



## Chain contracting homotopy and a method for relative projective resolutions

### Homotopía de contracción de cadenas y un método para resoluciones proyectivas relativas

Felipe Clímaco Ccolque T.

Received, Set. 25, 2021

Accepted, Jun. 02, 2022



#### How to cite this article:

Ccolque F. *Homotopía de contracción de cadenas y un método para resoluciones proyectivas relativas*. *Selecciones Matemáticas*. 2022;9(1):102–120. <http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.08>

#### Abstract

The purpose of this article is to check the main results of the method that allows the construction of a relative projective resolution of an  $S$ -module  $N$  given in appendix A of the article [1], and to show an application of this method. It is achieved to show the usefulness of the method, and to put in relevance that the relative projective resolution obtained with the method is comparable to the bar resolution of an algebra because it is provided with chain contracting homotopy.

**Keywords.** Mapping cone, homotopy equivalence, projective class, contracting homotopy.

#### Resumen

El propósito de este artículo es comprobar los resultados principales del método que permite la construcción de una resolución proyectiva relativa de un  $S$ -módulo  $N$  dada en el apéndice A del artículo [1], y mostrar una aplicación de dicho método. Se consigue mostrar la utilidad del método, y poner en relieve que la resolución proyectiva relativa obtenida con el método es comparable con la resolución barra de un álgebra porque está provista de una homotopía de contracción de cadenas.

**Palabras clave.** Cono de mapeo, equivalencia homotópica, clase proyectiva, homotopía de contracción.

**1. Introducción.** En el apéndice A del artículo [1] se da un método para construir una resolución proyectiva relativa de un  $S$ -módulo  $N$  bajo condiciones adecuadas en Corolario A.2.

Para obtener este propósito se consideró un diagrama de  $S$ -módulos y aplicaciones de  $S$ -módulos

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 \partial_2 \downarrow & & & & & & \\
 Y_1 & \xleftarrow{\mu_1} & X_{01} & \xleftarrow{d_{11}^0} & X_{11} & \xleftarrow{d_{21}^0} & \dots \\
 & & & & & & \\
 \partial_1 \downarrow & & & & & & \\
 Y_0 & \xleftarrow{\mu_0} & X_{00} & \xleftarrow{d_{10}^0} & X_{10} & \xleftarrow{d_{20}^0} & \dots
 \end{array} \tag{1.1}$$

tal que :

- La columna y las filas son complejos de cadenas.
- Para cada  $r, s \geq 0$  se tiene un  $R$ -módulo  $\overline{X}_{rs}$ , aplicaciones de  $S$ -módulos  $s_{rs} : X_{rs} \rightarrow S \otimes \overline{X}_{rs}$  y  $\pi_{rs} : S \otimes \overline{X}_{rs} \rightarrow X_{rs}$  verificando  $\pi_{rs}s_{rs} = id$ .
- Cada fila es contráctil como un complejo de  $R$ -módulos, con una homotopía de contracción de cadenas  $\sigma_{0s}^0 : Y_s \rightarrow X_{0s}$  y  $\sigma_{r+1,s}^0 : X_{rs} \rightarrow X_{r+1,s}$  ( $r \geq 0$ ).

\*Facultad de Ciencias, UNI-IMCA, Calle los Biólogos, Urb San Cesar, La Molina, Lima 12, Perú. (ccolque@imca.edu.pe).

Se definió las flechas  $d_{r,s}^l$  para que  $(X_*, d_*)$  se convierta en un complejo de cadenas de  $S$ -módulos, y que  $\mu_*' : (X_*, d_*) \rightarrow (Y_*, -\partial_*)$  se convierta en una equivalencia homotópica de complejos de  $R$ -módulos.

Se construyeron los morfismos de  $R$ -módulos  $\sigma_{l,s-l}^l : Y_s \rightarrow X_{l,s-l}$  ;  $\sigma_{r+l+1,s-l}^l : X_{rs} \rightarrow X_{r+l+1,s-l}$  ( $r, s \geq 0, 1 \leq l \leq s$ ); de modo que los morfismos  $\sigma_{n+1} = - \sum_{r=-1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-r-1} \sigma_{r+l+1,n-r-l-1}^l$  formen una homotopía de contracción de  $C_{(\mu_*')}$ .

Conforme a las definiciones de  $d_*$  y  $\sigma_*$  la demostración de este hecho fue reducida a la verificación de las igualdades  $\sigma^0 d^0 + d^0 \sigma^0 = id$  y  $\sum_{i=0}^l (\sigma^{l-i} d^i + d^{l-i} \sigma^i) = 0$  ( $l > 0$ ).

En la prueba de [1, Corolario A.2] se utilizó el [1, Teorema A.1] para obtener la igualdad

$$\hat{\sigma}_n \partial_{n+1} = - \sum_{l=0}^n \sum_{i=0}^{l+1} d_{i,n+1-i}^{l+1-i} \sigma_{i,n+1-i}^i.$$

Este trabajo de investigación se origina en la inquietud de comprobar la validez de la técnica usada en la prueba de [1, Teorema A.1]; de verificar que  $(X_*, d_*)$  es un complejo de cadenas de  $S$ -módulos y de verificar la igualdad anterior.

El propósito de este artículo es comprobar los resultados principales del método que permite la construcción de una resolución proyectiva relativa de un  $S$ -módulo  $N$  dada en el apéndice A del artículo [1], y mostrar una aplicación de dicho método.

El presente trabajo está organizado como sigue: En la segunda sección se introduce homotopía de contracción de cadenas, se establece una condición suficiente para que un morfismo de complejos de cadenas sea una equivalencia homotópica usando el cono de mapeo del morfismo de complejos de cadenas. En la tercera sección, dado un morfismo de anillos unitarios  $\varrho : R \rightarrow S$ , se obtienen de un  $S$ -módulo y de un morfismo de  $S$ -módulos un  $R$ -módulo y un morfismo de  $R$ -módulos. A partir de un  $R$ -módulo y de un morfismo de  $R$ -módulos con producto tensorial y Hom se obtienen un  $S$ -módulo y un morfismo de  $S$ -módulos.

En la cuarta sección se introduce una terna  $(G, F, H)$  de funtores inducidos por un morfismo dado de anillos unitarios. Se establecen algunas propiedades necesarias de funtores adjuntos. Se establece que  $G$  es adjunto izquierdo de  $F$  y que  $F$  es adjunto izquierdo de  $H$ . Se deduce que  $F$  preserva monomorfismos y epimorfismos.

En la quinta sección se estudia una clase de epimorfismos  $\mathcal{E}$  en una categoría abeliana  $\mathfrak{A}$ , abordando el problema de existencia y unicidad de una resolución  $\mathcal{E}$ -proyectiva de un objeto de  $\mathfrak{A}$ . Se introduce una clase  $\mathcal{E}'$  de todos los epimorfismos de  $S$ -módulos que se descomponen como morfismos de  $R$ -módulos, y se prueba que esta clase es proyectiva. Se deduce que cada  $S$ -módulo tiene una única resolución  $\mathcal{E}'$ -proyectiva.

En la sexta sección, se desarrolla las ideas expuestas del artículo para comprobar la validez de las técnicas usadas en las pruebas de [1, Theorem A.1, Corollary A.2].

En la séptima sección, se muestra la utilidad del método para bimódulos.

**2. Cono de Mapeo y Equivalencia Homotópica.** Se denotará por  ${}_{\Lambda}\mathfrak{C}_h$  la categoría de complejos de cadenas sobre un anillo  $\Lambda$ . Sean  $f$  y  $g \in {}_{\Lambda}\mathfrak{C}_h(C, D)$ . Una homotopía  $h$  entre  $f$  y  $g$  es una familia  $h = \{h_{n+1} : C_n \rightarrow D_{n+1}\}_{n \geq 0}$  de morfismos de  $\Lambda$ -módulos tal que  $d_{n+1}^D h_{n+1} + h_n d_n^C = f_n - g_n, \forall n \geq 0$ ; esto se ve en diagrama como

$$\begin{array}{ccccc} & & D_n & \xleftarrow{d_{n+1}^D} & D_{n+1} \\ & \nearrow h_n & \uparrow f_n & \uparrow g_n & \nearrow h_{n+1} \\ C_{n-1} & \xleftarrow{d_n^C} & C_n & & \end{array}$$

**Definición 2.1.** Un complejo de cadenas  $C \in |{}_{\Lambda}\mathfrak{C}_h|$  es contráctil si existe una homotopía  $h = \{h_{n+1} : C_n \rightarrow C_{n+1}\}_{n \geq 0}$  entre la identidad  $id_C$  y la aplicación nula  $0_C$ . Esta homotopía  $h$  se llama homotopía de contracción de cadenas de  $C$ .

**Proposición 2.1.** Si  $C$  es un complejo de cadenas contráctil, entonces  $C$  es acíclico (i.e.,  $H_n(C) = 0, \forall n \geq 1$ ).

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\mu : (C, d^C) \rightarrow (D, d^D)$  un morfismo de complejos de cadenas de  $\Lambda$ -módulos izquierdos, entonces existe un complejo de cadenas  $C_\mu$ , donde

$$(C_\mu)_n = D_n \oplus C_{n-1} \text{ y } d_n^{C_\mu}(b, a) = (d_n^D b - \mu_{n-1} a, -d_{n-1}^C a), b \in D_n \text{ y } a \in C_{n-1}.$$

El complejo de cadenas  $C_\mu$  se llama cono de mapeo de  $\mu$ .

En seguida, se va a establecer una condición suficiente para que un morfismo de complejos de cadenas sea una equivalencia homotópica usando el cono de mapeo del morfismo de complejos de cadenas.

**Proposición 2.2.** *Sea  $C$  un complejo de cadenas sobre  $\Lambda$ , entonces  $sC$  definido por  $(sC)_n = C_{n-1}$  y  $d_n(sa) = -sd_{n-1}a$ , es un complejo de cadenas sobre  $\Lambda$ .*

**Proposición 2.3.** *Si  $\mu : C \rightarrow D$  es un morfismo de complejos de cadenas, entonces existe una sucesión exacta corta de complejos de cadenas,*

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0,$$

y que la conectante de la sucesión exacta larga de homologías es  $H(\mu) : H(C) \rightarrow H(D)$ .

*Demostración:*

i) Existe una sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0.$$

En efecto, sean

$\lambda_n : D_n \rightarrow D_n \oplus C_{n-1} = (C_\mu)_n$  y  $\rho_n : (C_\mu)_n = D_n \oplus C_{n-1} \rightarrow C_{n-1} = (sC)_n$  dados por  $\lambda_n(b) = (b, 0)$  y  $\rho_n(b, a) = -sa$ .

Claramente,  $\lambda_n$  y  $\rho_n$  son morfismos de  $\Lambda$ -módulos.

La sucesión  $0 \longrightarrow D_n \xrightarrow{\lambda_n} D_n \oplus C_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} C_{n-1} \longrightarrow 0$  es exacta, para  $n \geq 1$ , debido a que se cumplen las tres condiciones siguientes:

(1)  $\lambda_n$  es inyectivo, (2)  $\rho_n$  es sobreyectivo y (3)  $Im(\lambda_n) = Ker(\rho_n)$ .

Falta verificar que  $\lambda : D \rightarrow C_\mu$  y  $\rho : C_\mu \rightarrow sC$  son morfismos de complejos de cadenas. Para ello, sea  $b \in D_n$  y  $(b, a) \in D_n \oplus C_{n-1}$ .

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} d_n \lambda_n(b) &= d_n(b, 0) \\ &= (d_n b - \mu_{n-1} 0, -d_{n-1} 0) \\ &= (d_n b, 0) = \lambda_{n-1} d_n(b), \quad y \end{aligned}$$

$$d_n \rho_n(b, a) = d_n(-sa) = s(d_{n-1}a) = \rho_{n-1} d_n(b, a).$$

Por lo tanto, existe

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0,$$

sucesión exacta corta de complejos de cadenas.

ii) La conectante de la sucesión exacta larga de homologías es  $H(\mu) : H(C) \rightarrow H(D)$ .

Considerando la sucesión exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0,$$

se tiene el diagrama zig-zag siguiente:

$$\begin{array}{ccc} D_{n+1} \oplus C_n \ni (0, a) & \xrightarrow{\rho_{n+1}} & -sa \in Z_{n+1}(sC) \\ \downarrow d_{n+1} & & \\ Z_n(D) \ni -\mu_n(a) & \xrightarrow{\lambda_n} & d_{n+1}(0, a) = (d_{n+1}0 - \mu_n a, -d_n a) = (-\mu_n a, 0), \end{array}$$

pues  $0 = d_{n+1}(sa) = -sd_n(a)$  y así  $d_n a = 0$ .

Como  $d_n \mu_n(a) = 0$ , la conectante  $\delta_{n+1} : H_{n+1}(sC) \rightarrow H_n(D)$  es dada por

$\delta_{n+1}([sa]) = [\mu_n(a)] = H_n(\mu)[a]$  para  $H_n(\mu) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ .

Como  $sa \in Z_{n+1}(sC) \Leftrightarrow a \in Z_n(C)$ ; identificando  $[sa]$  con  $[a]$ , se puede concluir que la conectante de la sucesión exacta larga de homologías es  $\delta = H(\mu) : H(C) \rightarrow H(D)$ .

