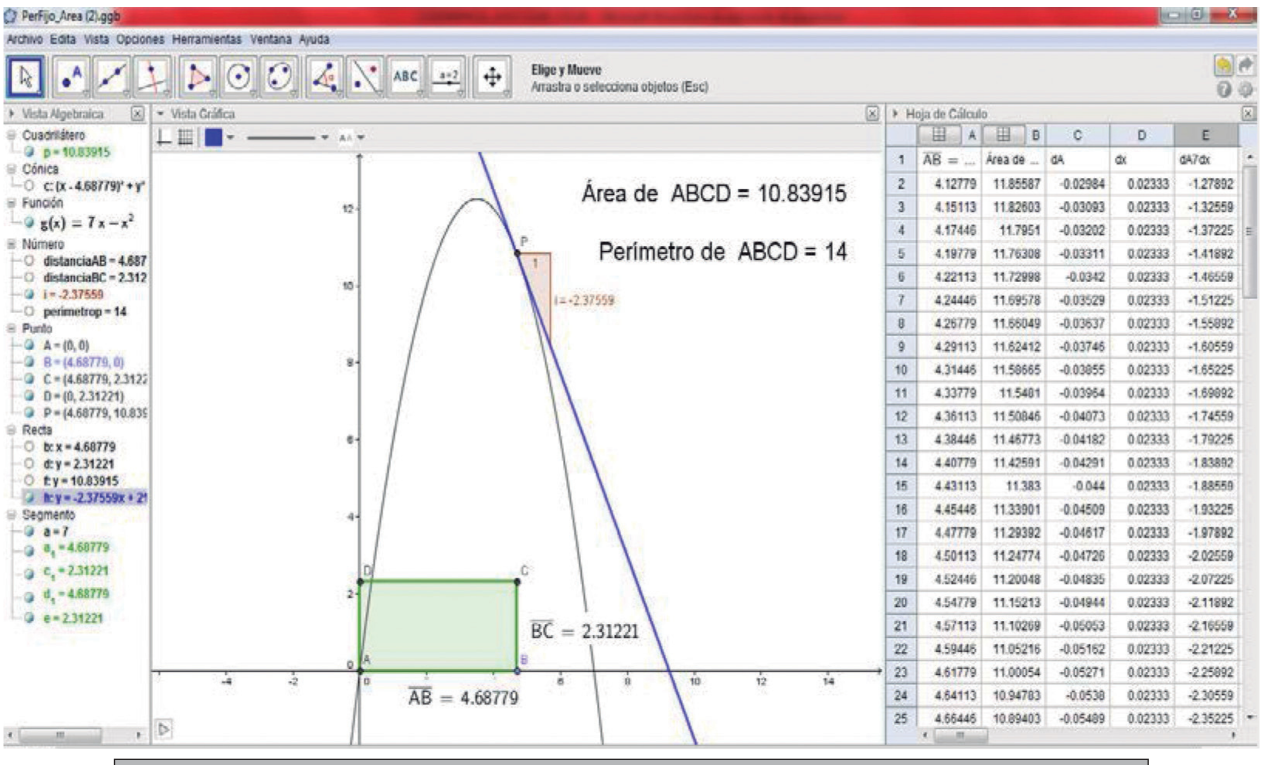

Figura 5. Visualización gráfica, numérica y algebraica de la pendiente de la recta tangente a la función g(x) en el punto P

Fuente: elaboración propia

Se espera que con estas actividades, algunos estudiantes puedan comprender por qué el área máxima se da cuando .

- **Actividad 5. Orientación libre**

1. Abre el archivo Actividad 5.ggb[4] en el cual el deslizador representa el perímetro del rectángulo.

2. Con el deslizador fijo en 256, mueve el punto C (Rojo) hasta lograr aproximadamente el área máxima para el rectángulo, luego registra el valor de obtenido.

3. Repite el paso anterior fijando el deslizador en 5 valores diferentes, para completar la tabla 1.

Perímetro (p)	x que hace el área máxima
256	

Tabla 1

Fuente: elaboración propia

4. Basado en la información de la tabla anterior, plantea una conjetura que relacione el valor de x—para el cual se obtiene el área máxima— y el perímetro p —si es necesario agrega más datos a la tabla—. Argumenta por qué tu conjetura planteada es cierta.

