Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 136-143.

Solución analítica de problemas de cuasi-equilibrio en una variable

Analytical solution of quasi-equilibrium problems in one variable

Frank Navarro R.

Received, Jan. 08, 2020 *Accepted, May. 10, 2020*

How to cite this article:
Navarro F. *Solución analítica de problemas de cuasi-equilibrio en una variable*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):136–143. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.12

Resumen

El problema de cuasi-equilibrio (QEP) es una generalización del clásico problema de equilibrio (EP) donde el conjunto de restricciones depende del punto en referencia. Este tipo de problema generaliza problemas importantes como desigualdades cuasi-variacionales (QVI) y problemas de equilibrio de Nash generalizados (GNEP). En los últimos años, el estudio de QEP ha aumentado, tanto desde el punto de vista de existencia y unicidad de soluciones asi como de algoritmos para encontrar soluciones. En ambos tipos de investigación, supocisiones y resultados teóricos son dados, entonces es necesario poder mostrar ejemplos que puedan mostrar la validez o la falsedad de esos resultados. Este artículo pretende ayudar en esta tarea, proporcionando dos resultados para encontrar todo el conjunto solución de QEP en una variable.

Palabras clave. Convexidad, Problema de desigualdad cuasi-variacional, Problema de cuasi-equilibrio, Conjunto solución.

Abstract

The quasi-equilibrium problem (QEP) is a generalization of the classic equilibrium problem (EP) where the constraint set does depend on the reference point. It generalizes important problems such as quasi-variational inequalities (QVI) and generalized Nash equilibrium problems (GNEP). In recent years the study of QEP has increased, both from the point of view of existence and uniqueness of solutions and of algorithms to find solutions. In both types of research, assumptions and theoretical results are given, so it is necessary to be able to show examples that can show the validity or falsity of those results . This article aims to help in this task, providing two results to find the whole solution set of QEPs in a variable.

Keywords . Convexity, Quasi variational inequality problem, Quasi-equilibrium problem, Set solution.

1. Introducción. Este artículo trata sobre el problema de cuasi-equilibrio (QEP). Formalmente un QEP puede ser formulado de la siguiente manera: Dada una bifunción $f : C \times C \to \mathbb{R}$ con $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío, tal que $f(x,x) = 0$ para todo $x \in C$ y una función punto conjunto $K : C \rightrightarrows C$ que describe como la región viable cambia juntamente con el punto en consideración, el problema de cuasi-equilıbrio asociado con K y f, el cual denotaremos por $QEP(f,K)$, consiste en:

$$QEP(f,K): \quad \text{Hallar } x \in K(x) \quad \text{tal que} \quad f(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in K(x).$$

Este tipo de problema, originalmente fue introducido en [34], y puede ser visto como una formulación general unificada de varios problemas en el contexto de optimización, que poseen aplicaciones en diversas áreas de la ciencia tales como ingeniería , economía, biología y otros; ver por ejemplo, [3, 27] y sus referencias.

Para una apropiada elección de las funciones K y f, $QEP(f,K)$ cubre varios problemas matemáticos importantes [29], los cuales no se encajan en el ambito de los problema de equilibrio clásico (EP) introducido por FAN [23], que es un QEP en que la función punto conjunto K es constante $K(x) = C \subseteq \mathbb{R}^n$,

*Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, Av.Centenario No 200, Huaraz-Perú (nilofrank@hotmail.com).

aunque los EP cubren en un modelo matemático único, importantes problemas como problemas de optimización, optimización multiobjetivo, desigualdades variacionales, problemas de punto fijo, problemas de complementariedad, equilibrios de Nash en juegos no cooperativos y optimización inversa, (ver, por ejemplo, [3, 23, 25, 26, 6, 28, 21], existen otros tipos de problemas importantes que solo podrían analizarse a través del formato de un QEP, dentro de este grupo de problemas existen dos tipos que se destacan por su complejidad matemática y por que pueden modelar diferentes tipos de aplicaciones en diversas áreas , tales como el problema de desigualdad cuasi-variacional (QVI) introducido en [1], que es un caso particular de un QEP, cuando la bifunción tiene la forma:

$$f(x,y) = \langle F(x), y-x\rangle \tag{1.1}$$

para $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ continua. El otro tipo de problema es el problema de equilibrio de Nash generalizado (GNEP) [22, 24] que también pueden ser reformulado como un QEP. En efecto, consideremos la situación de un GNEP con m jugadores, en que cada jugador v tiene como objetivo minimizar su función de costo $f^v(.,x^{-v})$ sobre su conjunto de estrategias viables $X^v(x^{-v})\subseteq\mathbb{R}^{n_v}$, para alguna función $f^v:\mathbb{R}^{n_1}\times \ldots\times\mathbb{R}^{n_m}\to\mathbb{R}$ y alguna función punto conjunto $X^v:\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_m-n_v}\rightrightarrows\mathbb{R}^{n_v}$, que depende de las estrategias $x^{-v}=(x_j)_{j\neq v}$ escogida por los otros jugadores. Hallar un equilibrio de Nash generalizado resulta equivalente a resolver un QEP con la bifunción de Nikaido–Isoda dado por:

$$f(x,y)=\sum_{v=1}^{m}\left[f^v(x)-f^v(x^{-v},y^v)\right]$$

y con la función punto conjunto dada por: $K(x)=X^1(x^{-1})\times\ldots.\times X(x^{-m})$.

La literatura sobre estos dos tipo de problemas asi como para EPs es amplia tanto desde el punto de vista de existencia y unicidad de soluciones, de algoritmos para hallar soluciones y de modelaje de problemas que surgen en diferentes áreas, para QVIs ver por ejemplo [9, 27, 18] y referencias, para GNEPs [17, 16, 15, 14, 7] y referencias, para EPs [30, 33, 32, 6, 31] y referencias.
Entanto el estudio de QEP ha recibido menos atención en comparación con los problemas antes mencionados, esto puede ser debido a la complejidad y generalidad de su formulación y de aun no encontrarse suficientes problemas aplicativos que puedan ser modelados estrictamente por QEPs, y que no puedan ser modelados por algun problema que sea un caso particular de un QEP.
En la última década investigaciones sobre QEPs se vienen incrementando tanto en el estudio de existencia de soluciones [10, 3, 11, 12, 13], asi como de algoritmos numéricos para hallar soluciones [35, 2, 4, 8, 3, 5].

En virtud de este reciente interés en el estudio de QEPs, este trabajo tiene como objetivo principal mostrar dos nuevos resultados para encontrar el conjunto solución de QEPs en una variable, que son una extensión del caso para GNEPs que fue desarrollado en [19]. Estos resultados pueden ayudar en la tarea de ilustrar el contenido de teoremas y/o suposiciones en nuevos trabajos de investigación sobre QEPs, por otro lado aunque estos resultados sean aplicables únicamente en el caso unidimensional, creemos que tratandose de una estructura tan general y compleja que ademas abarca varios problemas importantes en optimización, los resultados de este trabajo son interesantes, ademas este trabajo podría servir como una base para posibles generalizaciones, con las hipótesis adecuadas.

Este trabajo esta organizado como sigue. En la sección 2 comenzamos con algunas definiciones y notaciones que seran usadas en la sección 3. En la sección 3, presentamos dos nuevos resultados para hallar el conjunto solución de QEPs convexas en una dimensión. En la sección 4 concluimos nuestro trabajo con algunas observaciones.

2. Preliminares. Durante este trabajo consideraremos que la función punto conjunto $K:C\rightrightarrows C$ es definida como:

$$K(x)=\{y\in C: g_i(x,y)\leq 0,\quad i=1,\ldots,m\}$$

donde $g=(g_1,\ldots,g_m):C\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.
Esta forma de K es común en artículos de QEPs, que desarrollan algoritmos para hallar soluciones.

Definición 1. *Un $QEP(f,K)$ de dice convexo si $f(x,.)$ y $g_i(x,.)$ son convexas para todo $x\in C$ y para todo $i=1,\ldots,m$.*

Definición 2. *El dominio de K, es el conjunto:*

$$dom(K)=\{x\in C: K(x)\neq\emptyset\}.$$

Definición 3. *Diremos que un punto $x\in C$ es viable para el $QEP(f,K)$ si $x\in K(x)$, y definimos el conjunto de puntos viables del QEP por:*

$$X=\{x\in C: x\in K(x)\}.$$

De las definiciones anteriores tenemos que $X \subseteq dom(K) \subseteq C$.
Finalmente denotamos el conjunto solución del $QEP(f, K)$ por $SOL(QEP)$ y con $P_A(x)$ denotamos la proyección ortogonal de x sobre el conjunto convexo y cerrado A.