□

**Proposición 2.4.** *Si existe una homotopía de cadenas entre  $\lambda$  y la aplicación nula, entonces  $\mu$  tiene inverso homotópico derecho.*

**Proposición 2.5.** *Si existe una homotopía de cadenas entre  $\rho$  y la aplicación nula, entonces  $\mu$  tiene inverso homotópico izquierdo.*

Un morfismo  $f \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_h(C, D)$  de complejos de cadenas de  $\Lambda$ -módulos es una equivalencia homotópica si existe  $g \in {}_{\Lambda}\mathcal{C}_h(D, C)$  tal que  $gf \simeq id_C$  y  $fg \simeq id_D$ .

**Teorema 2.1.** [2, Exercice 5.8] Sea  $\mu : C \rightarrow D$  un morfismo de complejos de cadenas sobre  $\Lambda$ . Si  $C_\mu$  es contráctil, entonces  $\mu$  es una equivalencia homotópica.

*Demostración:* Puesto que  $C_\mu$  es un complejo de cadenas contráctil, existe una homotopía  $h = \{h_{n+1} : (C_\mu)_n \rightarrow (C_\mu)_{n+1}\}$  entre la identidad de  $C_\mu$  y la aplicación nula. Luego

$$d_{n+1}h_{n+1} + h_n d_n = id_{(C_\mu)_n}. \quad (2.1)$$

Según Proposición 2.3, existe la sucesión de complejos de cadenas asociada a  $\mu$  :

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{\lambda} C_\mu \xrightarrow{\rho} sC \longrightarrow 0 ,$$

la cual es exacta, donde  $\lambda_n : D_n \rightarrow (C_\mu)_n$  y  $\rho_n : (C_\mu)_n \rightarrow (sC)_n$ .

De (2.1),  $d_{n+1}h_{n+1}\lambda_n + h_n d_n \lambda_n = \lambda_n$ . Haciendo  $h'_{n+1} = h_{n+1}\lambda_n : D_n \rightarrow (C_\mu)_{n+1}$ , como  $d_n \lambda_n = \lambda_{n-1} d_n$  se tiene

$d_{n+1}h'_{n+1} + h'_n d_n = \lambda_n = \lambda_n - 0$ . Así,  $h'_{n+1} : D_n \rightarrow (C_\mu)_{n+1} = D_{n+1} \oplus C_n$  es una homotopía entre  $\lambda$  y la aplicación nula. Por Proposición 2.4 existe un morfismo  $\nu : D \rightarrow C$  de complejos de cadenas tal que

$$\mu\nu \simeq id_D. \quad (2.2)$$

Por otro lado, de (2.1):  $\rho_n d_{n+1}h_{n+1} + \rho_n h_n d_n = \rho_n$ , y como  $\rho_n d_{n+1} = d_{n+1}\rho_{n+1}$ ,

$d_{n+1}\rho_{n+1}h_{n+1} + \rho_n h_n d_n = \rho_n$ .

Haciendo  $h'_{n+1} = \rho_{n+1}h_{n+1} : (C_\mu)_n \rightarrow (sC)_{n+1}$ , se sigue que  $d_{n+1}h'_{n+1} + h'_n d_n = \rho_n - 0$ . Así,  $h'_{n+1} : (C_\mu)_n \rightarrow (sC)_{n+1}$  es una homotopía entre  $\rho$  y la aplicación nula.

Por Proposición 2.5, existe un morfismo  $\nu' : D \rightarrow C$  de complejos de cadenas tal que  $\nu'\mu \simeq id_C$ . Puesto que  $\nu\mu = id_C\nu\mu \simeq \nu'\mu\nu\mu \simeq \nu'id_D\mu = \nu'\mu$ ,

$$\text{por transitividad de homotopía } \nu\mu \simeq id_C. \quad (2.3)$$

Por (2.2) y (2.3), se concluye que  $\mu$  es una equivalencia homotópica.  $\square$

**3. Aplicaciones  $S$ -Lineales son  $R$ -Lineales.** Sea  $\varrho : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos unitarios. Se escribirá  $S$ -módulo o  $R$ -módulo en lugar de  $S$ -módulo izquierdo o  $R$ -módulo izquierdo. Las pruebas de las siguientes proposiciones se dejan al lector. Estos hechos se pueden ver en [3, p. 26].

**Proposición 3.1.** Sea  $N$  un  $S$ -módulo, entonces  $N$  es un  $R$ -módulo.

**Proposición 3.2.** Sea  $\varepsilon : N \rightarrow M$  un morfismo de  $S$ -módulos, entonces  $\varepsilon : N \rightarrow M$  es un morfismo de  $R$ -módulos.

**Proposición 3.3.** Sea  $\bar{X}$  un  $R$ -módulo, entonces  $S \otimes_R \bar{X}$  es un  $S$ -módulo.

**Proposición 3.4.** Sea  $f : M \rightarrow N$  un morfismo de  $R$ -módulos; entonces  $S \otimes_R f : S \otimes_R M \rightarrow S \otimes_R N$  definido por  $S \otimes_R f(\sum_{i \in I} s_i \otimes m_i) = \sum_{i \in I} s_i \otimes f m_i$ , donde  $I$  es finito, es un morfismo de  $S$ -módulos.

**Proposición 3.5.** Sea  $M$  un  $R$ -módulo, entonces  $\text{Hom}_R(S, M)$  es un  $S$ -módulo.

**Proposición 3.6.** Sea  $\alpha : M \rightarrow N$  un morfismo de  $R$ -módulos; entonces  $\alpha_* = \text{Hom}_R(S, \alpha) : \text{Hom}_R(S, M) \rightarrow \text{Hom}_R(S, N)$  definido por  $\alpha_*(f) = \alpha f$ , es un morfismo de  $S$ -módulos.

**4. Funtores Inducidos por un Morfismo de Anillos.** Sean  $M$  un  $S$ -módulo,  $FM = M$  como grupo abeliano y tiene una estructura de  $R$ -módulo dada por  $r \cdot m = \varrho(r) \cdot m$  para  $r \in R$ ,  $m \in M$ ; y  $Ff$  es el morfismo inducido por  $\varrho$ .

**Proposición 4.1.** Existe  $F = F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \rightarrow \mathfrak{m}_R^\ell$  functor covariante.

Sean  $M$  un  $R$ -módulo,  $GM = S \otimes_R M$  y  $Gf = S \otimes_R f$ .

**Proposición 4.2.** Existe  $G = G_\varrho : \mathfrak{m}_R^\ell \rightarrow \mathfrak{m}_S^\ell$  functor covariante.

Sean  $M$  un  $R$ -módulo,  $HM = \text{Hom}_R(S, M)$  y  $H\alpha = \text{Hom}_R(S, \alpha)$ .

**Proposición 4.3.** Existe  $H = H_\varrho : \mathfrak{m}_R^\ell \rightarrow \mathfrak{m}_S^\ell$  functor covariante.

**Definición 4.1.** [4, p. 64] Sean  $F_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2, F_2 : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ , funtores covariantes. El functor  $F_1$  es adjunto izquierdo de  $F_2$  si existe una equivalencia natural

$$\eta = \eta_{XY} : \mathcal{C}_2(F_1 X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1(X, F_2 Y),$$

de funtores de  $\mathcal{C}_1^{op} \times \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathfrak{S}$  (categoría de conjuntos). En este caso,  $\eta$  se llama adjunción y se denota por  $\eta : F_1 \dashv F_2$ , el hecho que  $F_1$  es adjunto izquierdo de  $F_2$ .

La prueba del siguiente teorema se deja al lector (ver [5, Lema 1]).

**Teorema 4.1.** Sean  $D \xrightarrow{G} \mathfrak{C} \xrightarrow{F} D \xrightarrow{H} \mathfrak{C}$  funtores covariantes;  $\eta : G \dashrightarrow F$  y

$\eta' : F \dashrightarrow H$  adjunciones, entonces:

1.  $F$  preserva monomorfismos.
2.  $F$  preserva epimorfismos.

Puesto que  $\text{Hom}_S(S, M) \cong M$  y  $S \otimes_S M \cong M$ , considerando [4, E III.7.3] se obtiene:

**Proposición 4.4.** Sea  $\varrho : R \rightarrow S$  morfismo de anillos unitarios.

- 1) Si  $M \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$  y  $N \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$ , entonces existe  $\eta_1 : \text{Hom}_S(S \otimes M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(M, N)$  biyección de conjuntos.
- 2) Si  $N \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$  y  $M \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$ , entonces existe  $\eta_3 : \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(M, \text{Hom}_R(S, N))$  biyección de conjuntos.

La prueba de la proposición siguiente se puede ver en [5, Proposición 5].

**Proposición 4.5.** Sean  $F, G$  y  $H$  funtores covariantes de las proposiciones 4.1, 4.2 y 4.3, respectivamente. Entonces:

1.  $G$  es adjunto izquierdo de  $F$ ; i.e.,  $G \dashrightarrow F$ .
2.  $H$  es adjunto derecho de  $F$ ; i.e.,  $F \dashrightarrow H$ .

Puesto que  $G \dashrightarrow F \dashrightarrow H$ , por Teorema 4.1 se obtiene el resultado siguiente.

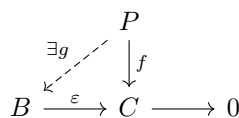
**Corolario 4.1.** Sean  $\varrho : R \rightarrow S$  morfismo de anillos y  $F = F_\varrho : \mathfrak{m}_S^\ell \rightarrow \mathfrak{m}_R^\ell$  funtor de cambio de anillos (Proposición 4.1). Entonces  $F$  preserva monomorfismos y epimorfismos.

**5. Resoluciones Projectivas Relativas (RPR).** Dados un morfismo de anillos unitarios  $\varrho : R \rightarrow S$  y un  $S$ -módulo  $N$ , se desea garantizar que  $N$  tiene resolución projectiva relativa a la familia de los epimorfismos de  $S$ -módulos que se descomponen como morfismos de  $R$ -módulos, salvo una equivalencia homotópica.

Un morfismo  $f : M \rightarrow N$  en una categoría  $\mathfrak{C}$  es un epimorfismo si para todos los morfismos  $N \xrightarrow[h]{g} W$  en  $\mathfrak{C}$  tales que  $gf = hf$  se tiene que  $g = h$ .

Sean  $\mathfrak{A}$  una categoría abeliana y  $\mathcal{E}$  una clase de epimorfismos en  $\mathfrak{A}$ .

**Definición 5.1.** Sea  $\varepsilon : B \rightarrow C$  un epimorfismo de  $\mathfrak{A}$ . Un objeto  $P$  de  $\mathfrak{A}$  se llama *projectivo relativo* a  $\varepsilon$  si  $\varepsilon_* = \mathfrak{A}(P, \varepsilon) : \mathfrak{A}(P, B) \rightarrow \mathfrak{A}(P, C)$  es *surgyectiva*. Es decir, dado  $f \in \mathfrak{A}(P, C)$ ,  $\exists g \in \mathfrak{A}(P, B)$  tal que  $\varepsilon_*(g) = f$



Se dice que  $P$  es  $\mathcal{E}$ -projectivo si es projectivo relativo a  $\varepsilon$ , para todo  $\varepsilon \in \mathcal{E}$ .

**Proposición 5.1.**  $P_1 \oplus P_2$  es  $\mathcal{E}$ -projectivo si y sólo si  $P_1$  y  $P_2$  son  $\mathcal{E}$ -projectivos.

**Definición 5.2.** La *clausura*,  $C(\mathcal{E})$ , de  $\mathcal{E}$ , consiste de los epimorfismos  $\varepsilon$  en  $\mathfrak{A}$  tal que cada objeto  $\mathcal{E}$ -projectivo de  $\mathfrak{A}$  es también projectivo relativo a  $\varepsilon$ .

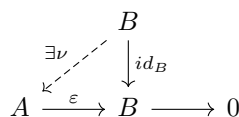
La clase  $\mathcal{E}$  es *cerrada* si  $\mathcal{E} = C(\mathcal{E})$ .

**Proposición 5.2.** [4, P IX.1.2] Una clase cerrada de epimorfismos contiene cada proyección

$$\pi : A \oplus B \twoheadrightarrow A.$$

Un epimorfismo  $\varepsilon : A \twoheadrightarrow B$  de  $R$ -módulos se descompone si existe un morfismo

$$\nu : B \twoheadrightarrow A \text{ de } R\text{-módulos tal que } \varepsilon\nu = id_B :$$



**Proposición 5.3.** La clase  $\mathcal{E}_0$  de epimorfismos de  $R$ -módulos izquierdos que se descomponen es cerrada.

