Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(1): 74-96.

# Existencia y dependencia continua de solución de la ecuación Boussinesq de onda en espacios de Sobolev periódico

# Existence and continuous dependence of solution of the Boussinesq wave equation in periodic Sobolev spaces

Victor Papuico Bernardo and Yolanda Santiago Ayala

*Received, Jan. 02, 2020* *Accepted, Mar. 17, 2020*

How to cite this article:
Papuico V, Santiago Y. *Existencia y dependencia continua de solución de la ecuación Boussinesq de onda en espacios de Sobolev periódico*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(1):74–96. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.07

**Resumen**

*Iniciaremos nuestro estudio, focalizándonos en la teoría de los espacios de Sobolev periódico, para esto citamos a [1]. Luego, probaremos que la ecuación de Boussinesq no homogéneo posee solución local y que además la solución depende continuamente respecto a los datos iniciales y a la no homogeneidad, esto lo hacemos de un modo intuitivo usando la teoría de Fourier y en una versión elegante introduciendo familias de operadores fuertemente continuos, inspirados en los trabajos de Iorio [1], Santiago y Rojas [4], [3] y [2].*

**Palabras clave**. Familia de Operadores fuertemente continuos, ecuación Boussinesq, Teoría de Fourier, Espacios de Sobolev periódicos.

**Abstract**

*We will begin our study, focusing on the theory of periodic Sobolev spaces, for this we cite [1]. Then, we will prove that the non-homogeneous Boussinesq equation has a local solution and that the solution also continually depends on the initial data and non-homogeneity, we do this intuitively using Fourier theory and in an elegant version introducing families of strongly continuous operators, inspired by the work of Iorio [1], Santiago and Rojas [4], [3] and [2].*

**Keywords** . Family of strongly continuous operators, Boussinesq equation, Fourier Theory, Periodic Sobolev spaces.

**1. Introducción.** Sea la ecuación homogénea de Boussinesq:

$$U_{tt} - aU_{xx} = -bU_{xxxx} \tag{1.1}$$

con $a > 0$ y $b > 0$ constantes reales. Esta ecuación describe las ondas en aguas poco profundas, que pueden ser vistas en el mar, lagos y ríos. La ecuación (1.1) fue originalmente derivado por Boussinesq, en el año 1872.
El modelo homogéneo (1.1) con datos en espacios Sobolev periódico fue propuesto por Iorio en [1], de modo que nosotros partiremos probando y estudiando este caso, motivados con la teoría de Iorio [1], Santiago y Rojas [4], y [3] para el caso de la ecuación de la onda.
Siguiendo las ideas plasmadas en Santiago y Rojas [2] para la ecuación de onda no homogénea

$$U_{tt} - aU_{xx} = F \tag{1.2}$$

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (victorpapuico@gmail.com).
†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela S/N Lima 01, Lima-Perú (ysantiagoa@unmsm.edu.pe).

estudiaremos el caso no homogéneo de (1.1), esto es, analizaremos la existencia, unicidad, dependencia continua y regularidad de la solución del modelo no homogéneo.
El presente artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, indicaremos la metodología usada y citamos la referencia usada para los resultados preliminares que se pueden necesitar. En la sección 3, probaremos que el problema asociado a la ecuación de Boussinesq está bien colocado. Haremos el análisis de la diferenciabilidad de la solución versus los datos iniciales. En la sección 4, probaremos que el problema asociado a la ecuación no homogénea de Boussinesq está localmente bien colocado y además obtendremos la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales y a la no homogeneidad. Finalmente, en la sección 5, damos las conclusiones de nuestro estudio.

**2. Metodología.** Como marco teórico, en este trabajo usamos la teoría de Fourier en espacios de Sobolev periódico y familias de operadores fuertemente continuas. Como referencia en la revisión de algunos resultados previos que usaremos, citamos a Iorio [1] y, Santiago y Rojas [4], y [3].
Toda esta teoría la usamos en el análisis de la existencia y buena colocación del problema asociado a la ecuación de Boussinesq, realizando una serie de cálculos y aproximaciones en el desarrollo del trabajo.

**3. Existencia de solución de la ecuación de Boussinesq.** En esta sección, empezaremos probando que existe solución de la ecuación homogénea de Boussinesq en espacios de Sobolev periódico, usando la teoría de Fourier.

**Teorema 1.** *Sea $s \in \mathbb{R}$ fijado y el problema*

$$(3.1) \qquad (\mathrm{Q}_1) \left| \begin{array}{l} u \in C\left([0,+\infty[\,, H^s_{per}\right), \\ \partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) \in H^{s-4}_{per}, \\ u(0) = \varphi \in H^s_{per}, \\ \partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}. \end{array} \right.$$

*entonces existe una única solución $u \in C\left([0;+\infty[\,, H^s_{per}\right)$ del PVI* ($\mathrm{Q}_1$)*, con dependencia continua respecto a los datos iniciales.* La prueba se sigue de las proposiciones 1– 6.