3. Solución analítica . Como es común en matemática, es usual dar algunos ejemplos para ilustrar el contenido de supocisiones y teoremas. Dentro del estudio de QEPs en algunos casos resulta importante calcular todo el conjunto solución, por ejemplo cuando desarrollamos algoritmos para solucionar numéricamente un QEP, es importante dar algun ejemplo donde podamos conocer todo el conjunto solución y verificar que el algoritmo converge a un elemento de ese conjunto, o también quando hacemos un estudio teórico de propiedades asociadas a las soluciones es importante calcular todo el conjunto solución de algún caso particular para mostrar la aplicación de ese resultado.
Con esa finalidad en esta sección presentamos 2 teoremas que permiten hallar el conjunto solución de ciertos QEP en una dimensión, usando proyecciones euclidianas.

Teorema 1. *Consideremos un QEP convexo, con $f : C \times C \to \mathbb{R}$ y $g : C \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, con $C \subseteq \mathbb{R}$ convexo, cerrado y no vacio. Supongamos que la bifunción $f(x, .)$ tiene un único mínimo global sobre $\mathbb{R}$ para todo $x \in dom(K)$. Entonces el conjunto solución del QEP es dado por:*

$$SOL(QEP) = \{x \in dom(K) : x = P_{K(x)}(z), f(x, z) < f(x, y), \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{z\}\} \tag{3.1}$$

Demostración: Dado $\bar{x} \in dom(K)$ y $\bar{z} \in \mathbb{R}$ el único mínimo irrestricto de $f(\bar{x}, .)$, tenemos que:

$$f(\bar{x}, \bar{z}) < f(\bar{x}, y) \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{z}\}$$

La convexidad de la función $f(\bar{x}, .)$ implica

$$\begin{aligned} &f(\bar{x}, \lambda\bar{z} + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(\bar{x}, \bar{z}) + (1-\lambda)f(\bar{x}, y), \\ \Longleftrightarrow\ &f(\bar{x}, \lambda\bar{z} + (1-\lambda)y) + \lambda(f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, \bar{z})) \leq f(\bar{x}, y) \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$, y asi para todo $\lambda \in \langle 0, 1]$ y para cualquier $y \neq \bar{z}$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$f(\bar{x}, \lambda\bar{z} + (1-\lambda)y) < f(\bar{x}, y) \tag{3.2}$$

Ahora supongamos que $\bar{x}$ es una solución del QEP, i.e $\bar{x} \in K(\bar{x})$ y resuelve el problema de optimización:

$$\min_y f(\bar{x}, y) \quad s.t. \quad y \in K(\bar{x}) \tag{3.3}$$

Afirmamos que la condición anterior es equivalente a:

$$[\bar{x}, \bar{z}] \cap K(\bar{x}) = \{\bar{x}\} \tag{3.4}$$

Primero si $\bar{x}$ es solución de (3.3) tenemos que $\bar{x} \in K(\bar{x})$. Si $\bar{x} = \bar{z}$ claramente (3.4) es valido, ahora si $\bar{x} \neq \bar{z}$ ningun punto interior del segmento $[\bar{x}, \bar{z}]$ puede ser viable por (3.2), portanto (3.4) ocurre.
Por otra parte, supongamos que (3.4) ocurre, y consideremos un punto arbitrario $y \in K(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$. Por la convexidad de $K(\bar{x})$ obtenemos $[\bar{x}, y] \subseteq K(\bar{x})$, y tomando en cuenta (3.4), deducimos que $\bar{x} \in \langle y, \bar{z}]$. Asi podemos hallar un $\lambda \in \langle 0, 1]$ tal que $\bar{x} = \lambda\bar{z} + (1-\lambda)y$, y por (3.2), $\bar{x}$ es solución del problema (3.3).