**Definición 5.3.** Sea  $\mathcal{E}$  una clase cerrada de epimorfismos en  $\mathfrak{A}$ . Un morfismo  $\varphi$  de  $\mathfrak{A}$  es  $\mathcal{E}$ -admisiblesi en la descomposición canónica  $\varphi = \mu\varepsilon$ , donde  $\mu$  es un monomorfismo,  $\varepsilon$  es un epimorfismo, se tiene  $\varepsilon \in \mathcal{E}$ . Una sucesión exacta en  $\mathfrak{A}$  es  $\mathcal{E}$ -exacta si todos sus morfismos son  $\mathcal{E}$ -admisibles. Un complejo en  $\mathfrak{A}$ ,

$$K : 0 \longleftarrow K_0 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{n-1} \longleftarrow K_n \longleftarrow \cdots \tag{5.1}$$

se llama  $\mathcal{E}$ -proyectivo si cada  $K_n$  es  $\mathcal{E}$ -proyectivo;  $K$  se llama  $\mathcal{E}$ -acíclico si el complejo aumentado

$$0 \longleftarrow H_0(K) \longleftarrow K_0 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{n-1} \longleftarrow K_n \longleftarrow \cdots$$

es  $\mathcal{E}$ -exacta.

El complejo  $K$  es resolución  $\mathcal{E}$ -proyectiva de  $A$  si  $K$  es  $\mathcal{E}$ -proyectivo,  $\mathcal{E}$ -acíclico y  $H_0(K) \cong A$ .

**Definición 5.4.** Una clase cerrada  $\mathcal{E}$  de epimorfismos de  $\mathfrak{A}$  es proyectiva si para cada objeto  $A$  de  $\mathfrak{A}$  existe un epimorfismo  $\varepsilon : P \rightarrow A$  en  $\mathcal{E}$ , donde  $P$  es  $\mathcal{E}$ -proyectivo.

**Ejemplo 5.1.** La clase  $\mathcal{E}_0$  de epimorfismos de  $R$ -módulos izquierdos que se descomponen es proyectiva. La prueba de la proposición siguiente es análoga a la prueba de [4, Lemma IV.4.2].

**Proposición 5.4.** Si  $\mathcal{E}$  es una clase proyectiva, entonces cada objeto de  $\mathfrak{A}$  posee una resolución  $\mathcal{E}$ -proyectiva.

**Teorema 5.1.** [4, T IX.1.3] Sean

$$K : K_0 \longleftarrow K_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow K_{n-1} \longleftarrow K_n \longleftarrow \cdots \text{ y}$$

$L : L_0 \longleftarrow L_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow L_{n-1} \longleftarrow L_n \longleftarrow \cdots$  dos complejos de cadenas en  $\mathfrak{A}$ . Si  $K$  es  $\mathcal{E}$ -proyectivo y  $L$  es  $\mathcal{E}$ -acíclico, entonces cada morfismo  $\alpha : H_0(K) \rightarrow H_0(L)$  induce un morfismo de complejos de cadenas  $\varphi : K \rightarrow L$ . Además, dos morfismos de complejos de cadenas inducidos por  $\alpha$  son homotópicos.

La unicidad de una resolución  $\mathcal{E}$ -proyectiva de un objeto es dada por el siguiente.

**Corolario 5.1.** Dos resoluciones  $\mathcal{E}$ -proyectivas de un objeto  $A$  de  $\mathfrak{A}$  son homotópicamente equivalentes.

Gracias a Chuck Wiebel por proporcionar el artículo [6], donde aparece como una herramienta principal “LEMMA 2” para la existencia de una resolución  $(R, S)$ -proyectiva de un  $R$ -módulo (ver [6, p. 250]). Por coincidencia, el lema siguiente tiene el mismo propósito.

**Lema 5.1.** Para cada  $N \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ , el  $S$ -módulo  $S \otimes N$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

*Demostración:* Dados  $\varepsilon : B \twoheadrightarrow C$  en  $\mathcal{E}'$  y  $\alpha \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes N, C)$ ,  $\exists \beta \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes N, B)$  tal que  $\alpha = \varepsilon\beta$ . Es decir, se tiene el diagrama conmutativo siguiente en  $\mathfrak{m}_S^\ell$

$$\begin{array}{ccc} & S \otimes N & \\ & \swarrow \exists \beta & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{\varepsilon} & C \longrightarrow 0. \end{array}$$

En efecto, como  $\varepsilon \in \mathcal{E}'$ , en  $\mathfrak{m}_R^\ell$  se ve que  $\varepsilon : B \twoheadrightarrow C$  se descompone. Así, existe  $\delta : C \rightarrow B$  tal que  $\varepsilon\delta = id_C$ . Por Proposición 4.4,  $\text{Hom}_S(S \otimes N, C) \cong \text{Hom}_R(N, C)$ . Entonces para  $\alpha$  existe  $\alpha' \in \text{Hom}_R(N, C)$  tal que  $\alpha'(m) = \alpha(1 \otimes m)$ . Así,  $N$  visto en  $\mathfrak{m}_R^\ell$  es proyectivo relativo a  $\varepsilon$ , pues existe  $\beta' = \delta\alpha'$  tal que  $\varepsilon\beta' = \alpha'$ .

Nuevamente, por Proposición 4.4,  $\text{Hom}_S(S \otimes N, B) \cong \text{Hom}_R(N, B)$ . Así, para  $\beta' \in \text{Hom}_R(N, B)$ ,  $\exists \beta \in \text{Hom}_S(S \otimes N, B)$  tal que  $\beta(s \otimes n) = s\beta'(n)$ . Se cumple la condición  $\alpha = \varepsilon\beta$ , pues  $\varepsilon \in \mathfrak{m}_S^\ell(B, C)$ ,  $\alpha \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes N, C)$  y

$$\begin{aligned} \varepsilon\beta(s \otimes n) &= \varepsilon(s\beta'(n)) = s\varepsilon\beta'(n) \\ &= s\alpha'(n) = s\alpha(1 \otimes n) = \alpha(s \otimes n). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $S \otimes N$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo. □

**Observación 5.1.** Un  $S$ -módulo izquierdo  $N$  es  $\varrho$ -proyectivo si  $N$  es retracto de  $S \otimes_R N$  (ver [7, p. 29]). Entonces  $N$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

**Ejemplo 5.2.** Un epimorfismo de  $S$ -módulos que se descompone, también se descompone como morfismo de  $R$ -módulos.

**Teorema 5.2.** [4, E IX.1.5] Sean  $\varphi : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos,  $F = F_\varphi : \mathfrak{m}_S^\ell \rightarrow \mathfrak{m}_R^\ell$  funtor de cambio de anillos y  $\mathcal{E}' = \{\varepsilon' : B \rightarrow C, \text{ epimorfismo en } \mathfrak{m}_S^\ell \mid F\varepsilon' : FB \rightarrow FC \text{ se descompone en } \mathfrak{m}_R^\ell\}$ . Entonces  $\mathcal{E}'$  es una clase proyectiva.

*Demostración:* Según Corolario 4.1,  $F$  preserva epimorfismos, luego  $\mathcal{E}' = \{\varepsilon' : B \twoheadrightarrow C \text{ en } \mathfrak{m}_S^\ell \mid \varepsilon' : B \twoheadrightarrow C \text{ se descompone en } \mathfrak{m}_R^\ell\}$ .

(1)  $\mathcal{E}'$  es cerrada. Si  $\zeta \in C(\mathcal{E}')$ , entonces  $\zeta \in \mathcal{E}'$ .

Sea  $\zeta \in \mathfrak{m}_S^\ell(B, C)$ , luego  $C \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ . Por Lema 5.1  $S \otimes_R C$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo. Como  $\zeta \in C(\mathcal{E}')$ ,  $S \otimes_R C$  es proyectivo relativo a  $\zeta$ . Así, dado  $\alpha \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes_R C, C)$ ,  $\exists \nu \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes_R C, B)$  tal que  $\alpha = \zeta\nu$ . Puesto que  $G \longrightarrow F$ ,  $\eta_{CC} : \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes_R C, C) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_R^\ell(C, C)$ . Así, para  $\alpha$  existe  $\alpha' \in \mathfrak{m}_R^\ell(C, C)$  tal que  $\eta_{CC}(\alpha) = \alpha'$ . Como  $\alpha'(m) = \alpha(1 \otimes m)$ , definiendo

$\alpha(1 \otimes m) := 1m = id_C(m)$ , se obtiene  $\alpha' = id_C$ .

Por otro lado,  $\eta_{CB} : m_S^\ell(S \otimes_R C, B) \xrightarrow{\sim} m_R^\ell(C, B)$ . Así, para  $\nu$  existe  $\nu' \in m_R^\ell(C, B)$  tal que  $\eta_{CB}(\nu) = \nu'$ . Por definición,  $\nu'(m) = \nu(1 \otimes m)$ .

De modo que  $\zeta\nu'(m) = \zeta\nu(1 \otimes m) = \alpha(1 \otimes m) = id_C(m)$ . Luego,  $\zeta : B \twoheadrightarrow C$  en  $m_R^\ell$  se descompone, y así  $\zeta \in \mathcal{E}'$ .

(2) Dado  $A \in |m_S^\ell|$ ,  $\exists \varepsilon'_0 : P \twoheadrightarrow A$  en  $\mathcal{E}'$ , donde  $P$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

En efecto, como  $\varphi : R \rightarrow S$  es un morfismo de anillos y  $A$  es un  $S$ -módulo izquierdo,  $A$  es un  $R$ -módulo izquierdo. Sea  $P := S \otimes_R A$ . Entonces por Lema 5.1  $P$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

Por Proposición 3.3, se define el epimorfismo  $\varepsilon'_0 : S \otimes_R A \twoheadrightarrow A$  en  $m_S^\ell$  por  $\varepsilon'_0(s \otimes a) = sa$ .

Se prueba que el epimorfismo  $\varepsilon'_0$  se descompone en  $m_R^\ell$ , pues existe  $\beta \in m_R^\ell(A, S \otimes A)$  dado por  $\beta(a) = 1 \otimes a$  tal que  $\varepsilon'_0\beta = id_A$ .

En efecto, aplicando Proposición 3.3, las estructuras de  $R$ -módulos de  $S$ , de  $S$ -módulo de  $S \otimes A$  y de  $R$ -módulo de  $S \otimes A$ , se verifica que  $\beta$  es  $R$ -lineal pues para  $t \in R$  se tiene

$$\beta(ta) = 1 \otimes_R ta = 1 \cdot t \otimes_R a = 1_S \varphi(t) \otimes_R a = \varphi(t)(1 \otimes a) = t(1 \otimes a) = t\beta(a).$$

Así  $\varepsilon'_0 \in \mathcal{E}'$ .

De (1) y (2), se sigue que  $\mathcal{E}'$  es una clase proyectiva. □

Puesto que  $\mathcal{E}' = \{\varepsilon' : B \rightarrow C \text{ en } m_S^\ell \mid \varepsilon' : B \rightarrow C \text{ en } m_R^\ell \text{ se descompone}\}$  es una clase proyectiva en la categoría abeliana de  $S$ -módulos izquierdos, usando Proposición 5.4 y Corolario 5.1 se obtiene

**Corolario 5.2.** Cada  $S$ -módulo  $N$  tiene una única resolución proyectiva  $P$  relativa a la familia de todos los epimorfismos de  $S$ -módulos que se descomponen como morfismos de  $R$ -módulos.

**6. Un Método para la Construcción de RPR.** Dados  $\varrho : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos unitarios y  $M$  un  $S$ -módulo izquierdo. En condiciones adecuadas, es posible construir una resolución proyectiva de  $M$ , relativo a la familia de los epimorfismos de  $S$ -módulos, que se descomponen como morfismos de  $R$ -módulos [1].

Dado un complejo de cadenas  $(B, d^B)$  inmerso en un diagrama inicial en  $m_S^\ell$  sujeto a tres condiciones iniciales, se desea hallar un complejo de cadenas  $(A, d)$  que tiene el mismo tipo de homotopía que  $(B, -d^B)$  como complejo de cadenas de  $R$ -módulos. Para ello, la herramienta es cono de mapeo de una aplicación de cadenas  $\varphi : (A, d) \rightarrow (B, -d^B)$  y se exige que  $C_\varphi$  sea contráctil. Según Teorema 2.1 será necesario construir una homotopía de contracción de  $C_\varphi$ , la cual se aplicará a la existencia de la resolución proyectiva referida de  $M$ . Estos hechos son establecidos con los dos resultados siguientes Teorema 6.1 y Corolario 6.1:

Se denotará por  ${}_S\mathcal{C}_\eta$  la categoría de complejos de cadenas de  $S$ -módulos izquierdos. Dado el diagrama en  $m_S^\ell$

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & \downarrow d_2^B & & & & \\ & & B_1 & \xleftarrow{\psi_1} & A_{01} & \xleftarrow{d_{11}^0} & A_{11} & \xleftarrow{d_{21}^0} & \dots & : f_1(DD) \\ & & \downarrow d_1^B & & & & & & & \\ & & B_0 & \xleftarrow{\psi_0} & A_{00} & \xleftarrow{d_{10}^0} & A_{10} & \xleftarrow{d_{20}^0} & \dots & : f_0(DD) \end{array} \tag{6.1}$$

satisfaciendo las tres condiciones:

- 1) La columna y las filas son complejos de cadenas. Es decir,  $B$  y  $f_q(DD) \in |{}_S\mathcal{C}_\eta|$  para  $q \geq 0$ .
- 2)  $\forall p, q \geq 0$ , existen  $\bar{A}_{pq} \in |m_R^\ell|$ ;  $s_{pq} \in m_S^\ell(A_{pq}, S \otimes \bar{A}_{pq})$  y  $t_{pq} \in m_S^\ell(S \otimes \bar{A}_{pq}, A_{pq})$  tales que  $t_{pq}s_{pq} = id_{A_{pq}}$ .
- 3) Para cada  $q \geq 0$ ,  $f_q(DD) \in |{}_R\mathcal{C}_\eta|$  es contráctil con homotopía de contracción  $h_{0q}^0 : B_q \rightarrow A_{0q}$  y  $h_{p+1,q}^0 : A_{pq} \rightarrow A_{p+1,q}$  ( $p \geq 0$ ).