**Proposición 1.** *Si denotamos por $\sigma(k) = |k|\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, para $k \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(3.2) \qquad u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\varphi}(k)\right)\Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)$$

*es candidato a solución de* ($\mathrm{Q}_1$), donde estamos denotando $\Phi_k(x) = e^{ikx}$.

*Demostración:* Aplicaremos la transformada de Fourier a la ecuación a fin de obtener el candidato a solución

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_t^2 u(t)} &= \widehat{\partial_x^2 u(t)} - \widehat{\partial_x^4 u(t)} \\ &= (ik)^2\widehat{u}(k,t) - (ik)^4\widehat{u}(k,t) \\ &= -k^2(1+k^2)\widehat{u}(k,t) \end{aligned}$$

Así, para cada $k \in \mathbb{Z}$, se obtiene la siguiente familia de EDOs homogéneas de segundo orden

$$(3.3) \qquad (\Omega_k) \left| \begin{array}{l} \widehat{u} \in C\left([0,+\infty[\,, \ell^2_{s-1}(\mathbb{Z})\right) \\ \partial_t^2\widehat{u}(k,t) + k^2(1+k^2)\widehat{u}(k,t) = 0 \\ \widehat{u}(k,0) = \widehat{\varphi}(k) \\ \partial_t\widehat{u}(k,0) = \widehat{\psi}(k) \end{array} \right.$$

Cuyo polinomio característico es $\lambda^2 + k^2(1+k^2) = 0$. Analicemos las soluciones para los siguientes casos:

1. Si $k = 0$ entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\widehat{u}(0,t) = C_1 + C_2 t$. Para $t = 0$ tenemos $\widehat{u}(0,0) = C_1 = \widehat{\varphi}(0)$ y derivando parcialmente con respecto a $t$ tenemos $\partial_t\widehat{u}(0,0) = C_2 = \widehat{\psi}(0)$. De donde obtenemos la solución $\widehat{u}(0,t) = \widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t$.

2. Si $k \neq 0$, de la ecuación $\lambda^2 + k^2(1+k^2) = 0$, se obtiene

$$\lambda^2 = -k^2\left(1+k^2\right) \Rightarrow \lambda = \pm i\left(|k|\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \pm i\sigma(k)$$

Luego, $\widehat{u}(k,t) = C_1\cos(\sigma(k)t) + C_2\,\text{sen}\,(\sigma(k)t)$. Ahora, de los datos iniciales tenemos $\widehat{u}(k,0) = C_1 = \widehat{\varphi}(k)$ y derivando parcialmente con respecto a $t$ tenemos

$$\partial_t\widehat{u}(k,t) = -C_1\left(\sigma(k)\right)\text{sen}\,(\sigma(k)t) + C_2\left(\sigma(k)\right)\cos(\sigma(k)t)$$

Para $t = 0$ se tiene $\partial_t\widehat{u}(k,0) = C_2\left(\sigma(k)\right) = \widehat{\psi}(k)$. Desde que $k \neq 0$ podemos despejar y obtenemos $C_2 = \dfrac{1}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)$ y así $\widehat{u}(k,t) = \widehat{\varphi}(k)\cos(\sigma(k)t) + \widehat{\psi}(k)\dfrac{1}{\sigma(k)}\text{sen}\,(\sigma(k)t)$.

Por tanto, nuestra solución tiene la forma de la siguiente serie de Fourier

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(k,t)\Phi_k(x)\\
&= \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\left(\widehat{\varphi}(k)\cos(\sigma(k)t) + \widehat{\psi}(k)\frac{1}{\sigma(k)}\ \text{sen}\,(\sigma(k)t)\right)\Phi_k(x) + \left(\widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t\right)\Phi_k(x)
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} = t$, podemos considerar $\left.\dfrac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\right|_{k=0} = t$, nuestra solución tiene la cara $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\right)\Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)$. ■

La cara de la solución puede ser reescrita en términos de operadores

$$u(\cdot,t) = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi) \tag{3.4}$$

donde $C_1(t)(\varphi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\right)\Phi_k(x)$ y $C_2(t)(\psi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)$.

**Proposición 2.** *Sea $T \in \mathbb{R}^+$ fijo y $s \in \mathbb{R}$, entonces para $t \in [0,T]$*

$$u(x,t) = u(t) \in H^s_{per} \quad y \quad \|u(t)\|_s \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\text{máx}\,\{1,T^2\}}\sqrt{\|\varphi\|_s^2 + \|\psi\|_{s-1}^2}$$

*Donde $u(x,t)$ está dada por (3.2).*

*Demostración:* Sean $t \in [0;T]$ y $r \in \mathbb{R}$. Consideremos la norma de $u(t)$ en $H^r_{per}$