Esto muestra que cualquier solución del QEP satisfaze la condición (3.4) y viceversa. Como $K(\bar{x})$ es convexo y cerrado, la condición (3.4) es equivalente a:

$$\bar{x} = P_{K(\bar{x})}(\bar{z})$$

entonces podemos deducir que:

$$SOL(QEP) = \{x \in dom(K) : x = P_{K(x)}(z), f(x, z) < f(x, y), \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{z\}\}$$

■

Corolario 1. *Consideremos un EP convexo. Si para cada $x \in C$, $f(x, .)$ tiene un único mínimo global sobre $\mathbb{R}$, entonces el conjunto solución del EP es dado por:*

$$SOL(EP) = \{x \in C : x = P_C(z), f(x, z) < f(x, y), \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{z\}\} \tag{3.5}$$

Demostración: Es inmediato del teorema anterior. ■

Observación 1.
Nótese que el teorema anterior no pide la diferenciabilidad, convexidad o continuidad de la bifunción f y de las funciones restricciones g_i como función de (x, y).

Observación 2. *En las condiciones del teorema anterior, $K(x)$ es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de $\mathbb{R}$, entonces un intervalo, $K(x) = [\alpha(x), \beta(x)]$ no necesariamente acotado, análogamente C es un intervalo unidimensional. En dimensiones mayores, $K(x)$ es convexo y cerrado pero no necesariamente un intervalo.*

Observación 3. *En el teorema anterior, la condición que $f(x, .)$ sea convexa para todo $x \in C$, puede ser sustituida por la condición más débil: para todo $x \in dom(K)$; por otro lado la condicíon que $f(x,)$ tenga un único mínimo estricto sobre $\mathbb{R}$ puede ser sustituida por cualquier otro conjunto convexo T, tal que $\cup_{x\in dom(K)}K(x) \subseteq T$. De forma similar en el corolario 3.1, la condición que $f(x,)$ tenga un único mínimo estricto sobre $\mathbb{R}$ puede ser sustituida por cualquier otro conjunto convexo T, tal que $C \subseteq T$.*

Ejemplo 1. *Consideremos el siguiente $QEP(f, K)$, con $C = \mathbb{R}$ donde:*

$$f(x, y) = x^2y + y^2 - x^3 - x^2 \quad y \quad K(x) = \{y \in \mathbb{R} : x + y \leq 1, x - y \leq 0\}$$

Tenemos que $K(x) = [x, 1 - x]$, portanto el dominio de K es $dom(K) = \langle -\infty, \frac{1}{2}]$ en este caso el conjunto viable del QEP es también $X = \langle -\infty, \frac{1}{2}]$. La convexidad estricta y la diferenciabilidad de $f(x, .)$ junto con el teorema 1 implica que el conjunto solución es dada por:

$$SOL(QEP) = \{x \in \langle -\infty, \frac{1}{2}] : x = P_{K(x)}(z), z = -\frac{x^2}{2}\}$$

donde

$$P_{K(x)}(z) = \begin{cases} x & si \quad x \leq -2 \\ -\dfrac{x^2}{2} & si \quad -2 \leq x \leq 0 \\ x & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

portanto $SOL(QEP) = \langle -\infty, -2] \cup [0, -\frac{1}{2}]$.

Ejemplo 2. *Consideremos el siguiente $EP(f, C)$, con $C = [0, 1]$ y $f(x, y) = y^2 - yx$. La convexidad estricta y la diferenciabilidad de $f(x, .)$ junto con el corolario 1 implica que el conjunto solución es dado por:*

$$SOL(EP) = \{x \in [0, 1] : x = P_{[0,1]}(z), z = \frac{x}{2}\} = \{0\}$$

Para el siguiente resultado, necesitamos que las funciones $f(x, .)$ y $g_i(x, .)$ sean continuamente diferenciables para todo $x \in dom(K)$, y de la siguiente hipótesis para las funciones restricciones g_i.

Suposición 1. *Todas las funciones restricciones $g_i(x, .)$, para $x \in dom(K)$ y $i = 1, \ldots, m$ son continuamente diferenciables . Para todo $x \in X$ donde $g_i(x, x) = 0$ y $\nabla_y g_i(x, x) = 0$ para algun $i \in \{1, \ldots, m\}$ el conjunto $K(x)$ es unitario, portanto $K(x) = \{x\}$.*

Observación 4.