Entonces se va a modificar este diagrama agregando los morfismos en  $m_S^\ell$

$$d_{pq}^r : A_{pq} \rightarrow A_{p+r-1, q-r} \quad (p, q \geq 0 \text{ y } 1 \leq r \leq q).$$

Sea, para cada  $n \geq 0$ ,  $A_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{pq}$ . Para  $n \geq 1$ ,  $d_n : A_n \rightarrow A_{n-1}$  es dado

$$\text{por } d_n := \sum_{r=1}^n d_{0n}^r + \sum_{p=1}^n \sum_{r=0}^{n-p} d_{p, n-p}^r. \tag{6.2}$$



Sea  $\varphi = \{\varphi_n : A_n \rightarrow B_n\}_{n \geq 0}$ , la familia de morfismos en  $\mathfrak{m}_S^\ell$ , dados por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & \text{si } x \in A_{0n} \\ 0 & \text{si } x \in A_{p,n-p} \ (p > 0) \end{cases}.$$

Se van a definir las flechas  $d_{pq}^r$  de tal manera que  $(A, d)$  se convierta en un complejo de cadenas de  $S$ -módulos, y que  $\varphi : (A, d) \rightarrow (B, -d^B)$  se convierta en una equivalencia homotópica de complejos de cadenas de  $R$ -módulos.

**Definición 6.1.** [1, D A.3] Se definen los morfismos en  $\mathfrak{m}_S^\ell$ ,  $d_{pq}^r : A_{pq} \rightarrow A_{p+r-1, q-r}$  ( $p \geq 0$  y  $1 \leq r \leq q$ ), recursivamente por  $d_{pq}^r = e_{pq}^r s_{pq}$ , donde  $e_{pq}^r : S \otimes \bar{A}_{pq} \rightarrow A_{p+r-1, q-r}$  ( $p \geq 0$  y  $1 \leq r \leq q$ ) es un morfismo en  $\mathfrak{m}_S^\ell$  definido por

$$e_{pq}^r(x) = \begin{cases} -h_{0, q-1}^0 d_q^B \psi_q t_{0q}(x) & \text{si } p = 0 \ \& \ r = 1 \\ -\sum_{k=1}^{r-1} h_{r-1, q-r}^0 d_{k-1, q-k}^{r-k} d_{0q}^k t_{0q}(x) & \text{si } p = 0 \ \& \ 1 < r \leq q \\ -\sum_{k=0}^{r-1} h_{p+r-1, q-r}^0 d_{p+k-1, q-k}^{r-k} d_{pq}^k t_{pq}(x) & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

para cada  $x = 1 \otimes \bar{a} \in S \otimes \bar{A}_{pq}$ .

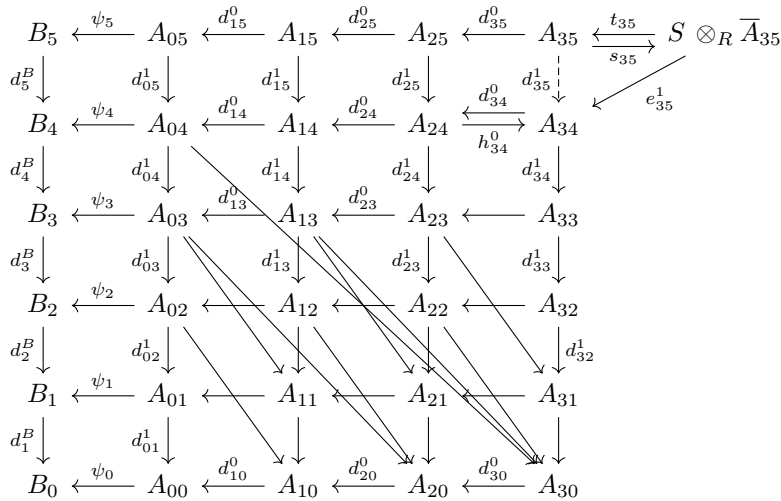


Figura 6.1: Construcción recursiva de morfismos  $d_{pq}^r$ .

**Ejemplo 6.1.** Verificar que  $d_{30}^0 d_{13}^3 = -d_{03}^3 d_{13}^0 - d_{12}^2 d_{13}^1 - d_{21}^1 d_{13}^2$ .

*Demostración:* Se puede realizar siguiendo la prueba de Proposición 6.1 o bien observando el diagrama de Figura 6.1. □

Como  $\text{deg}(d_{pq}^k) = (k-1, -k)$  y  $\text{deg}(d_{p+k-1, q-k}^{r-k}) = (r-k-1, -r+k)$ :

$$A_{0q} \xrightarrow{d_{0q}^k} A_{k-1, q-k} \xrightarrow{d_{k-1, q-k}^{r-k}} A_{r-2, q-r} \ \& \ A_{pq} \xrightarrow{d_{pq}^k} A_{p+k-1, q-k} \xrightarrow{d_{p+k-1, q-k}^{r-k}} A_{p+r-2, q-r}.$$

Luego, tienen sentido las composiciones  $d_{p+r-1, q-r}^0 d_{pq}^r : A_{pq} \rightarrow A_{p+r-2, q-r}$ ,

$$d_{k-1, q-k}^{r-k} d_{0q}^k : A_{0q} \rightarrow A_{r-2, q-r} \ \text{ y } \ d_{p+k-1, q-k}^{r-k} d_{pq}^k : A_{pq} \rightarrow A_{p+r-2, q-r}.$$

Como  $\mathfrak{m}_S^\ell$  es una categoría abeliana, está definida la suma en  $\mathfrak{m}_S^\ell(A_{pq}, A_{p+r-2, q-r})$ .

Para probar que  $(A, d)$  es un complejo de cadenas se necesita la siguiente

**Proposición 6.1.** [1, P A.4] Se tiene  $\psi_{q-1} d_{0q}^1 = -d_q^B \psi_q$  y

$$d_{p+r-1, q-r}^0 d_{pq}^r = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{r-1} d_{k-1, q-k}^{r-k} d_{0q}^k & \text{si } p = 0, \ 1 < r \leq q \\ -\sum_{k=0}^{r-1} d_{p+k-1, q-k}^{r-k} d_{pq}^k & \text{si } p > 0, \ 1 \leq r \leq q \end{cases}.$$



**Proposición 6.2.**  $(A, d)$  es un complejo de cadenas de  $S$ -módulos .

*Demostración:* Como  $A_{pq} \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$  y  $\mathfrak{m}_S^\ell$  es una categoría abeliana,  $A_n := \bigoplus_{p+q=n} A_{pq} \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$  para  $n \geq 0$ . Por la definición recursiva de  $d_{pq}^r$  dada en Definición 6.1, como la composición de morfismos de  $S$ -módulos,  $d_{pq}^r$  es un morfismo de  $S$ -módulos para  $p \geq 0$  y  $1 \leq r \leq q$ . Luego, como suma de morfismos de  $S$ -módulos,  $d_n : A_n \rightarrow A_{n-1}$  dado por

$$d_n = \sum_{r=1}^n d_{0n}^r + \sum_{p=1}^n \sum_{r=0}^{n-p} d_{p,n-p}^r$$

es morfismo en  $\mathfrak{m}_S^\ell$  para  $n \geq 1$ . Falta verificar que  $d_n d_{n+1} = 0$  para  $n \geq 1$ .

Para  $n = 1$ ,  $d_1 d_2 = 0$ . Este hecho se obtiene usando Proposición 6.1 y la semi-exactitud de la fila cero del diagrama (6.1).

Para  $n = 2$ ,  $d_2 d_3 = 0$ .

En efecto,  $d_2 = d_{02}^1 + d_{02}^2 + d_{11}^0 + d_{11}^1 + d_{20}^0$  y  $d_3 = d_{03}^1 + d_{03}^2 + d_{03}^3 + d_{12}^0 + d_{12}^1 + d_{12}^2 + d_{21}^0 + d_{21}^1 + d_{30}^0$  y  $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in A_{03} \oplus A_{12} \oplus A_{21} \oplus A_{30} = A_3$ ; de modo que  $d_3(a) = d_{03}^1(a_1) + d_{03}^2(a_1) + d_{03}^3(a_1) + d_{12}^0(a_2) + d_{12}^1(a_2) + d_{12}^2(a_2) + d_{21}^0(a_3) + d_{21}^1(a_3) + d_{30}^0(a_4)$  calculando

$$\left. \begin{aligned} d_{02}^1 d_3(a) &= d_{02}^1 d_{03}^1(a_1) + d_{02}^1 d_{12}^0(a_2) \\ d_{02}^2 d_3(a) &= d_{02}^2 d_{03}^1(a_1) + d_{02}^2 d_{12}^0(a_2) \\ d_{11}^0 d_3(a) &= d_{11}^0 d_{03}^2(a_1) + d_{11}^0 d_{12}^1(a_2) + d_{11}^0 d_{21}^0(a_3) \\ d_{11}^1 d_3(a) &= d_{11}^1 d_{03}^2(a_1) + d_{11}^1 d_{12}^1(a_2) + d_{11}^1 d_{21}^0(a_3) \\ d_{20}^0 d_3(a) &= d_{20}^0 d_{03}^3(a_1) + d_{20}^0 d_{12}^2(a_2) + d_{20}^0 d_{21}^1(a_3) + d_{20}^0 d_{30}^0(a_4) \end{aligned} \right\} \tag{6.3}$$

Ahora se tiene para  $p = 0$  por Proposición 6.1

$$d_{20}^0 d_{03}^3 = - \sum_{k=1}^{3-1} d^{3-k} d^k = -d_{02}^2 d_{03}^1 - d_{11}^1 d_{03}^2, \quad d_{11}^0 d_{03}^2 = - \sum_{k=1}^{2-1} d^{2-k} d^k = -d_{02}^1 d_{03}^1.$$

Para  $p > 0$  por Proposición 6.1

$$d_{20}^0 d_{12}^2 = - \sum_{k=0}^1 d^{2-k} d^k = -d_{02}^2 d_{12}^0 - d_{11}^1 d_{12}^1, \quad d_{11}^0 d_{12}^1 = - \sum_{k=0}^0 d^{1-k} d^k = -d_{02}^1 d_{12}^0;$$

$$d_{20}^0 d_{21}^1 = - \sum_{k=0}^0 d^{1-k} d^k = -d_{11}^1 d_{21}^0.$$

Por semi-exactitud de las filas de (6.1),  $d_{11}^0 d_{21}^0 = 0 = d_{20}^0 d_{30}^0$ . Sumando las igualdades de (6.3) de izquierda a derecha, columna por columna  $d_2 d_3(a) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ .

En general,  $d_n d_{n+1} = 0$ .

En efecto, como  $d_n = \sum_{r=1}^n d_{0n}^r + \sum_{p=1}^n \sum_{r=0}^{n-p} d_{p,n-p}^r$  y para  $d_{n+1} : A_{n+1} \rightarrow A_n$ ,

$a = (a_1, \dots, a_{n+2}) \in A_{n+1}$ :  $d_{n+1}(a) = \sum_{r=1}^{n+1} d_{0,n+1}^r(a_1) + \sum_{r=0}^n d_{1,n}^r(a_2) + \dots + d_{n+1,0}^0(a_{n+2})$ ; de modo que

$$\left. \begin{aligned} d_{0n}^1 d_{n+1}(a) &= d_{0n}^1 d_{0,n+1}^1(a_1) + d_{0n}^1 d_{1,n}^0(a_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ d_{0n}^n d_{n+1}(a) &= d_{0n}^n d_{0,n+1}^1(a_1) + d_{0n}^n d_{1,n}^0(a_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ d_{n0}^0 d_{n+1}(a) &= d_{n0}^0 d_{0,n+1}^{n+1}(a_1) + d_{n0}^0 d_{1,n}^n(a_2) + \dots + d_{n0}^0 d_{n+1,0}^0(a_{n+2}) \end{aligned} \right\}$$

Usando la semi-exactitud de las filas del diagrama (6.1), aplicando Proposición 6.1 como en el caso  $n = 2$  y sumando columna a columna este arreglo, se deduce que  $d_n d_{n+1}(a) = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{n+2\text{-veces}} = 0$ .  $\square$

Usando Proposición 6.1 y la semi-exactitud de la filas del diagrama (6.1) se obtiene

**Proposición 6.3.** La aplicación  $\varphi : (A, d) \rightarrow (B, -d^B)$  es un morfismo de complejos de cadenas de  $S$ -módulos.

**Proposición 6.4.** Para el morfismo de complejos de cadenas  $\varphi : (A, d) \rightarrow (B, -d^B)$  de  $S$ -módulos se definen  $(C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$  y  $d_n^{C_\varphi}(b_n, a_{n-1}) = (-d_n^B b_n - \varphi_{n-1} a_{n-1}, -d_{n-1} a_{n-1})$ , entonces  $C_\varphi$  es un complejo de cadenas de  $S$ -módulos.