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r |\widehat{u}(k,t)|^2 \\
&= 2\pi \left[ \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r \left|\cos\left(\sigma\left(k\right)t\right)\widehat{\varphi}(k) + \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t\right)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right|^2 + \left|\widehat{\varphi}(0)+t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right] \\
&\leqslant 4\pi \left[ \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r \left( \left|\cos\left(\sigma\left(k\right)t\right)\widehat{\varphi}(k)\right|^2 + \left|\frac{\operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t\right)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right|^2 \right) + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right] \\
&\leqslant 4\pi \left( \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(1+k^2\right)^r}{\sigma(k)^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right) \\
&= 4\pi \left( \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r |\widehat{\varphi}(k)|^2 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(1+k^2\right)^{r-1}}{|k|^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + |\widehat{\varphi}(0)|^2 + \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right) \\
&= 2 \left( \|\varphi\|_r^2 + 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(1+k^2\right)^{r-1}}{|k|^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + 2\pi \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right) \\
&\leqslant 2 \left( \|\varphi\|_r^2 + 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^{r-1} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + 2\pi \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \right) \ , \ t \leqslant T \\
&= 2 \left( \|\varphi\|_r^2 + 2\pi \max\left\{1, T^2\right\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^{r-1} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \right) \\
&= 2 \left( \|\varphi\|_r^2 + \max\left\{1, T^2\right\} \|\psi\|_{r-1}^2 \right) \\
&= 2 \max\left\{1, T^2\right\} \left( \|\varphi\|_r^2 + \|\psi\|_{r-1}^2 \right) < \infty
\end{aligned}
$$

siempre que $r \leqslant s$. Por tanto $u \in H^r_{per}$ para $r \leqslant s$ y en particular $u \in H^s_{per}$. ■

Los argumentos usados en la demostración justifican que desde un principio se haya considerado $\varphi \in H^s_{per}$ y $\psi \in H^{s-1}_{per}$.

**Proposición 3.** *Sea $T \in \mathbb{R}^+$ fijo y $s \in \mathbb{R}$, entonces $u \in C\left([0,T], H^s_{per}\right)$. Donde $u$ está dada por (3.2).*
*Demostración:* Consideremos $t'$ tal que $t > t' > 0$. Debemos demostrar que

$$
\lim_{t \to t'} \|u(t) - u(t')\|_r = 0. \tag{3.5}
$$

Veamos

$$
\begin{aligned}
|u(t) - u(t')|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r |\widehat{u}(k,t) - \widehat{u}(k,t')|^2 \\
&= 2\pi \Bigg[ \Bigg( \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(1+k^2\right)^r |\left(\cos\left(\sigma\left(k\right)t\right) - \cos\left(\sigma\left(k\right)t'\right)\right)\widehat{\varphi}(k) \\
&\quad + \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t\right) - \operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t'\right)}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k)\Bigg|^2 \Bigg) + \left|(t-t')\widehat{\psi}(0)\right|^2 \Bigg].
\end{aligned}
$$

Si denotamos por

$$
N(k,t) = \left(\cos\left(\sigma(k)t\right) - \cos\left(\sigma(k)t'\right)\right)\widehat{\varphi}(k) + \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right) - \operatorname{sen}\left(\sigma(k)t'\right)}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k)
$$

para $k = 0$ se tiene que $N(0,t) = 0$ y para $k \neq 0$ tenemos que $\lim\limits_{t \to t'} N(k,t) = 0$, como $t - t' < T$ entonces $\lim\limits_{t \to t'} (t-t')\widehat{\psi}(0) = 0$. Solo necesitamos **la convergencia uniforme de la serie** para el intercambio con el límite y obtener (3.5). Para ello tomemos el $n$-ésimo término de la serie, lo mayoraremos por una serie convergente y aplicaremos el M–Test de Weierstrass. Denotemos por

$$n_{k,t} = 2\pi(1+k^2)^r \left| (\cos(\sigma(k)\, t) - \cos(\sigma(k)\, t'))\, \widehat{\varphi}(k) + \left( \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)\, t) - \operatorname{sen}(\sigma(k)\, t')}{\sigma(k)} \right) \widehat{\psi}(k) \right|^2$$

obtenemos

$$\begin{aligned} n_{k,t} &\leqslant 2\pi(1+k^2)^r \left( 2\left|\widehat{\varphi}(k)\right| + \frac{2}{\sigma(k)} \left|\widehat{\psi}(k)\right| \right)^2 \\ &\leqslant 2\pi(1+k^2)^r 2 \left( 4\left|\widehat{\varphi}(k)\right|^2 + \frac{4}{(\sigma(k))^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right| \right)^2 . \end{aligned}$$

Aplicando la serie en ambos lados de la desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} n_{k,t} &\leqslant 8 \left( \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} 2\pi(1+k^2)^r \left|\widehat{\varphi}(k)\right|^2 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \right) \\ &\leqslant 8 \left( \|\varphi\|_r^2 + \|\psi\|_{r-1}^2 \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Siempre que $r \leqslant s$. Usando el M-Test de Weierstrass hemos demostrado la convergencia uniforme de la serie. ■