(a) Consideremos un QEP con restricciones lineales unicamente i.e $g(x, y) = (a_1x+b_1y+c_1, ..., a_mx+b_my + c_m)$. La condición $\nabla_y g_i(x, x) = 0$ implica que g_i es independiente de y, asi estas restricciones pueden ser excluidas pues no tienen influencia para determinar $K(x)$. Excluiendo estas restricciones, el QEP resultante es equivalente al original y satisfaze la suposición 1.

(b) Consideremos el QEP con una única restricción:

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 \leq 0$$

Entonces tenemos $g(x, x) = 0$ y $\nabla_y g(x, x) = 0$, que es equivalente a $x = 0$. Portanto $K(0) = \{0\}$ y la suposición 1 es satisfecha.

(c) Existen QEPs donde la suposición 1 no es satisfecha, por ejemplo considere el QEP con una única restricción:

$$g(x,y) = xy \leq 0$$

Tenemos que si $g(x,x) = 0$ y $\nabla_y g(x,x) = 0$, es equivalente a $x = 0$, y $K(0) = \mathbb{R}$.

Para todo QEP en una dimensión que satisfaze la suposición 1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2. *Consideremos un QEP convexo en una dimensión. Si la suposición 1 y las condiciones del teorema anterior son satisfechas, entonces el conjunto solución del QEP es dado por:*

$$T = \cup_{i=1}^{m}\{x \in X : g_i(x,x) = 0, \nabla_y f(x,x)\nabla_y g_i(x,x) \leq 0\} \cup \{x \in X : \nabla_y f(x,x) = 0\}$$

Demostración: Supongamos primero que $\bar{x}$ es solución del QEP, esto es $\bar{x} \in K(\bar{x})$ y resuelve el problema:

$$\min_y f(\bar{x},y) \quad s.t. \quad y \in K(\bar{x}) \tag{3.6}$$

Denotamos por $\bar{z}$ el mínimo global de la función convexa y diferenciable $f(\bar{x},.)$, que implica $\nabla_y f(\bar{x},\bar{z}) = 0$. Consideremos dos casos, primero si $\bar{x} = \bar{z}$ entonces $\nabla_y f(\bar{x},\bar{x}) = 0$ y entonces $x \in T$, ahora si $\bar{x} \neq \bar{z}$, en este caso usando la unicidad del mínimo global $\bar{z}$ y la convexidad de $f(\bar{x},.)$ obtenemos de forma análoga como en (3.2)

$$f(\bar{x},\bar{x}+\lambda(\bar{z}-\bar{x})) < f(\bar{x},\bar{x}), \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \langle 0,1]$$

como $\bar{x}$ es una solución y las funciones restricciones son continuas, existe un $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que

$$g_i(\bar{x},\bar{x}) = 0, \quad g_i(\bar{x},\bar{x}+\lambda(\bar{z}-\bar{x})) > 0 \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \langle 0,1]$$

asi tenemos

$$\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x})(\bar{z}-\bar{x}) = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{g_i(\bar{x},\bar{x}+\lambda(\bar{z}-\bar{x})) - g_i(\bar{x},\bar{x})}{\lambda} \geq 0$$

de la convexidad y de la propiedad de mínimo de $\bar{z}$, tenemos

$$\nabla_y f(\bar{x},\bar{x})(\bar{z}-\bar{x}) \leq f(\bar{x},\bar{z}) - f(\bar{x},\bar{x}) < 0$$

De las desigualdades anteriores y como $\bar{x} \neq \bar{z}$ implica

$$\nabla_y f(\bar{x},\bar{x})\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x}) \leq 0$$

Asi obtenemos:

$$\bar{x} \in \cup_{i=1}^{m}\{x \in X : g_i(x,x) = 0, \nabla_y f(x,x)\nabla_y g_i(x,x) \leq 0\} \cup \{x \in X : \nabla_y f(x,x) = 0\}$$

portanto $SOL(QEP) \subseteq T$.