*Demostración:* Basta tomar  $\mu = \varphi$ ,  $(C, d^C) = (A, d)$ ,  $(D, d^D) = (B, -d^B)$  en Ejemplo 2.1.  $\square$

Para mostrar que  $\varphi$  es una equivalencia homotópica de complejos de cadenas de  $R$ -módulos, se va a construir los morfismos  $h_{p'q'}^r$  en  $m_R^l$ , satisfaciendo Teorema 6.1.

**Definición 6.2.** [1, D A.5] Se definen  $h_{r,q-r}^r : B_q \rightarrow A_{r,q-r}$  y  $h_{p+r+1,q-r}^r : A_{pq} \rightarrow A_{p+r+1,q-r}$  ( $0 < r \leq q$ ,  $p \geq 0$ ), recursivamente por  $h_{p+r+1,q-r}^r = - \sum_{i=0}^{r-1} h_{p+r+1,q-r}^0 d_{p+i+1,q-i}^{r-i} h_{p+i+1,q-i}^i$  ( $0 < r \leq q$ ,  $p \geq -1$ ).

**Ejemplo 6.2.**  $h_{11}^1 = -h_{11}^0 d_{02}^1 h_{02}^0$  y  $h_{30}^2 = -h_{30}^0 d_{12}^2 h_{12}^0 - h_{30}^0 d_{21}^1 h_{21}^1$

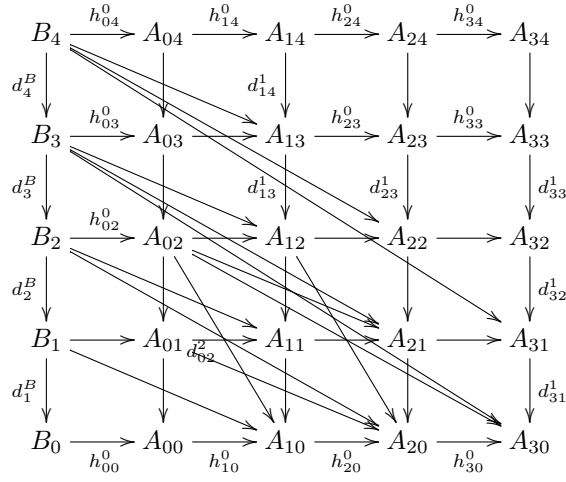


Figura 6.2: Construcción recursiva de morfismos  $h_{p'q'}^r$ .

Teniendo en cuenta definidos los morfismos  $d_{pq}^r$  y  $h_{p'q'}^r$ ; adoptando las notaciones  $d_{0q}^0 = \psi_q$ ,  $d_{-1,q}^1 = d_q^B$ ,  $d_{-1,q}^r = 0 \forall r > 1$  y  $d_{-1,q}^0 = 0$  se tiene:

**Lema 6.1.** Se verifican las dos fórmulas

$$h_{pq}^0 d_{pq}^0 + d_{p+1,q}^0 h_{p+1,q}^0 = id_{A_{pq}} \quad , \quad \sum_{i=0}^r h_{p+r,q-r}^{r-i} d_{pq}^i + \sum_{i=0}^r d_{p+i+1,q-i}^{r-i} h_{p+i+1,q-i}^i = 0 \quad (r > 0) .$$

*Demostración:* La prueba está dada en [1, Proof of Theorem A.1].  $\square$

$$\text{Sea } \hat{h}_n = \sum_{r=0}^n h_{r,n-r}^r . \tag{6.4}$$

**Ejemplo 6.3.**  $d_3 \hat{h}_3 b + \hat{h}_2 d_3^B b = 0$  para  $b \in B_3$ .

Puesto que  $\hat{h}_3 = h_{03}^0 + h_{12}^1 + h_{21}^2 + h_{30}^3$ ,  $d_3 = d_{03}^0 + d_{03}^1 + d_{03}^2 + d_{12}^0 + d_{12}^1 + d_{12}^2 + d_{21}^0 + d_{21}^1 + d_{30}^0$ ,

$$\begin{aligned} d_3 \hat{h}_3 b &= d_3 (h_{03}^0 b + h_{12}^1 b + h_{21}^2 b + h_{30}^3 b) \\ &= d_{03}^1 h_{03}^0 b + d_{03}^2 h_{03}^0 b + d_{03}^3 h_{03}^0 b + d_{12}^0 h_{12}^1 b \\ &\quad + d_{12}^1 h_{12}^1 b + d_{12}^2 h_{12}^1 b + d_{21}^0 h_{21}^2 b + d_{21}^1 h_{21}^2 b + d_{30}^0 h_{30}^3 b ; \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\hat{h}_2 = h_{02}^0 + h_{11}^1 + h_{20}^2 \text{ y}$$

$$\hat{h}_2 d_3^B b = h_{02}^0 d_3^B b + h_{11}^1 d_3^B b + h_{20}^2 d_3^B b ; \tag{6.6}$$

Sumando (6.5) y (6.6) :  
 $d_3 \hat{h}_3 b + \hat{h}_2 d_3^B b = (h_{02}^1 d_{-1,3}^0 b + h_{02}^0 d_{-1,3}^1 b + d_{03}^1 h_{03}^0 b + d_{12}^0 h_{12}^1 b) + (h_{11}^2 d_{-1,3}^0 b + h_{11}^1 d_{-1,3}^1 b + h_{11}^0 d_{-1,3}^2 b + d_{03}^2 h_{03}^0 b + d_{12}^1 h_{12}^1 b + d_{21}^0 h_{21}^2 b) + (h_{20}^3 d_{-1,3}^0 b + h_{20}^2 d_{-1,3}^1 b + h_{20}^1 d_{-1,3}^2 b + h_{20}^0 d_{-1,3}^3 b + d_{03}^3 h_{03}^0 b + d_{12}^2 h_{12}^1 b + d_{21}^1 h_{21}^2 b + d_{30}^0 h_{30}^3 b)$ ;

$$\begin{aligned} d_3 \hat{h}_3 b + \hat{h}_2 d_3^B b &= \sum_{i=0}^1 h_{02}^{1-i} d_{-1,3}^i b + \sum_{i=0}^1 d_{i,3-i}^{1-i} h_{i,3-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, 3, 1) \\ &+ \sum_{i=0}^2 h_{11}^{2-i} d_{-1,3}^i b + \sum_{i=0}^2 d_{i,3-i}^{2-i} h_{i,3-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, 3, 2) \\ &+ \sum_{i=0}^3 h_{20}^{3-i} d_{-1,3}^i b + \sum_{i=0}^3 d_{i,3-i}^{3-i} h_{i,3-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, 3, 3) . \end{aligned}$$

Por Lema 6.1  $d_3 \hat{h}_3 b + \hat{h}_2 d_3^B b = 0$ . □

$$\text{Sea } \tilde{h}_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r \tag{6.7}$$

**Ejemplo 6.4.**  $d_3 \tilde{h}_3 a + \hat{h}_2 \varphi_2 a + \tilde{h}_2 d_2 a = id_{A_2}(a)$  para  $a = (a_1, a_2, a_3) \in A_2 = A_{02} \oplus A_{11} \oplus A_{20}$ .  
 Puesto que  $\tilde{h}_3 a = h_{12}^0 a_1 + h_{21}^1 a_1 + h_{30}^2 a_1 + h_{21}^0 a_2 + h_{30}^1 a_2 + h_{30}^0 a_3$  y  $d_3 = d_{03}^1 + d_{03}^2 + d_{03}^3 + d_{12}^0 + d_{12}^1 + d_{12}^2 + d_{21}^0 + d_{21}^1 + d_{30}^0$ ,

$$\begin{aligned} d_3 \tilde{h}_3 a &= d_{12}^0 h_{12}^0 a_1 + d_{12}^1 h_{12}^1 a_1 + d_{12}^2 h_{12}^2 a_1 + d_{21}^0 h_{21}^1 a_1 + d_{21}^1 h_{21}^0 a_2 \\ &+ d_{21}^1 h_{21}^1 a_1 + d_{21}^1 h_{21}^0 a_2 + d_{30}^0 h_{30}^2 a_1 + d_{30}^0 h_{30}^1 a_2 + d_{30}^0 h_{30}^0 a_3 ; \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_2 &= h_{02}^0 + h_{11}^1 + h_{20}^2 \text{ y} \\ \hat{h}_2 \varphi_2 a &= h_{02}^0 \varphi_2 a + h_{11}^1 \varphi_2 a + h_{20}^2 \varphi_2 a ; \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 &= h_{11}^0 + h_{20}^1 + h_{20}^0 \text{ y } d_2 = d_{02}^1 + d_{02}^2 + d_{11}^0 + d_{11}^1 + d_{20}^0 , \\ d_2 a &= \underbrace{d_{02}^1 a_1}_{\in A_{01}} + \underbrace{d_{02}^2 a_1}_{\in A_{10}} + \underbrace{d_{11}^0 a_2}_{\in A_{01}} + \underbrace{d_{11}^1 a_2}_{\in A_{10}} + \underbrace{d_{20}^0 a_3}_{\in A_{10}} ; \\ \tilde{h}_2 d_2 a &= h_{11}^0 d_{02}^1 a_1 + h_{11}^0 d_{11}^0 a_2 + h_{20}^1 d_{02}^1 a_1 + h_{20}^1 d_{11}^0 a_2 \\ &+ h_{20}^0 d_{02}^2 a_1 + h_{20}^0 d_{11}^1 a_2 + h_{20}^0 d_{20}^0 a_3 ; \end{aligned} \tag{6.10}$$

sumando (6.8), (6.9) y (6.10) :  
 $d_3 \tilde{h}_3 a + \hat{h}_2 \varphi_2 a + \tilde{h}_2 d_2 a = (h_{02}^0 \psi_2 a_1 + d_{12}^0 h_{12}^1 a_1) + (h_{11}^0 d_{11}^0 a_2 + d_{21}^0 h_{21}^1 a_2) + (h_{20}^0 d_{20}^0 a_3 + d_{30}^0 h_{30}^0 a_3) + (h_{11}^1 d_{02}^1 a_1 + h_{11}^0 d_{02}^2 a_1 + d_{12}^1 h_{12}^2 a_1 + d_{21}^0 h_{21}^1 a_1) + (h_{20}^1 d_{02}^1 a_1 + h_{20}^0 d_{02}^2 a_1 + h_{20}^0 d_{02}^2 a_1 + d_{12}^2 h_{12}^2 a_1 + d_{21}^1 h_{21}^1 a_1 + d_{30}^0 h_{30}^2 a_1) + (h_{20}^1 d_{11}^0 a_2 + h_{20}^0 d_{11}^1 a_2 + d_{21}^1 h_{21}^0 a_2 + d_{30}^0 h_{30}^1 a_2)$

$$\begin{aligned} &= id_{A_2}(a) + \left( \sum_{i=0}^1 h_{11}^{1-i} d_{02}^i + \sum_{i=0}^1 d_{i+1,2-i}^{1-i} h_{i+1,2-i}^i \right) (a_1) \text{ para } (p, q, r) = (0, 2, 1) \\ &+ \left( \sum_{i=0}^2 h_{20}^{2-i} d_{02}^i + \sum_{i=0}^2 d_{i+1,2-i}^{2-i} h_{i+1,2-i}^i \right) (a_1) \text{ para } (p, q, r) = (0, 2, 2) \\ &+ \left( \sum_{i=0}^1 h_{20}^{1-i} d_{11}^i + \sum_{i=0}^1 d_{2+i,1-i}^{1-i} h_{2+i,1-i}^i \right) (a_2) \text{ para } (p, q, r) = (1, 1, 1) . \end{aligned}$$

Por Lema 6.1  $d_3 \tilde{h}_3 a + \hat{h}_2 \varphi_2 a + \tilde{h}_2 d_2 a = id_{A_2}(a)$ . □

**Lema 6.2.** Si se cumplen las igualdades

$$h_{pq}^0 d_{pq}^0 + d_{p+1,q}^0 h_{p+1,q}^0 = id_{A_{pq}} , \quad \sum_{i=0}^r h_{p+r,q-r}^{r-i} d_{pq}^i + \sum_{i=0}^r d_{p+i+1,q-i}^{r-i} h_{p+i+1,q-i}^i = 0 \quad (r > 0),$$

entonces

$$d_n \hat{h}_n + \hat{h}_{n-1} d_n^B = 0 \quad \text{y} \quad d_n \tilde{h}_n + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1} + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1} = id_{A_{n-1}} . \tag{6.11}$$

*Demostración:* Sea  $(b, a) \in (C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$ . Entonces procediendo como en Ejemplo 6.3

$$\begin{aligned}
 d_n \hat{h}_n b + \hat{h}_{n-1} d_n^B b &= \sum_{i=0}^1 h_{0,n-1}^{1-i} d_{-1,n}^i b + \sum_{i=0}^1 d_{i,n-i}^{1-i} h_{i,n-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, n, 1) \\
 &+ \sum_{i=0}^2 h_{1,n-2}^{2-i} d_{-1,n}^i b + \sum_{i=0}^2 d_{i,n-i}^{2-i} h_{i,n-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, n, 2) \\
 &\vdots \\
 &+ \sum_{i=0}^n h_{n-1,0}^{n-i} d_{-1,n}^i b + \sum_{i=0}^n d_{i,n-i}^{n-i} h_{i,n-i}^i b \text{ para } (p, q, r) = (-1, n, n).
 \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis,  $d_n \hat{h}_n b + \hat{h}_{n-1} d_n^B b = 0$ .