**Proposición 4.** *Dada $u \in C\left([0,+\infty[\,, H^s_{per}\right)$, definida por (3.2), entonces $\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)$ en $H^{s-4}_{per}$.*

*Demostración:* Para probar que $\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) \in H^{s-4}_{per}$, debemos demostrar

$$\left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) \right\|_{s-4} \to 0 \text{ , cuando } h \to 0 \tag{3.6}$$

Para ello consideremos la norma en $H^r_{per}$, a fin de determinar el valor de $r$ adecuado. Veamos

$$\left\| \frac{\partial_t u(t+h)-\partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) \right\|_r^2 = \tag{3.7}$$

$$= = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u(k,t)}}{h} - \widehat{\partial_x^2 u(t)} + \widehat{\partial_x^4 u(t)} \right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u(k,t)}}{h} - (ik)^2\, \widehat{u}(k,t) + (ik)^4\, \widehat{u}(k,t) \right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u(k,t)}}{h} + \sigma(k)^2 \widehat{u}(k,t) \right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{C_1(k,t+h)}(\varphi) - \partial_t \widehat{C_1(k,t)}(\varphi)}{h} + \frac{\partial_t \widehat{C_2(k,t+h)}(\psi) - \partial_t \widehat{C_2(k,t)}(\psi)}{h} + \right.$$
$$\left. \sigma(k)^2 \left[ \cos\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right] \right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \left( \frac{\partial_t \widehat{C_1(k,t+h)}(\varphi) - \partial_t \widehat{C_1(k,t)}(\varphi)}{h} + \sigma(k)^2 \cos\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\varphi}(k) \right) + \right.$$
$$\left. \left( \frac{\partial_t \widehat{C_2(k,t+h)}(\psi) - \partial_t \widehat{C_2(k,t)}(\psi)}{h} + \sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\psi}(k) \right) \right|^2$$

$$\leqslant 2 \left\{ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{C_1(k,t+h)}(\varphi) - \partial_t \widehat{C_1(k,t)}(\varphi)}{h} + \sigma(k)^2 \cos\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\varphi}(k) \right|^2 + \right.$$
$$\left. 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1+k^2\right)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{C_2(k,t+h)}(\psi) - \partial_t \widehat{C_2(k,t)}(\psi)}{h} + \sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\psi}(k) \right|^2 \right\}$$

$$= 2 \left( \left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k)^2 \cos\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\varphi}(k) \right\|_r^2 + \right.$$

$$\left. \left\| \frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi) - \partial_t C_2(t)(\psi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\psi}(k) \right\|_r^2 \right). \tag{3.8}$$

Probaremos que el lado derecho de (3.8) tiende a 0, cuando $h \to 0$. Observemos que, si probamos la finitud del primer sumando del lado derecho de (3.8), habríamos determinado un valor de $r$ adecuado para el espacio de Sobolev periódico; de igual manera con el segundo sumando. Así, determinaríamos un $H^r_{per}$ donde habitaría nuestra $\partial_t^2 u(t)$. Para ello probaremos que las series que representan cada uno de los sumandos de (3.8) es convergente y por tanto la suma de estas series es convergente, con ello acotaríamos la serie (3.8) con una serie convergente. Luego por el M–Test de Weierstrass la serie (3.8) es converge y por tanto el límite puede ingresar dentro de la norma en (3.6) obteniendo el resultado esperado.
Iniciemos determinando el espacio donde habita $\partial_t u(x)$, para ello recordemos que

$$u(\cdot,t) = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi).$$

Como $C_1(t)(\varphi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\left(\sigma\left(k\right)t\right) \widehat{\varphi}(k)\Phi_k$ entonces

$$\partial_t C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t\right) \widehat{\varphi}(k)\Phi_k$$

Debemos demostrar

$$\left\| \frac{C_1(t+h)(\varphi) - C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma\left(k\right)t\right) \widehat{\varphi}(k)\Phi_k \right\|_r \to 0\ , \text{ cuando } h \to 0 \tag{3.9}$$

para un $r$ adecuado. En efecto

$$\left\| \frac{C_1(t+h)(\varphi) - C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k) \text{sen}\,(\sigma\,(k)\,t)\,\widehat{\varphi}(k)\Phi_k \right\|_r^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{C_1(\widehat{k,t+h})(\varphi) - C_1(\widehat{k,t})(\varphi)}{h} + \sigma(k)\text{ sen}\,(\sigma\,(k)\,t)\,\widehat{\varphi}(k) \right|^2 \tag{3.10}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\cos\,(\sigma\,(k)\,(t+h))\,\widehat{\varphi}(k) - \cos\,(\sigma\,(k)\,(t))\,\widehat{\varphi}(k)}{h} \right.$$

$$\left. + \,\sigma(k)\text{ sen}\,(\sigma\,(k)\,t)\,\widehat{\varphi}(k) \right|^2 \tag{3.11}$$