Ahora supongamos que $\bar{x} \in T$, por la definición de T tenemos que o $\bar{x} \in X$ y $\nabla_y f(\bar{x},\bar{x}) = 0$, lo que implica que $\bar{x}$ es el mínimo global de $f(\bar{x},.)$ y asi solución del problema (3.6), o existe un indide $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $g_i(\bar{x},\bar{x}) = 0$ y $\nabla_y f(\bar{x},\bar{x})\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x}) \leq 0$, aqui consideraremos dos casos, primero si $\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x}) = 0$, entonces la hipótesis 1 implica que el conjunto $K(\bar{x})$ es unitario y asi $\bar{x}$ es solución del problema (3.6), porque este es el único punto viable. El segundo caso es $\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x}) \neq 0$, entonces definimos

$$\alpha = \frac{\nabla_y f(\bar{x},\bar{x})}{\nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x})} \leq 0$$

La convexidad de $f(\bar{x},.)$ y $g_i(\bar{x},.)$ implica para todo $y \in K(\bar{x}) = \{y \in C : g(\bar{x},y) \leq 0\}$

$$\begin{aligned} f(\bar{x},y)-f(\bar{x},\bar{x}) \geq & \nabla_y f(\bar{x},\bar{x})(y-\bar{x}) \\ &= \alpha \nabla_y g_i(\bar{x},\bar{x})(y-\bar{x}) \\ &\geq -\alpha(g_i(\bar{x},\bar{x})-g_i(\bar{x},y)) \\ &= \alpha g_i(\bar{x},y) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

y asi $\bar{x}$ es solución del problema (3.6), portanto $T \subseteq SOL(QEP)$, esto completa la demostración. ■

Ejemplo 3. *Consideremos el siguiente problema de cuasi-equilibrio $QEP(f,K)$ con $C=\mathbb{R}$ y donde:*

$$f(x,y) = -2xy + \frac{y^2}{2} + \frac{3x^2}{2} \quad y \quad K(x) = \{y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Tenemos que $K(x) = \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right]$ portanto el dominio de K es $dom(K) = [-1,1]$ en este caso el conjunto viable del QEP es $X = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Tenemos que $\nabla_y f(x,x) = 0$ es equivalente a $x = 0$ y las condiciones $g(x,x) = 0$ y $\nabla_y f(x,x)\nabla_y g(x,x) = -2x^2 \leq 0$ son satisfechas simultaneamente unicamente si $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ portanto $SOL(QEP) = \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

3.1. Problemas de cuasi-equilibrios afines . Un problema de cuasi-equilibrio afin (AQEP) es un problema de cuasi-equilibrio donde la bifución es de la forma:

$$f(x,y) = (y)^T H_1 y + (y)^T H_2 x - h^T y - (x)^T H_1 x - (x)^T H_2 x + h^T x \tag{3.7}$$

Con $h \in \mathbb{R}^n$ y $H_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices definidas positivas para $i = 1,2$, ademas las restricciones son funciones lineales afines dados por:

$$g(x,y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - b \tag{3.8}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times 2n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Es facil ver que el teorema 2 es aplicable a una subclase de AQEP, en el cual $n = 1$. A este tipo de problemas llamamos problemas de cuasi-equilibrio lineales afines en una dimensión (AQEP1s). Para un (AQEP1) por el teorema 2 el conjunto solución viene dado por:

$$SOL(QEP) = \cup_{i,a_{i2}\neq 0}\{x \in X : x(a_{i1}+a_{i2}) = b_i, (Hx-h)a_{i2} \leq 0\} \cup \{x \in X : x = \frac{h}{H}\}$$

con $H = 2H_1 + H_2$.

Ejemplo 4. *Consideremos el siguiente problema de cuasi- equilibrio $QEP(f,K)$, con $C=\mathbb{R}$ y donde:*

$$f(x,y) = 2y^2 + yx - 3y - 3x^2 + 3x \quad y \quad K(x) = \{y \in \mathbb{R} : g(x,y) \leq 0\}$$

donde $g(x,y) = (x-y, y-2x+1, y-2)$, tenemos que $dom(K) = X = [1,2]$ y

$$K(x) = \begin{cases} [x, 2x-1] & si \quad 1 \leq x \leq 1{,}5 \\ [x,2] & si \quad 1{,}5 \leq x \leq 2 \\ \emptyset & si \quad otro\ caso \end{cases}$$

usando el teorema 2 tenemos que $SOL(QEP) = [1,2]$.