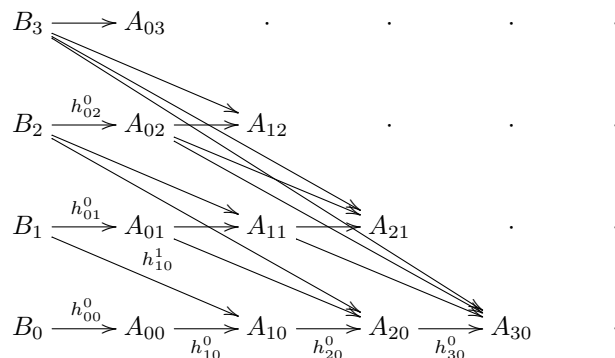
Por otro lado, siguiendo Ejemplo 6.4

$$\begin{aligned}
 d_n \tilde{h}_n a + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1} a + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1} a &= id_{A_{n-1}}(a) \\
 + \left( \sum_{i=0}^1 h_{1,n-2}^{1-i} d_{0,n-1}^i + \sum_{i=0}^1 d_{i+1,n-1-i}^{1-i} h_{i+1,n-1-i}^i \right) (a_1) &\text{ para } (p, q, r) = (0, n-1, 1) \\
 \vdots \\
 + \left( \sum_{i=0}^{n-1} h_{n-1,0}^{n-1-i} d_{0,n-1}^i + \sum_{i=0}^{n-1} d_{i+1,n-1-i}^{n-1-i} h_{i+1,n-1-i}^i \right) (a_1) &\text{ para } (p, q, r) = (0, n-1, n-1) \\
 + \left( \sum_{i=0}^1 h_{2,n-3}^{1-i} d_{1,n-2}^i + \sum_{i=0}^1 d_{i+2,n-2-i}^{1-i} h_{i+2,n-2-i}^i \right) (a_2) &\text{ para } (p, q, r) = (1, n-2, 1) \\
 \vdots \\
 + \left( \sum_{i=0}^{n-2} h_{n-1,0}^{n-2-i} d_{1,n-2}^i + \sum_{i=0}^{n-2} d_{i+2,n-2-i}^{n-2-i} h_{i+2,n-2-i}^i \right) (a_2) &\text{ para } (p, q, r) = (1, n-2, n-2) \\
 + \dots \\
 + \left( \sum_{i=0}^1 h_{n-2,1}^{1-i} d_{n-3,2}^i + \sum_{i=0}^1 d_{n-2+i,2-i}^{1-i} h_{n-2+i,2-i}^i \right) (a_{n-2}) &\text{ para } (p, q, r) = (n-3, 2, 1) \\
 + \left( \sum_{i=0}^2 h_{n-1,0}^{2-i} d_{n-3,2}^i + \sum_{i=0}^2 d_{n-2+i,2-i}^{2-i} h_{n-2+i,2-i}^i \right) (a_{n-2}) &\text{ para } (p, q, r) = (n-3, 2, 2) \\
 + \left( \sum_{i=0}^1 h_{n-1,0}^{1-i} d_{n-2,1}^i + \sum_{i=0}^1 d_{n-1+i,1-i}^{1-i} h_{n-1+i,1-i}^i \right) (a_{n-1}) &\text{ para } (p, q, r) = (n-2, 1, 1),
 \end{aligned}$$

donde  $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in A_{n-1} = A_{0,n-1} \oplus \dots \oplus A_{n-2,1} \oplus A_{n-1,0}$ .

Por hipótesis,  $d_n \tilde{h}_n a + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1} a + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1} a = id_{A_{n-1}}(a)$ . □

Considerando el diagrama



$h_1 : (C_\varphi)_0 = B_0 \oplus \{0\} \rightarrow (C_\varphi)_1 = B_1 \oplus A_0$  es dado por

$$h_1 = -h_{00}^0 ;$$

$h_2 : (C_\varphi)_1 \rightarrow (C_\varphi)_2 = B_2 \oplus A_1$  es dado por

$$h_2 = (-h_{01}^0 - h_{10}^1) + (-h_{10}^0);$$

$h_3 : (C_\varphi)_2 \rightarrow (C_\varphi)_3 = B_3 \oplus A_2$  es dado por  $h_3 = (-h_{02}^0 - h_{11}^1 - h_{20}^2) + (-h_{11}^0 - h_{20}^1) + (-h_{20}^0)$ . Luego,

$$h_3 = h_{2+1} = - \sum_{p=-1}^{2-1} \sum_{r=0}^{2-1-p} h_{p+r+1, 2-1-p-r}^r.$$

En general, para cada  $n \geq 0$ ,  $h_{n+1} : (C_\varphi)_n \rightarrow (C_\varphi)_{n+1}$  es dado por

$$h_{n+1} = - \sum_{p=-1}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r.$$

Recordando el concepto de homotopía de contracción dada en Definición 2.1, con las dos identidades (6.11) del lema anterior se puede demostrar el resultado siguiente:

**Teorema 6.1.** [1, T A.1] Sea  $C_\varphi$  el cono de mapeo de  $\varphi$ ; i.e., se define  $(C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$  y  $d_n^{C_\varphi} : (C_\varphi)_n \rightarrow (C_\varphi)_{n-1}$  por

$$d_n^{C_\varphi}(b, a) = (-d_n^B b - \varphi_{n-1} a, -d_{n-1} a). \quad (6.12)$$

Entonces, la familia de morfismos en  $\mathfrak{m}_R^\ell$ ,  $\{h_{n+1} : (C_\varphi)_n \rightarrow (C_\varphi)_{n+1}\}_{n \geq 0}$ , definidos por

$$h_{n+1} = - \sum_{p=-1}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r, \quad (6.13)$$

es una homotopía de contracción de cadenas de  $C_\varphi$ .

*Demostración:* Sean  $\hat{h}_n = \sum_{r=0}^n h_{r, n-r}^r$  y  $\tilde{h}_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r$ , entonces

$$h_{n+1} = -\hat{h}_n - \tilde{h}_n.$$

$$\text{Sea } C_\varphi : (C_\varphi)_0 \xleftarrow[d_1^{C_\varphi}]{h_1} (C_\varphi)_1 \xleftarrow[d_2^{C_\varphi}]{h_2} \cdots \xleftarrow[d_n^{C_\varphi}]{h_n} (C_\varphi)_n \xleftarrow[d_{n+1}^{C_\varphi}]{h_{n+1}} \cdots$$

Se verifica que  $d_1^{C_\varphi} h_1 = id_{(C_\varphi)_0}$ .

En efecto, para  $(b, 0) \in (C_\varphi)_0 = B_0 \oplus \{0\} : h_1(b, 0) = -\hat{h}_0(b)$ ,

$$\begin{aligned} d_1^{C_\varphi} h_1(b, 0) &= d_1^{C_\varphi}(0, -\hat{h}_0(b)) \\ &= \left( -d_1^B(0) - \varphi_0(-\hat{h}_0(b)), -d_0(-\hat{h}_0(b)) \right) \\ &= (\varphi_0 \hat{h}_0(b), d_0 \hat{h}_0(b)) \quad ; \quad d_0 = 0, \varphi_0 = \psi_0 \\ &= (\psi_0 \hat{h}_0(b), 0) \quad ; \quad \hat{h}_0 = h_{00}^0 \text{ y } f_0(DD) \text{ es contráctil} \\ &= (id_{B_0}(b), 0) = id_{(C_\varphi)_0}(b, 0). \end{aligned}$$

En general  $d_{n+1}^{C_\varphi} h_{n+1} + h_n d_n^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_n}$  ( $n \geq 0$ ).

En efecto, se verifica por inducción. Primero, si  $n = 0$ , por la verificación anterior se tiene que  $d_1^{C_\varphi} h_1 + h_0 d_0^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_0}$ . Como hipótesis inductiva se tiene que

$$d_{k+1}^{C_\varphi} h_{k+1} + h_k d_k^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_k}, \text{ para } 0 \leq k < n,$$

entonces  $d_{n+1}^{C_\varphi} h_{n+1} + h_n d_n^{C_\varphi} = id_{(C_\varphi)_n}$ .

En efecto, para  $(b, a) \in (C_\varphi)_n = B_n \oplus A_{n-1}$  se tiene  $h_{n+1}(b, a) = -\hat{h}_n(b) - \tilde{h}_n(a)$ ,

$$\begin{aligned} d_{n+1}^{C_\varphi} h_{n+1}(b, a) &= d_{n+1}^{C_\varphi}(-\hat{h}_n(b) - \tilde{h}_n(a)) \\ &= (\varphi_n \hat{h}_n(b) + \varphi_n \tilde{h}_n(a), d_n \hat{h}_n(b) + d_n \tilde{h}_n(a)); \end{aligned} \quad (6.14)$$

como  $d_n^{C_\varphi}(b, a) = (-d_n^B(b) - \varphi_{n-1} a, -d_{n-1} a)$ ,

$$h_n d_n^{C_\varphi}(b, a) = \hat{h}_{n-1} d_n^B(b) + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1}(a) + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1}(a). \quad (6.15)$$

Sumando (6.14) y (6.15):

$$\begin{aligned} d_{n+1}^{C_\varphi} h_{n+1}(b, a) + h_n d_n^{C_\varphi}(b, a) &= (\varphi_n \hat{h}_n(b) + \varphi_n \tilde{h}_n(a), \\ d_n \hat{h}_n(b) + d_n \tilde{h}_n(a) + \hat{h}_{n-1} d_n^B(b) + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1}(a) + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1}(a)). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Calculando

$$\begin{aligned} \varphi_n \tilde{h}_n(a) &= \varphi_n \left( \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r \right) (a) = 0 \quad , \quad \text{pues } p + r + 1 > 0. \\ \varphi_n \hat{h}_n(b) &= \varphi_n (h_{0,n}^0 + h_{1,n-1}^1 + \dots + h_{n,0}^n)(b) \\ &= \psi_n h_{0,n}^0(b) \quad , \quad \text{pues } \varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(x) & , x \in A_{0n} \\ 0 & , x \in A_{p, n-p}, p \neq 0 \end{cases} \\ &= id_{B_n}(b) \quad \text{porque } f_n(DD) \text{ es contráctil.} \end{aligned}$$

Así,  $\varphi_n \hat{h}_n(b) + \varphi_n \tilde{h}_n(a) = id_{B_n}(b) = b$ . Por Lema 6.2

$$d_n \hat{h}_n + \hat{h}_{n-1} d_n^B = 0 \quad \text{y} \quad d_n \tilde{h}_n + \hat{h}_{n-1} \varphi_{n-1} + \tilde{h}_{n-1} d_{n-1} = id_{A_{n-1}} .$$

Reemplazando estos valores en (6.16) se tiene:

$$d_{n+1}^{C_\varphi} h_{n+1}(b, a) + h_n d_n^{C_\varphi}(b, a) = (b, a) = id_{(C_\varphi)_n}(b, a).$$

□

La idea de la prueba del teorema anterior se basa en los tres esquemas geométricos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} B_0 \\ \left( \begin{array}{c} \hat{h}_0 \\ \varphi_0 \end{array} \right) \\ A_0 \end{array} & \begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\hat{h}_n} & A_n \\ -d_n^B \downarrow & & \downarrow d_n \\ B_{n-1} & \xrightarrow{\hat{h}_{n-1}} & A_{n-1} \end{array} & \begin{array}{ccccc} & & B_{n-1} & & \\ & & \left( \begin{array}{c} \hat{h}_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \end{array} \right) & & \\ & \left( \begin{array}{c} d_{n-1} \\ \tilde{h}_{n-1} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} d_n \\ \tilde{h}_n \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} \varphi_{n-1} \\ d_n \end{array} \right) & \\ A_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-1}} & A_{n-1} & \xrightarrow{d_n} & A_n \end{array} \end{array} \quad , n \geq 1 \tag{6.17}$$

De este hecho, considerando Ejemplo 6.3 y Ejemplo 6.4 se puede ver que Lema 6.1 y Teorema 6.1 son equivalentes.

El lema siguiente es una consecuencia de Lema 5.1

**Lema 6.3.** Dado  $A \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$ , existen  $\bar{A} \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ ,  $s \in \mathfrak{m}_S^\ell(A, S \otimes \bar{A})$  y  $t \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes \bar{A}, A)$  tales que  $ts = id_A$ ; implica que  $A$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo .

Recuerde que  $\mathcal{E}'$  es la familia de todos los epimorfismos de  $S$ -módulos, que se descomponen como morfismos de  $R$ -módulos. Según Teorema 5.2 la clase  $\mathcal{E}'$  es proyectiva, entonces cada  $S$ -módulo  $M$  posee resolución  $\mathcal{E}'$ -proyectiva.