Ahora, definamos la función $f(\tau) = \cos\,(\sigma\,(k)\,(t+\tau))$ para $\tau \in [0,h]$, entonces $f$ es continua en $[0,h]$ y diferenciable en $]0,h[$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in \,]0,h[$ tal que

$$hf'(c) = f(h) - f(0) \tag{3.12}$$

Reemplazando en (3.11) tenemos

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|\sigma(k)\text{ sen}\,(\sigma\,(k)\,(t+c))\,\widehat{\varphi}(k) + \sigma(k)\text{ sen}\,(\sigma\,(k)\,t)\,\widehat{\varphi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r\,(\sigma(k))^2 \left|\text{sen}\,(\sigma\,(k)\,(t+c)) + \text{sen}\,(\sigma\,(k)\,t)\right|^2 |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+1}\,|k|^2\,4\,|\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
&\leqslant 4\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+1}(1+k^2)\,|\widehat{\varphi}(k)|^2\right) \\
&= 4\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2}\,|\widehat{\varphi}(k)|^2\right) \\
&= 4\,\|\varphi\|_{r+2} \\
&\leqslant 4\,\|\varphi\|_s \\
&< \infty
\end{aligned}$$

siempre que $r+2 \leqslant s$. Esto implica que nuestro $r$ adecuado satisface la desigualdad $r \leqslant s-2$. Así, mediante el M–Test de Weierstrass, hemos demostrado que la serie (3.10) es convergente y por tanto el límite, cuando $h \to 0$, puede ingresar dentro de la norma en (3.10), obteniendo el resultado que esperábamos.

Ahora, para $C_2(t)(\psi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\Phi_k$, se tiene

$$\partial_t C_2(t)(\psi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k)\Phi_k$$

Debemos demostrar

$$\left\| \frac{C_2(t+h)(\psi) - C_2(t)(\psi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k)\Phi_k \right\|_r \to 0\ ,\ \text{cuando } h \to 0 \tag{3.13}$$

para un $r$ adecuado. En efecto,

$$\left\|\frac{C_2(t+h)(\psi)-C_2(t)(\psi)}{h}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\Phi_k\right\|_r^2=$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\frac{C_2\widehat{(k,t+h)}(\psi)-C_2\widehat{(k,t)}(\psi)}{h}-\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\right|^2 \tag{3.14}$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\frac{\text{sen}\left(\sigma(k)(t+h)\right)\widehat{\psi}(k)-\text{sen}\left(\sigma(k)(t)\right)\widehat{\psi}(k)}{\sigma(k)h}\right.$$

$$\left.-\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\right|^2 \tag{3.15}$$

Definamos la función $g(\tau)=\text{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)$ para $\tau\in[0,h]$, entonces $g$ es continua en $[0,h]$ y diferenciable en $]0,h[$. Usando el Teorema del Valor Medio, existe $c\in\,]0,h[$ tal que

$$hg'(c)=g(h)-g(0) \tag{3.16}$$

Reemplazando en (3.15) tenemos

$$\begin{aligned}
&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\cos\left(\sigma\left(k\right)\left(t+c\right)\right)\widehat{\psi}(k)-\cos(\sigma(k)t)\widehat{\psi}(k)\right|^2\\
&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\cos\left(\sigma\left(k\right)\left(t+c\right)\right)-\cos\left(\sigma\left(k\right)t\right)\right|^2\left|\widehat{\psi}(k)\right|^2\\
&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r4\left|\widehat{\psi}(k)\right|^2\\
&\leqslant 4\left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\widehat{\psi}(k)\right|^2\right)\\
&=4\left\|\psi\right\|_r\\
&\leqslant 4\left\|\psi\right\|_{s-1}\\
&<\infty
\end{aligned}$$

De donde $\psi\in H^{s-1}_{per}\subseteq H^r_{per}$, siempre que $r\leqslant s-1$. Así, hemos acotado la serie (3.14) por una serie convergente. Por tanto, el límite, cuando $h\to 0$, puede ingresar dentro de la norma en (3.13) y obtener el resultado propuesto.
Por tanto,

$$\partial_t u(x,t)=C_1'(t)\varphi+C_2'(t)\psi\in H^r_{per}\quad\text{para}\quad r\leqslant s-1$$

En particular, podemos considerar $\partial_t u(x,t)\in H^{s-1}_{per}$.
Ahora, veamos el espacio donde habita $\partial_t^2 u(t)$. Analicemos para ello las segundas derivadas parciales.
Iniciemos con $\partial_t C_2(t)(\psi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\Phi_k$, derivando parcialmente tenemos

$$\partial_t^2 C_2(t)(\psi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}-\sigma(k)\text{sen}\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\Phi_k$$

Debemos demostrar que

$$\left\|\frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi)-\partial_t C_2(t)(\psi)}{h}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sigma(k)\text{sen}\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\psi}(k)\Phi_k\right\|_r\to 0,\ \text{si } h\to 0 \tag{3.17}$$