5. Cambia la escala al eje y, de modo que se aprecien en la pantalla valores de este eje, entre 0 y 6000 —Aparecerá un punto azul en la pantalla—.

6. Mueve nuevamente el punto C (Rojo) y comprueba tu conjetura planteada en 4 y concluye (Fije p en diferentes valores).

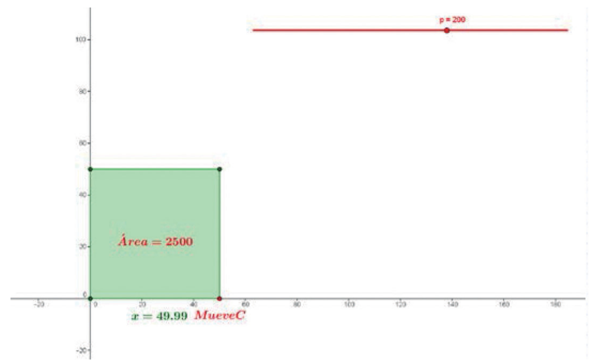

Figura 6. Imagen del archivo Actividad 5.ggb

Fuente: elaboración propia

Comentario: con este problema, a partir de la exploración del archivo dado (figura 6) se quiere lograr que el estudiante comprenda que, independiente del perímetro dado, el rectángulo de mayor área será un cuadrado de lado $x = \frac{p}{4}$.

Fase II. Desarrollo del curso

Esta fase se desarrolló durante catorce sesiones de trabajo diario de cuatro horas, durante el receso académico. Se conformaron diez grupos de 30 estudiantes —siete grupos por la mañana y tres por la tarde—. Cada sesión se desarrolló en una sala de informática, dispuesta con 20 o más computadores, de tal manera que los estudiantes pudieran trabajar individualmente o preferiblemente en parejas. Según la estrategia didáctica adoptada y las fases de aprendizaje propuestas, la metodología de la clase implicaba que el estudiante debía enfrentar individualmente o en parejas a la solución del problema, sin que el profesor lo resolviera. El papel del profesor consistió en resolver inquietudes de comprensión

4 El archivo dinámico se entrega construido al estudiante. La figura 6 ilustra una imagen del archivo.

del problema, planteamiento de preguntas, recordar algunos conceptos y procedimientos, orientar sobre el uso de GeoGebra como herramienta de visualización, exploración, análisis y comprobación de ideas, promover la participación y discusión sobre las soluciones, conceptos, generalizaciones y conclusiones, y finalmente institucionalizar el conocimiento.

Fase III. Instrumentos de control y de evaluación

En esta fase se pretendía integrar la evaluación al proceso de enseñanza y aprendizaje, acorde a la metodología de aplicación, utilizado una variedad de indicadores que pueden ilustrar aspectos relevantes en el aprendizaje de los estudiantes. Se considera la evaluación como un proceso permanente de observación y constantes ajustes de juicios de valor por parte del profesor sobre la actividad matemática realizada por los estudiantes. Esta observación directa estuvo basada en la comunicación de justificaciones orales o gráficas de los estudiantes sobre las situaciones problema planteadas en cada sesión de trabajo. Los indicadores de logro que se tuvieron en cuenta fueron los siguientes:

1. Modela diversas situaciones de cambio a través de funciones y expresa dichas funciones inicialmente en palabras y luego simbólicamente, representándolas en forma gráfica, tabular y mediante expresiones algebraicas.

2. Representa y analiza funciones utilizando tablas, expresiones orales, expresiones algebraicas, ecuaciones y gráficas y hace traducciones entre estas representaciones.

3. Formula conjeturas sobre el comportamiento de una gráfica teniendo en cuenta el fenómeno que representa y usa la calculadora para comprender dicho comportamiento.