**Corolario 6.1.** [1, C A.2] Sea  $M \in |\mathfrak{m}_S^\ell|$ .

a) Si existe  $\tilde{\psi} \in \mathfrak{m}_S^\ell(B_0, M)$  tal que

$$M \xleftarrow{\tilde{\psi}} B_0 \xleftarrow{d_1^B} B_1 \xleftarrow{d_2^B} B_2 \xleftarrow{d_3^B} B_3 \xleftarrow{d_4^B} \dots \tag{6.18}$$

es contráctil en  ${}_R\mathcal{C}_b$ , entonces

$$M \xleftarrow{\psi} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} A_2 \xleftarrow{d_3} A_3 \xleftarrow{d_4} \dots \tag{6.19}$$

donde  $\psi = \tilde{\psi}\psi_0$ , es una resolución  $\mathcal{E}'$ -proyectiva de  $M$ .

b) Si  $f_0 : M \rightarrow B_0$ ,  $f_{n+1} : B_n \rightarrow B_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) es una homotopía de contracción de cadenas de (6.18), entonces existe una homotopía de contracción de cadenas de (6.19),  $g_0 : M \rightarrow A_0$ ,  $g_{n+1} : A_n \rightarrow A_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) definida por  $g_0 = h_{00}^0 f_0$  y

$$g_{n+1} = - \sum_{r=0}^{n+1} h_{r, n+1-r}^r f_{n+1} \varphi_n + \sum_{p=0}^n \sum_{r=0}^{n-p} h_{p+r+1, n-p-r}^r . \tag{6.20}$$

*Demostración:*

b) Sean  $\tilde{h}_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1, n-1-p-r}^r$  y  $\hat{h}_n = \sum_{r=0}^n h_{r, n-r}^r$  ( $n \geq 0$ ), entonces por Teorema 6.1

$$\hat{h}_n d_{n+1}^B = -d_{n+1} \hat{h}_{n+1}. \quad (6.21)$$

En efecto, como  $h_{*+1}$  es una homotopía de contracción de cadenas de  $C_\varphi$ , se tiene

$$d_{n+2}^{C_\varphi} h_{n+2}(x, 0) + h_{n+1} d_{n+1}^{C_\varphi}(x, 0) = id_{(C_\varphi)_{n+1}}(x, 0) = (x, 0) \in B_{n+1} \oplus A_n. \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} h_{n+2}(x, 0) &= -\hat{h}_{n+1}(x, 0) - \tilde{h}_{n+1}(x, 0) = -\hat{h}_{n+1}(x), \text{ pues } \tilde{h}_{n+1}(x, 0) = 0 \\ d_{n+2}^{C_\varphi} h_{n+2}(x, 0) &= (\varphi_{n+1} \hat{h}_{n+1}(x), d_{n+1} \hat{h}_{n+1}(x)); \\ d_{n+1}^{C_\varphi}(x, 0) &= (-d_{n+1}^B x, 0), \\ h_{n+1} d_{n+1}^{C_\varphi}(x, 0) &= -\hat{h}_n(-d_{n+1}^B x) - \tilde{h}_n(0) = \hat{h}_n d_{n+1}^B(x). \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (6.22) y luego sumando las segundas coordenadas

$$d_{n+1} \hat{h}_{n+1}(x) + \hat{h}_n d_{n+1}^B(x) = 0 \quad \forall x \in B_{n+1}. \text{ Así, } \hat{h}_n d_{n+1}^B = -d_{n+1} \hat{h}_{n+1}.$$

Claramente,  $\psi g_0 = id_M$ . Además, se verifica que

$$d_1 g_1 + g_0 \psi = id_{A_0}, \quad (6.23)$$

como sigue:

$$\begin{aligned} g_0 \psi &= h_{00}^0 f_0 \tilde{\psi} \psi_0, \quad f_0 \tilde{\psi} = id_{B_0} - d_1^B f_1 : \\ &= h_{00}^0 \psi_0 - h_{00}^0 d_1^B f_1 \psi_0, \text{ como } \hat{h}_0 = h_{00}^0, \text{ si } n = 0 \text{ en (6.21):} \\ &= h_{00}^0 \psi_0 + d_1 \hat{h}_1 f_1 \varphi_0. \end{aligned}$$

Como  $g_1 = -\hat{h}_1 f_1 \varphi_0 + h_{10}^0$  y  $d_1 = d_{01}^1 + d_{10}^0$ ,

$$d_1 g_1 = -d_1 \hat{h}_1 f_1 \varphi_0 + d_{10}^0 h_{10}^0.$$

Luego,  $g_0 \psi = (d_{10}^0 h_{10}^0 + h_{00}^0 \psi_0) - d_1 g_1 = id_{A_0} - d_1 g_1$ , pues  $f_0(DD)$  es contráctil y  $A_{00} = A_0$  en (6.1).

**Afirmación 1:**  $d_{n+1} \tilde{h}_{n+1} + \hat{h}_n \varphi_n + \tilde{h}_n d_n = id_{A_n}$  ( $n \geq 0$ ).

En efecto, para  $(0, x) \in B_{n+1} \oplus A_n = (C_\varphi)_{n+1}$ . Por Teorema 6.1:

$$d_{n+2}^{C_\varphi} h_{n+2}(0, x) + h_{n+1} d_{n+1}^{C_\varphi}(0, x) = (0, x). \quad (6.24)$$

$h_{n+2}(0, x) = -\hat{h}_{n+1}(0, x) - \tilde{h}_{n+1}(0, x) = -\tilde{h}_{n+1}(x)$  pues  $\hat{h}_{n+1}(0, x) = \hat{h}_{n+1}(0) = 0$ ,  
 $d_{n+2}^{C_\varphi} h_{n+2}(0, x) = d_{n+2}^{C_\varphi}(-\tilde{h}_{n+1}(x))$ , como la coordenada de  $-\tilde{h}_{n+1}(x)$  en  $B_{n+2}$  es cero:  
 $d_{n+2}^{C_\varphi} h_{n+2}(0, x) = (\varphi_{n+1} \tilde{h}_{n+1}(x), d_{n+1} \tilde{h}_{n+1}(x));$   
 como  $d_{n+1}^{C_\varphi}(0, x) = (-\varphi_n x, -d_n x)$ ,

$$\begin{aligned} h_{n+1} d_{n+1}^{C_\varphi}(0, x) &= h_{n+1}(-\varphi_n x, -d_n x) \\ &= \hat{h}_n \varphi_n(x) + \tilde{h}_n d_n(x). \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (6.24), sumando las segundas coordenadas

$$d_{n+1} \tilde{h}_{n+1}(x) + \hat{h}_n \varphi_n(x) + \tilde{h}_n d_n(x) = x = id_{A_n}(x).$$

**Afirmación 2:**  $d_{n+1} g_{n+1} + g_n d_n = id_{A_n}$  ( $n \geq 1$ ).

En efecto, se verifica por inducción.

Primero, si  $n = 1$ , como en (6.23) se obtiene

$$d_2 g_2 + g_1 d_1 = id_{A_1}.$$

Asumiendo como hipótesis inductiva que  $d_{k+1} g_{k+1} + g_k d_k = id_{A_k}$  para  $1 \leq k < n$ , se demostrará que  $d_{n+1} g_{n+1} + g_n d_n = id_{A_n}$ .



Efectuando cálculos:

$$g_n d_n := \left( - \sum_{r=0}^n h_{r,n-r}^r f_n \varphi_{n-1} + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1-p} h_{p+r+1,n-1-p-r}^r \right) d_n$$

$$= -\hat{h}_n f_n (\varphi_{n-1} d_n) + \tilde{h}_n d_n.$$

Se sabe que  $\varphi_{n-1} d_n = -d_n^B \varphi_n$  pues  $\varphi : (A, d) \rightarrow (B, -d^B)$  es un morfismo de complejos de cadenas por Proposición 6.3; luego  $g_n d_n = \hat{h}_n (f_n d_n^B) \varphi_n + \tilde{h}_n d_n$ .

Por hipótesis  $f_n d_n^B = id_{B_n} - d_{n+1}^B f_{n+1}$ , así

$$g_n d_n = \hat{h}_n \varphi_n - \hat{h}_n d_{n+1}^B f_{n+1} \varphi_n + \tilde{h}_n d_n. \tag{6.25}$$

Como  $g_{n+1} = -\hat{h}_{n+1} f_{n+1} \varphi_n + \tilde{h}_{n+1}$ ,

$$d_{n+1} g_{n+1} = -d_{n+1} \hat{h}_{n+1} f_{n+1} \varphi_n + d_{n+1} \tilde{h}_{n+1}. \tag{6.26}$$

Considerando (6.21) y la afirmación 1, luego sumando (6.25) y (6.26) se obtiene que  $d_{n+1} g_{n+1} + g_n d_n = id_{A_n}$ .

a) Sea  $\mathcal{A} : A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \dots$ , entonces  $\mathcal{A}$  es una resolución  $\mathcal{E}'$ -proyectiva de  $M$ . Esto equivale a que  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectiva,  $\mathcal{E}'$ -acíclico y  $H_0(\mathcal{A}) \cong M$ . Primero se verifica que  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectiva; es decir,  $A_n$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo para  $n \geq 0$ . En efecto, para  $n = 0$ ,  $A_0 := A_{00}$ ; por la condición 2) del diagrama (6.1) existen  $\bar{A}_{00} \in |\mathfrak{m}_R^\ell|$ ,  $s_{00} \in \mathfrak{m}_S^\ell(A_{00}, S \otimes \bar{A}_{00})$  y  $t_{00} \in \mathfrak{m}_S^\ell(S \otimes \bar{A}_{00}, A_{00})$  tales que  $t_{00} s_{00} = id_{A_{00}}$ . De acuerdo a Lema 6.3,  $A_0$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

Considerando la condición 2) del diagrama (6.1), por Lema 6.3  $A_{01}$  y  $A_{10}$  son  $\mathcal{E}'$ -proyectivos. Usando Proposición 5.1,  $A_1 = A_{01} \oplus A_{10}$  es  $\mathcal{E}'$ -proyectivo.

Para  $n > 1$ , aplicando Lema 6.3 y Proposición 5.1 como en el caso  $n = 1$ ,  $A_n = \bigoplus_{p+q=n} A_{pq}$  es

$\mathcal{E}'$ -proyectivo.

Por Definición 5.3,  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{E}'$ -acíclico si y sólo si

$$0 \longleftarrow H_0(\mathcal{A}) \xleftarrow{coker(d_1)} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \dots$$

es  $\mathcal{E}'$ -exacta.

En efecto, por la parte b), el complejo de cadenas

$$M \xleftarrow{\psi} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \dots$$

es contráctil en  ${}_R \mathfrak{C}_b$ . Del hecho que  $\psi d_1 = 0$  se sabe que  $Ker(\psi) \supseteq Im(d_1)$ . Y recíprocamente, de (6.23) se sigue que  $Ker(\psi) \subseteq Im(d_1)$ . Luego  $H_0(\mathcal{A}) = \frac{A_0}{Im(d_1)} = \frac{A_0}{Ker(\psi)} \stackrel{TFI}{\cong} M$ . Así:

$$0 \longleftarrow H_0(\mathcal{A}) \xleftarrow{coker(d_1)} A_0 \xleftarrow{d_1} A_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} A_n \xleftarrow{d_{n+1}} \dots \tag{6.27}$$

es exacta.

Considerando el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & H_0(\mathcal{A}) & \xleftarrow{coker(d_1)} & A_0 & \xleftarrow{d_1} & A_1 & \xleftarrow{d_2} & \dots & \xleftarrow{d_n} & A_n & \xleftarrow{d_{n+1}} & \dots \\ & & \cong \uparrow \psi' & & \parallel & \xrightarrow{g_1} & \xrightarrow{g_2} & \dots & \xrightarrow{g_n} & \xrightarrow{g_{n+1}} & & & \\ & & M & \xleftarrow{\psi} & A_0 & & & & & & & & \end{array}$$

y teniendo en cuenta que  $g$  es homotopía de contracción, se ve que  $\psi g_0 = id_M$ .

Haciendo  $coker(d_1) = \psi' \psi$ , se ve que el epimorfismo  $\psi$  tiene inverso derecho, de modo que  $coker(d_1) \in \mathcal{E}'$ .

Como  $\mathfrak{m}_S^\ell$  es una categoría abeliana, por [4, p. 78] se descompone  $d_n = \nu_n \varepsilon_n$  donde  $\varepsilon_n$  es un epimorfismo y  $\nu_n$  es un monomorfismo. Aquí se debe probar que  $\varepsilon_n \in \mathcal{E}'$ .

Se verifica que  $\varepsilon_1 \in \mathcal{E}'$ ; pues  $\varepsilon_1(g_1 \nu_1) = id_{Im(\varepsilon_1)}$ .