El cual es parte del objetivo planteado al principio. Veamos

$$\left\| \frac{\partial_t C_2(t+h)(\psi) - \partial_t C_2(t)(\psi)}{h} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma(k)\text{sen}\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k)\Phi_k \right\|_r^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{C_2(k,t+h)}(\psi) - \partial_t \widehat{C_2(k,t)}(\psi)}{h} + \sigma(k)\text{sen}\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k) \right|^2 \tag{3.18}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\cos(\sigma(k)(t+h))\,\widehat{\psi}(k) - \cos(\sigma(k)(t))\,\widehat{\psi}(k)}{h} \right.$$

$$\left. +\sigma(k)\,\text{sen}\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k) \right|^2 \tag{3.19}$$

Consideremos la función $f(\tau) = \cos(\sigma(k)(t+\tau))$ y aplicando el Teorema del Valor Medio (3.12), reemplazando en (3.19) tenemos

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r\,(\sigma(k))^2 \left| \text{sen}\,(\sigma(k)(t+c))\,\widehat{\psi}(k) + \text{sen}\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\psi}(k) \right|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left|\text{sen}\,(\sigma(k)(t+c)) + \text{sen}\,(\sigma(k)t)\right|^2 \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} 4 \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leqslant 4\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2\right) \\
&= 4\,\|\psi\|_{r+2} \\
&\leqslant 4\,\|\psi\|_{s-1} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

para $r+2 \leqslant s-1$; es decir $r \leqslant s-3$. Podemos considerar $\partial_t^2 C_2(t)(\psi) \in H_{per}^{s-3}$. Así, hemos acotado la serie (3.18) por una serie convergente. Por tanto, podemos intercambiar el límite y la norma en (3.17).

Finalmente, analicemos $\partial_t C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)\text{sen}\,(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\Phi_k$. Derivando parcialmente tenemos

$$\partial_t^2 C_1(t)(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -(\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\Phi_k$$

Debemos demostrar que

$$\left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -(\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\Phi_k \right\|_r \to 0, \text{ si } h \to 0 \tag{3.20}$$

para un $r$ adecuado. En efecto,

$$\left\| \frac{\partial_t C_1(t+h)(\varphi) - \partial_t C_1(t)(\varphi)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -(\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\Phi_k \right\|_r^2 =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{C_1(k,t+h)}(\varphi) - \partial_t \widehat{C_1(k,t)}(\varphi)}{h} + (\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k) \right|^2 \tag{3.21}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \sigma(k) \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)(t+h))\,\widehat{\varphi}(k) - \text{sen}\,(\sigma(k)(t))\,\widehat{\varphi}(k)}{h} \right.$$

$$\left. +(\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k) \right|^2 \tag{3.22}$$

Usando la función $g(\tau) = \cos(\sigma(k)(t+\tau))$, definida anteriormente y la ecuación (3.16), reemplazando en (3.22) tenemos

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|(\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)(t+c))\,\widehat{\varphi}(k) + (\sigma(k))^2 \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r (\sigma(k))^4 \left|\cos(\sigma(k)(t+c)) + \cos(\sigma(k)t)\right|^2 |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} |k|^4\, 4\, |\widehat{\varphi}(k)|^2 \\
&\leqslant 4\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2}(1+k^2)^2 |\widehat{\varphi}(k)|^2\right) \\
&= 4\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+4} |\widehat{\varphi}(k)|^2\right) \\
&= 4\,\|\varphi\|_{r+4} \\
&\leqslant 4\,\|\varphi\|_s \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

siempre que $r+4 \leqslant s$. Esto implica que, nuestro $r$ adecuado satisface $r \leqslant s-4$. En particular, podemos considerar $\partial_t^2 C_1(t)(\varphi) \in H_{per}^{s-4}$. Por tanto,

$$
\partial_t^2 u(x,t) = C_1''(t)(\varphi) + C_2''(t)(\psi) \in H_{per}^r \quad \text{para} \quad r \leqslant s-4
$$

En particular, podemos considerar $\partial_t^2 u(x,t) = C_1''(t)\varphi + C_2''(t)\psi \in H_{per}^{s-4}$. Además, la convergencia de la serie (3.21) permite el intercambio del límite y la norma en (3.20). ■

**Proposición 5 (Dependencia continua en compactos).** *Sean* $u = C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi) \in H_{per}^s$ *y* $\widetilde{u} = C_1(t)(\widetilde{\varphi}) + C_2(t)(\widetilde{\psi}) \in H_{per}^s$ *soluciones de* ($Q_1$), esto es

$$
\begin{array}{lcl}
\partial_t^2 u = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) & & \partial_t^2 \widetilde{u} = \partial_x^2 \widetilde{u}(t) - \partial_x^4 \widetilde{u}(t) \\
u(0) = \varphi \in H_{per}^s & , & \widetilde{u}(0) = \widetilde{\varphi} \in H_{per}^s \\
\partial_t u(0) = \psi \in H_{per}^{s-1} & & \partial_t \widetilde{u}(0) = \widetilde{\psi} \in H_{per}^{s-1}
\end{array}
$$

Si $\varphi \xrightarrow{H_{per}^s} \widetilde{\varphi}$ y $\psi \xrightarrow{H_{per}^{s-1}} \widetilde{\psi}$ entonces $u \xrightarrow{H_{per}^s} \widetilde{u}$.