4. Interpreta gráficos que describen diversas situaciones.

5. Analiza tablas y gráficas para descubrir patrones, hace predicciones e identifica propiedades y relaciones.

En la última sesión de trabajo se propuso el problema de hallar el rectángulo de menor perímetro entre los rectángulo de área fija (área fija–perímetro variable) y se evaluó según los indicadores expuestos. Las respuestas y actuaciones de los estudiantes fueron analizadas para ubicar a los estudiantes en un nivel de aprendizaje bajo, medio o alto.

Conclusiones

Lo que se presenta en este artículo es el inicio de un proyecto que está en ejecución y que por lo tanto tiene muchas variables por analizar, que no se pueden poner en este texto como simples afirmaciones sin haber realizado un análisis serio, pero por ahora sí se pueden mostrar algunos datos y sugerencias de lo realizado.

Se empieza por enumerar los aspectos que están pendientes por estudiar: falta realizar seguimiento a los estudiantes en el curso de Cálculo I, realizar una evaluación y mejoramiento de las actividades, analizar el impacto del uso de los archivos de GeoGebra en la comprensión de los problemas de variación y cambio en su resolución, analizar el uso que hacen los estudiantes de GeoGebra para la solución de los problemas y la influencia de éste en la comprensión y conexión de las diferentes representaciones de los conceptos estudiados y, principalmente, aportar información que ayude a la comprensión y desarrollo del pensamiento variacional, por parte de los profesores de bachillerato y primer semestre universitario.

A pesar que, en lo presentado se hace énfasis en la necesidad del conocimiento matemático, el curso de precálculo deber verse más como un acercamiento empírico e intuitivo a los conceptos e ideas fundamentales del cálculo que como un curso que pretende llenar los vacíos conceptuales de los conceptos que el estudiante no aprendió en su básica y bachillerato, no se pretende convertir lo realizado en poco tiempo en el formalismo usual que ha llevado al fracaso. Se deben aprovechar las inquietudes y preguntas de los estudiantes para abordar el aprendizaje de conceptos que son básicos para el curso de Cálculo Diferencial, se debe insistir en que los estudiantes entiendan el cambio y la variación, que identifiquen variables y las distingan de las incógnitas, que comprendan el papel de las representaciones y de sus conexiones y que entiendan la importancia de la comunicación y el razonamiento y la demostración, así como el aprovechamiento de las tecnologías como herramientas que ayudan a la exploración, conjeturación y comprobación de ideas matemáticas.

Finalmente es necesario aclarar que lo propuesto no es algo totalmente novedoso y original, desde el punto de vista teórico, dado que desde hace más de una década en Colombia se vienen insistiendo en que los profesores de básica primaria y secundaria y bachillerato pongan en funcionamiento estas ideas. Lo original de este proyecto consiste en haber conformado un equipo de trabajo con profesores de colegios y de primeros semestres de universidad e investigadores en educación matemática y administrativos, que quieren dar respuesta a una problemática y que consideran que el trabajo en equipo es más fructífero y puede dar mejores resultados, es decir, este es un proyecto que puede crear una comunidad de práctica, que quiere aportar al desarrollo de la educación matemática y a su vez ayudar al problema de la deserción y repotencia en los primeros semestres universitarios.

Referencias

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa. 1* (1) 40-55.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *14*(3), 353–369. Sociedad Thales, España (42).

Carabús, O. (2002). El Aprendizaje del Cálculo en la Universidad. La Conceptualización de la Derivada de una Función y sus Niveles de Comprensión. *Producciones Científicas NOA*. Sección: Educación y Sociedad. Catamarca. Acceso: diciembre de 2006. Recuperado de http://www.editorial.unca.edu.ar/NOA2002/Aprendizaje%20Calculo%20Universidad.pdf

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. México.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2013). *La génesis y la enseñanza del cálculo: Las trampas del rigor*. México: Editorial Trillas.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Colombia: autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2003). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: autor.

Moreno, L. (2012). *Conversación personal.* Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Santos-Trigo, M., Moreno, L. (2013). Sobre la construcción de un marco teórico en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales. En M. T. Rojano (Ed), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas*. Editorial Trillas. México.

Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. Em *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Blumenau.