Para  $n > 1$ , se verifica que  $\varepsilon_n \in \mathcal{E}'$ ; es decir  $\varepsilon_n(g_n \nu_n) = id_{Im(\varepsilon_n)}$ <sup>1</sup>;

$$\begin{array}{ccccc}
 & & d_{n-1} & & d_n \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft \\
 A_{n-2} & \xleftarrow{\quad} & A_{n-1} & \xleftarrow{\nu_n} & Im(\varepsilon_n) \xleftarrow{\varepsilon_n} & A_n \\
 & & \curvearrowleft & & \curvearrowright \\
 & & g_{n-1} & & g_n
 \end{array} \tag{6.28}$$

En efecto :

$$\begin{aligned}
 \nu_n \varepsilon_n g_n \nu_n &= d_n g_n \nu_n \\
 &= d_n g_n \nu_n + g_{n-1} d_{n-1} \nu_n, \quad d_{n-1} \nu_n = 0 \text{ pues } d_{n-1} d_n = 0 \text{ y } \varepsilon_n \text{ es un epimorfismo} \\
 &= (d_n g_n + g_{n-1} d_{n-1}) \nu_n, \quad g \text{ es homotopía de contracción de (6.19):} \\
 &= id_{A_{n-1}} \nu_n = \nu_n = \nu_n id_{Im(\varepsilon_n)},
 \end{aligned}$$

así  $\nu_n(\varepsilon_n g_n \nu_n) = \nu_n id_{Im(\varepsilon_n)}$ . Pero  $\nu_n$  es un monomorfismo, luego  $\varepsilon_n g_n \nu_n = id_{Im(\varepsilon_n)}$ ; de modo que  $\varepsilon_n \in \mathcal{E}'$ . Así, la sucesión (6.27) es  $\mathcal{E}'$ -admisibles. Por lo tanto, dicha sucesión es  $\mathcal{E}'$ -exacta. Luego,  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{E}'$ -acíclico. Por consiguiente  $\mathcal{A}$ , o bien (6.19) es una resolución  $\mathcal{E}'$ -proyectiva de  $M$ . □

La idea de la prueba del corolario anterior puede ser visto geoméricamente en tres esquemas:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \psi \\ \curvearrowleft \\ M \end{array} \xrightarrow{\quad} A_0 \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \psi \\ \curvearrowleft \\ M \end{array} \xrightarrow{\quad} A_0 \xrightarrow{d_1} A_1 \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \psi \\ \curvearrowleft \\ M \end{array} \xrightarrow{\quad} A_0 \xrightarrow{d_1} A_1 \xrightarrow{d_2} A_2 \xrightarrow{d_3} \dots \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \psi \\ \curvearrowleft \\ M \end{array} \xrightarrow{\quad} A_0 \xrightarrow{d_1} A_1 \xrightarrow{d_2} A_2 \xrightarrow{d_3} \dots \xrightarrow{d_n} A_n \xrightarrow{d_{n+1}} A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+2}} \dots
 \end{array} \tag{6.29}$$

**7. Resolución Proyectiva Relativa de un Bimódulo.** Sea  $K$  un anillo conmutativo unitario,  $E$  una  $K$ -álgebra. En esta sección se va a derivar una aplicación del método dado en [1, Corollary A.2].  
Sea

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \partial_3 \\
 Y_2 \xleftarrow{\mu_2} X_{02} \xleftarrow{d_{12}^0} X_{12} \xleftarrow{d_{22}^0} X_{22} \xleftarrow{d_{32}^0} \dots \\
 \downarrow \partial_2 \\
 Y_1 \xleftarrow{\mu_1} X_{01} \xleftarrow{d_{11}^0} X_{11} \xleftarrow{d_{21}^0} X_{21} \xleftarrow{d_{31}^0} \dots \\
 \downarrow \partial_1 \\
 Y_0 \xleftarrow{\mu_0} X_{00} \xleftarrow{d_{10}^0} X_{10} \xleftarrow{d_{20}^0} X_{20} \xleftarrow{d_{30}^0} \dots
 \end{array} \tag{7.1}$$

- un diagrama de  $E$ -bimódulos y morfismos de  $E$ -bimódulos sujeto a las tres condiciones iniciales :
- 1) La columna y las filas son complejos de cadenas de  $E$ -bimódulos.
  - 2) Cada  $X_{rs}$  es isomorfo a un  $E$ -bimódulo  $E \otimes \bar{X}_{rs} \otimes E$ .
  - 3) Cada fila es contráctil como un complejo de  $E$ -módulos izquierdos, con una homotopía de contracción de cadenas  $\sigma_{0s}^0 : Y_s \rightarrow X_{0s}$  y  $\sigma_{r+1,s}^0 : X_{rs} \rightarrow X_{r+1,s}$  ( $r \geq 0$ ).

Entonces, se definen morfismos de  $E$ -bimódulos

$$d_{rs}^\ell : X_{rs} \rightarrow X_{r+\ell-1, s-\ell} \quad (r \geq 0 \text{ y } 1 \leq \ell \leq s)$$

recursivamente por

$$d_{rs}^\ell(x) = \begin{cases} -\sigma_{0, s-1}^0 \circ \partial_s \circ \mu_s(x) & \text{si } r = 0 \ \& \ \ell = 1, \\ -\sum_{j=1}^{\ell-1} \sigma_{\ell-1, s-\ell}^0 \circ d_{j-1, s-j}^{\ell-j} \circ d_{0s}^j(x) & \text{si } r = 0 \ \& \ 1 < \ell \leq s, \\ -\sum_{j=0}^{\ell-1} \sigma_{r+\ell-1, s-\ell}^0 \circ d_{r+j-1, s-j}^{\ell-j} \circ d_{rs}^j(x) & \text{si } r > 0, \end{cases} \tag{7.2}$$

<sup>1</sup>Es un placer agradecer a Juan José Guccione por su ayuda valiosa con este diagrama para el propósito que se está utilizando.

para cada  $x = 1 \otimes \bar{x} \otimes 1 \in E \otimes \bar{X}_{rs} \otimes E$ .

**Teorema 7.1.** Sea  $\tilde{\mu} : Y_0 \rightarrow E$  un morfismo de  $E$ -bimódulos tal que

$$E \xleftarrow{\tilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \dots \tag{7.3}$$

es complejo contráctil como un complejo de  $E$ -módulos izquierdos. Entonces

$$E \xleftarrow{\mu} X_0 \xleftarrow{d_1} X_1 \xleftarrow{d_2} X_2 \xleftarrow{d_3} \dots \tag{7.4}$$

donde  $\mu = \tilde{\mu}\mu_0$ ,  $X_n = \bigoplus_{r+s=n} X_{rs}$  y  $d_n = \sum_{\ell=1}^n d_{0n}^\ell + \sum_{r=1}^n \sum_{\ell=0}^{n-r} d_{r,n-r}^\ell$ ,

es una resolución proyectiva relativa de  $E$  como un  $E$ -bimódulo.

*Demostración:* Tomando los anillos  $R = E$ ,  $S = E^e$ , por propiedad de producto tensorial se ve que  $\varphi : E \rightarrow E^e$ , definido por  $\varphi(r) = r \otimes 1$ , es un morfismo de anillos unitarios.

Puesto que cada  $E$ -bimódulo es  $E^e$ -módulo izquierdo & cada morfismo de  $E$ -bimódulos es morfismo de  $E^e$ -módulos izquierdos, por la condición 1) se sabe que la columna y las filas de (7.1) son complejos de cadenas de  $E^e$ -módulos izquierdos,

La condición 2) :  $X_{rs} \cong E \otimes \bar{X}_{rs} \otimes E$  se transforma en  $X_{rs} \cong E^e \otimes_E \bar{X}_{rs}$ .

Por hipótesis  $\tilde{\mu} : Y_0 \rightarrow E$  es un morfismo de  $E$ -bimódulos; i.e.  $\tilde{\mu}(\lambda_1 m \lambda_2) = \lambda_1 \tilde{\mu}(m) \lambda_2$  para  $\lambda_1, \lambda_2 \in E$  y  $m \in Y_0$ . Esto ocurre si y sólo si  $\tilde{\mu}((\lambda_1 \otimes \lambda_2)m) = (\lambda_1 \otimes \lambda_2)\tilde{\mu}(m)$  para  $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \in E^e$  y  $m \in Y_0$ . Luego  $\tilde{\mu} : Y_0 \rightarrow E$  es un morfismo de  $E^e$ -módulos izquierdos. Así, la hipótesis del teorema se convierte en que  $\tilde{\mu} \in \mathfrak{m}_{E^e}^l(Y_0, E)$  tal que

$$E \xleftarrow{\tilde{\mu}} Y_0 \xleftarrow{\partial_1} Y_1 \xleftarrow{\partial_2} Y_2 \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

es un complejo de cadenas que es contráctil como un complejo de  $E$ -módulos izquierdos. Del hecho que  $X_{rs} \cong E^e \otimes_E \bar{X}_{rs}$ , se sabe que  $X_{rs}$  es un retracto de  $E^e \otimes_E \bar{X}_{rs}$ . Entonces por Corolario 6.1 el complejo (7.4) es una resolución proyectiva relativa de  $E$  como  $E^e$ -módulo izquierdo. Pero se nota que  $E$  es un  $E$ -bimódulo bajo  $\lambda_1 m = (\lambda_1 \otimes 1)m$ ,  $m \lambda_2 = (1 \otimes \lambda_2)m$  para  $\lambda_1, \lambda_2 \in E$  y  $m \in E$ , luego el complejo (7.4) es una resolución proyectiva relativa de  $E$  como  $E$ -bimódulo.  $\square$

**8. Conclusiones.**

- 1) Se pone en relieve la existencia de una estructura homológica relativa en una categoría abeliana mostrando que  $\mathcal{E}^l$  es una clase proyectiva en  $\mathfrak{m}_S^l$  (Teorema 5.2).
- 2) Proposición 6.1 da una condición suficiente para que  $(A, d)$  sea un complejo de cadenas de  $S$ -módulos.
- 3) Una condición necesaria y suficiente para Teorema 6.1 es que se cumplan las identidades (6.11).
- 4) Se confirma la afirmación que dice que según las definiciones de  $d_*$  y  $\sigma_*$  es suficiente verificar que se cumplan las identidades  $\sigma^0 d^0 + d^0 \sigma^0 = id$  y

$\sum_{i=0}^l (\sigma^{l-i} d^i + d^{l-i} \sigma^i) = 0$  ( $l > 0$ ) en la prueba de [1, Theorem A.1] para que  $\sigma_*$  sea una homotopía de contracción de cadenas de  $C_{(\mu^*)}$ . Esto se consigue enunciando y probando Lema 6.2, y luego usando este lema en la prueba inductiva de Teorema 6.1.

- 5) Ejemplo 6.3 muestra que para  $n = 2$  se cumple la igualdad

$$\hat{\sigma}_n \partial_{n+1} = - \sum_{l=0}^n \sum_{i=0}^{l+1} d_{i,n+1-i}^{l+1-i} \sigma_{i,n+1-i}^i.$$

- 6) El problema de la existencia y la unicidad de resoluciones proyectivas relativas, ya fue tratado por Eilenberg y Moore mediante los resultados siguientes [3, Proposition I.3.1, Proposition I.3.2 y Theorem II.2.1]. Esto se menciona brevemente en [3, Section III.4]. Puesto que las clases proyectivas  $\mathcal{E}^l$  mencionado en la primera conclusión y  $\mathcal{E}_q^l$  dado en [3] fueron introducidos en forma independiente, queda por investigar la equivalencia de estas clases proyectivas y establecer si producen la misma homología relativa.
- 7) Por [7, p. 29], [5, p. 288] y [5, Proposición 14] un  $S$ -módulo izquierdo  $B$  tal que  ${}_{(e)}B = S \otimes_R B$  es semisimple es  $\mathcal{E}^l$ -proyectivo. De acuerdo a [6, p. 51] se obtiene que  $Tor_n^{(S,R)}(A, B) = 0$  para todo  $n > 0$  y todo  $S$ -módulo derecho  $A$ . Entonces se plantea como materia de nueva investigación el descarte de la hipótesis del artículo [5], exhibiendo algún  $S$ -módulo izquierdo  $B$  tal que  $Tor_n^{(S,R)}(A, B) \neq 0$  para algún  $n > 0$  y algún  $S$ -módulo derecho  $A$ .

**9. Agradecimientos.** El autor agradece a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno (UNAPUNO) por la licencia otorgada para publicaciones en revistas indexadas; al Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA-UNI) por la oportunidad dada para realizar investigación en el programa de doctorado de Matemática. El autor agradece a Dr. Christian Valqui por hacer participar en las exposiciones de Seminario AGNC de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

### ORCID and License

Felipe Clímaco Ccolque T. <https://orcid.org/0000-0002-9440-3569>

This work is licensed under the [Creative Commons - Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

## Referencias

- [1] Guccione JA, Guccione JJ. Hochschild (co)homology of Hopf crossed products. *K-theory*. 2002; 25(2): 138-169.
- [2] Félix Y, Tanré D. *Topologie Algébrique*. Paris : Dunod; 1989.
- [3] Eilenberg S, Moore JC. *Foundations of Relative Homological Algebra*. *Mem. Amer. Math. Soc.* 55; 1965.
- [4] Hilton PJ, Stammach U. *A course in Homological Algebra*. New York Heidelberg Berlin : Springer Verlag; 1971.
- [5] Ccolque T FC. Caracterización de Proyectivos Relativos e Inyectivos Relativos. *Selecciones Matemáticas*. 2020; 7(2):276-288.
- [6] Hochschild G. *Relative Homological Algebra*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956; 82:246-269.
- [7] Cartan H, Eilenberg S. *Homological Algebra*. New Jersey : Princeton University Press; 1956.