3.2. Conjunto solución para una QVI. Como comentamos en la introducción, una QVI es un caso particular de un QEP con la bifunción, dado por 1.1. Notese que en ese caso $f(x,.)$ es lineal en y y por tanto no tiene un único mínimo global sobre $\mathbb{R}$ para cada $x \in dom(K)$, entonces el Teorema 2 no es aplicable para este caso particular. Para esta clase de problemas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3. *Consideremos una QVI en una dimensión, con $g_i(x,.)$ convexas para todo $x \in dom(K)$ y para todo $i = 1,...,m$, entonces el conjunto solución es dado por:*

$$S = \{x \in X : f(x) > 0, x = infK(x)\} \cup \{x \in X : f(x) < 0, x = supK(x)\} \cup \{x \in X : f(x) = 0\}$$

Demostración: La prueba sigue del hecho de que una función lineal admite un único mínimo unicamente en uno de los extremos(en caso tenga alguno) de un intervalo cerrado. ■

Ejemplo 5. *Consideremos la siguiente desigualdad cuasi-variacional con $C = \mathbb{R}$, dada por:*

$$(x^2 - x)(y - x) \geq 0 \quad y \quad K(x) = \{y \in \mathbb{R} : x - y \leq 0, y - x - 1 \leq 0\}$$

Tenemos que $dom(K) = X = \mathbb{R}$ y $K(x) = [x, x + 1]$, usando el teorema 3 tenemos que el conjunto solución es $SOL(QEP) = \langle -\infty, 0] \cup [1, \infty\rangle$

4. Conclusiones. En este trabajo desarrollamos dos resultados referentes a problemas de cuasi-equilibrio convexos en una dimensión, que permiten obtener todo el conjunto solución de esas QEPs.
Aunque los resultados usan el hecho de que $n = 1$, creemos que tratandonde de una estructura matemática tan general que unifica varios problemas importantes en optimización, estos resultados son importantes porque pueden ayudar en la tarea de esclarecer resultados de tipo teórico que aparecen en trabajos sobre existencia y unicidad de soluciones y de trabajos que tratan sobre algoritmos para hallar soluciones.
Por otro parte estos resultados pueden servir como base para futuras extensiones a dimensiones mayores, por ultimo, como un trabajo a futuro desarrollaremos un algoritmo que calcule en un número finito de pasos el conjunto solución de un AQEP1.

5. Agradecimientos. Quiero agradecer al profesor Dr. Gabriel Haeser de la universidad de São Paulo, y al profesor Dr. Luis Felipe Bueno de la universidad federal de São Paulo por la sugerencia de presentar estos resultados.

ORCID and License

Frank Navarro R. https://orcid.org/0000-0002-9847-0822

Referencias

[1] Bensoussan A, Goursat M, Lions J. *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles stationnaires*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 276. 1973; A1279-A1284.

[2] Anh, Pham Ngoc, Tran TH Anh, Nguyen D. Hien, *Modified basic projection methods for a class of equilibrium problems.* Numerical Algorithms. 2018; 79(1):139-152.

[3] Bigi G, Castellani M, Pappalardo M, Passacantando M. *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria.* Springer, 2019.

[4] Bigi G, Passacantando M. *Fixed-point and extragradient methods for quasi-equilibria.* Optimization and Decision Science. p.10

[5] Bigi G, Passacantando M. *Gap functions for quasi-equilibria.* Journal of Global Optimization. 2016; 66(4):791-810.

[6] Blum E, Oettli W. *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*. Math. Program. 1994; 63(1-4):123-145.

[7] Bueno L, Haeser G, Navarro F. *Optimality conditions and constraint qualifications for generalized nash equilibrium problems and their practical implications.* SIAM Journal on Optimization. 2019; 29(1):31-54.

[8] Bueno L, Haeser G, Lara F, Rojas F. *An Augmented Lagrangian method for quasi-equilibrium problems.* Computational Optimization and Applications. 2020; 1-30.