*Demostración:* Consideremos la norma en $H_{per}^r$ y determinemos el valor de $r$ adecuado

$$
\begin{aligned}
\|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_r^2 &= \left\|C_1(t)(\varphi) + C_2(t)(\psi) - \left(C_1(t)(\widetilde{\varphi}) - C_2(t)(\widetilde{\psi})\right)\right\|_r^2 \\
&= \left\|C_1(t)\left(\varphi - \widetilde{\varphi}\right) + C_2(t)\left(\psi - \widetilde{\psi}\right)\right\|_r^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|\widehat{C_1(k,t)\left(\varphi - \widetilde{\varphi}\right)} + \widehat{C_2(k,t)\left(\psi - \widetilde{\psi}\right)}\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2\left[\left|\widehat{C_1(k,t)\left(\varphi - \widetilde{\varphi}\right)}\right|^2 + \left|\widehat{C_2(k,t)\left(\psi - \widetilde{\psi}\right)}\right|^2\right] \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2\left[\left|\cos(\sigma(k)t)\left(\widehat{\varphi} - \widehat{\widetilde{\varphi}}\right)(k)\right|^2 + \left|\frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\left(\widehat{\psi} - \widehat{\widetilde{\psi}}\right)(k)\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+4\pi\left[\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(k)\right|^2+t^2\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(0)\right|^2\right]$$

$$\leqslant 2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+4\pi\left[\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r-1}\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(k)\right|^2+t^2\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(0)\right|^2\right]$$

considerando $\quad t\in[0;T]$

$$\leqslant 2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+4\pi\left[\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r-1}M(t)\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(k)\right|^2+M(t)\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(0)\right|^2\right]$$

donde $\quad M(t)=\text{máx}\left\{1;t^2\right\}$

$$\leqslant 2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+2M(t)\left[2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r-1}\left|\left(\widehat{\psi}-\widehat{\widetilde{\psi}}\right)(k)\right|^2\right]$$

$$=2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+2M(t)\left\|\psi-\widetilde{\psi}\right\|_{r-1}^2$$

De donde obtenemos

$$\sup_{t\in[0;T]}\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|_r^2\leqslant 2\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_r^2+2M(t)\left\|\psi-\widetilde{\psi}\right\|_{r-1}^2 \tag{3.23}$$

El cual es finito para $r\leqslant s$. Así, podemos considerar en particular $r=s$. Obtenemos que $u\to\widetilde{u}$ en $H^s_{per}$, cuando $\varphi\to\widetilde{\varphi}$ en $H^s_{per}$ y $\psi\to\widetilde{\psi}$ en $H^{s-1}_{per}$. ■

**Proposición 6.** *Sean $\varphi,\widetilde{\varphi}\in H^s_{per}$ y $\psi,\widetilde{\psi}\in H^{s-1}_{per}$. Supongamos que existen $u=C_1(t)(\varphi)+C_2(t)(\psi)$ y $\widetilde{u}=C_1(t)(\widetilde{\varphi})+C_2(t)(\widetilde{\psi})$ dos soluciones de* ($Q_1$), entonces $u=\widetilde{u}$ en $H^s_{per}$.

*Demostración:* La desigualdad (3.23) nos permite demostrar que la solución es única. En efecto, de (3.23) tenemos

$$\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|_s^2\leqslant\sup_{t\in[0;T]}\left\|u(t)-\widetilde{u}(t)\right\|_s^2\leqslant 2\left(\left\|\varphi-\widetilde{\varphi}\right\|_s^2+M(t)\left\|\psi-\widetilde{\psi}\right\|_{s-1}^2\right)=0$$

de donde concluimos que $u=\widetilde{u}$.

**Corolario 1.** *La única solución de* ($Q_1$) es

$$u(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\varphi}(k)\right)\Phi_k(x)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)$$

**Corolario 2.** *Sea $t\in\mathbb{R}^+$ fijo. Los operadores lineales $C_1(t):H^s_{per}\to H^s_{per}$ y $C_2(t):H^{s-1}_{per}\to H^{s-1}_{per}$ satisfacen $\|C_1(t)(\varphi)\|_s\leqslant\|\varphi\|_s$ y $\|C_2(t)(\psi)\|_{s-1}\leqslant\|\psi\|_{s-1}$.*

*Demostración:*

$$\begin{aligned}\left\|C_1(t)(\varphi)\right\|_s^2&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\widehat{C_1(k,t)(\varphi)}\right|^2\\&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\varphi}(k)\right|^2\\&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\widehat{\varphi}(k)\right|^2\\&=\left\|\varphi\right\|_s\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|C_2(t)(\psi)\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{C_2(k,t)(\psi)}\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left|\frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \frac{1}{k^2(1+k^2)} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \frac{1}{k^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \frac{1}{k^2} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + 2\pi \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 + 2\pi \left|t\widehat{\psi}(0)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-1} \left|\widehat{\psi}(k)\right|^2 \\
&= \|\psi\|_{s-1}.
\end{aligned}
$$

**4. Ecuación de Boussinesq no homogénea.** Estudiaremos la existencia de la solución de la ecuación de Boussinesq no homogénea en espacios de Sobolev periódico.