[9] Baiocchi C, Capelo A. *Variational and quasivariational inequalities: applications to free boundary problems.* A Wiley-Interscience publication. Wiley. 1984.

[10] Castellani M, Massimiliano G, Castellani M. *An existence result for quasiequilibrium problems in separable Banach spaces.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2015; 425(1):85-95.

[11] Cotrina J, Zúñiga J. *A note on quasi-equilibrium problems.* Operations Research Letters. 2018; 46(1):138-140.

[12] Cotrina J, Zúñiga J. *Quasi-equilibrium problems with non-self constraint map. Journal of Global Optimization.* 2019; 75(1):177-197.

[13] Cotrina J, Hantoute A, Svensson A. *Coerciveness condition for quasi-equilibrium problems.* arXiv preprint arXiv. 2019; 1901(09116).

[14] Dreves A. *Computing all solutions of linear generalized Nash equilibrium problems.* Mathematical Methods of Operations Research. 2017; 85(2):207-221.

[15] Dreves A, Gerdts M. *A generalized Nash equilibrium approach for optimal control problems of autonomous cars.* Optimal Control Applications and Methods. 2018; 39(1):326-342.

[16] Dreves A. *An algorithm for equilibrium selection in generalized Nash equilibrium problems.* Computational Optimization and Applications. 2019; 73(3):821–837.

[17] Dreves A. *How to select a solution in generalized Nash equilibrium problems.* Journal of Optimization Theory and Applications. 2018; 178(3):973-997.

[18] Dreves A. *Uniqueness for quasi-variational inequalities.* Set-Valued and Variational Analysis. 2016; 24(2):285-297.

[19] Dreves A. *Globally convergent algorithms for the solution of generalized Nash equilibrium problems.* 2012.

[20] Dreves A. *Finding all solutions of affine generalized Nash equilibrium problems with one-dimensional strategy sets.* Mathematical Methods of Operations Research. 2014; 80(2):139-159.

[21] Facchinei F, Pang J. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. Berlin: Springer; 2002.
[22] Facchinei F, Kanzow C. *Generalized Nash equilibrium problems.* Annals of Operations Research. 2010; 175:177-211.
[23] Fan K. *Minimax inequality and applications.* v. 3, Inequalities, Academic Press, New York. 1972:103-113.
[24] Fischer A, Herrich M, Schonefeld K. *Generalized Nash equilibrium problems* – Recent advances and challenges, *Pesquisa Operacional.* 2014; 34:521-558.
[25] Hieu D, Cho Y, Xiao Y. *Golden ratio algorithms with new stepsize rules for variational inequalities*. Math. Meth. Appl. Sci. 2019.
[26] Hieu D, Anh P, Muu L. *Modified extragradient-like algorithms with new stepsizes for variational inequalities*. Comput. Optim. Appl. 2019; 73:913-932
[27] Kanzow C, Steck D. *Augmented Lagrangian and exact penalty methods for quasi-variational inequalities.* Computational Optimization and Applications. 2018; 69(3):801-824.
[28] Konnov I. *Equilibrium Models and Variational Inequalities*. Elsevier, Amsterdam. 2007.
[29] Lignola B, Morgan J. *Approximations of Quasi-Variational Problems Including Social Nash Equilibria in Abstract Economies.* 2010.
[30] Nasri M, et al. *Implementation of augmented Lagrangian methods for equilibrium problems.* Journal of Optimization Theory and Applications. 2016; 168(3):971-991.
[31] Oliveira P, Santos P, Silva A. *A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert spaces.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013; 401(1):336-342.
[32] Santos P, Scheimberg S. *A proximal Newton-type method for equilibrium problems.* Optimization Letters. 2018; 12(5):997-1009.
[33] Scheimberg S, Jacinto F. *An extension of fkkm lemma with application to generalized equilibrium problems.* Pac. J. Optim. 2010; 6(2):243–253.
[34] Mosco U. *Implicit variational problems and quasi variational inequalities.* Nonlinear operators and the calculus of variations. Springer. 1976; 83-156.
[35] Van N, et al. *An extragradient-type method for solving nonmonotone quasi-equilibrium problems.* Optimization. 2018 67(5):651-664.