**Teorema 2.** *La ecuación*

$$
(\mathrm{Q}_2) \left|
\begin{array}{l}
u \in C\left([0,+\infty[\,, H^s_{per}\right), \\
\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F(t) \in H^{s-4}_{per}, \\
u(0) = \varphi \in H^s_{per}, \\
\partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per}.
\end{array}
\right. \tag{4.1}
$$

*donde, $F \in C\left([0;T]\,, H^{s-1}_{per}\right)$, entonces existe una única solución $u \in C\left([0,+\infty[\,, H^s_{per}\right)$ del PVI* ($\mathrm{Q}_2$)*.*

Seguiremos los mismos pasos usados en el caso de la ecuación homogénea.

**Proposición 7.** *Si denotamos por $\sigma(k) = |k|\left(1+k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, para $k \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\cos(\sigma(k)t)\,\widehat{\varphi}(k)\right)\Phi_k(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x) \\
&+ \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left[\int_0^t \frac{sen\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right]\Phi_k + \int_0^t \left(t-\tilde{t}\right)\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

*es candidato a solución de* ($\mathrm{Q}_2$)*, donde estamos denotando $\Phi_k(x) = e^{ikx}$.*

*Demostración:* Usando la transformada de Fourier, al igual que el caso homogéneo, obtenemos la siguiente familia de EDOs

$$
(\Omega_{2,k}) \left|
\begin{array}{l}
\widehat{u} \in C\left([0,+\infty[\,, \ell^2_{s-1}(\mathbb{Z})\right) \\
\partial_t^2 \widehat{u}(t,k) + \left(k^2+1\right)k^2\widehat{u}(k,t) = \widehat{F}(k,t) \\
\widehat{u}(k,0) = \widehat{\varphi}(k) \\
\partial_t \widehat{u}(k,0) = \widehat{\psi}(k)
\end{array}
\right. \tag{4.3}
$$

De la cual ya tenemos la solución del caso homogéneo

$$
\widehat{u}_h(k,t) = C_1(t)(\widehat{\varphi}) + C_2(t)(\widehat{\psi})
$$

donde $C_1(t) = \cos(\sigma(k)t)$ y $C_2(t) = \dfrac{1}{\sigma(k)}\text{sen}\,(\sigma(k)t)$. Ahora, obtendremos una solución particular de la ecuación (4.3), para ello usaremos el método de variación de parámetros. Consideremos la siguiente función

$$\widehat{u}_p(k,t) = U(t)C_1(t) + V(t)C_2(t) \tag{4.4}$$

de manera que se cumpla

$$\begin{cases} U'(t)C_1(t) + V'(t)C_2(t) = 0 \\ U'(t)C_1'(t) + V'(t)C_2'(t) = \widehat{F}(k,t) \end{cases}$$

Reemplazando las derivadas de $C_1(t)$ y $C_2(t)$ obtenemos el siguiente familia de sistema de ecuaciones, para $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\begin{cases} \cos(\sigma(k)t)\,U'(t) + \dfrac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}V'(t) = 0 \\ -\sigma(k)\text{sen}\,(\sigma(k)t)\,U'(t) + \cos(\sigma(k)t)\,V'(t) = \widehat{F}(k,t) \end{cases}$$

donde el determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} \cos(\sigma(k)t) & \dfrac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \\ -\sigma(k)\text{sen}\,(\sigma(k)t) & \cos(\sigma(k)t) \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Así $U'(t) = -\dfrac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,t)$ y $V'(t) = \cos(\sigma(k)t)\,\widehat{F}(k,t)$. Luego

$$U(t) = \int_0^t -\frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \text{ y } V(t) = \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \tag{4.5}$$

Reemplazando en (4.4)

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(k,t) &= \cos(\sigma(k)t)\int_0^t -\frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} + \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{-\text{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\cos(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} + \int_0^t \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)t)\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) - \text{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\cos(\sigma(k)t)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \int_0^t \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} \end{aligned}$$

Si $k = 0,\ \widehat{u}_h(t,0) = 1\widehat{\phi}(0) + t\widehat{\psi}(0)$. Así $\widehat{u}_p(t,0) = U(t)1 + V(t)t$. Aplicando el método de variación de parámetros, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} U'(t)1 + V'(t)t = 0 \\ U'(t)0 + V'(t)1 = \widehat{F}(0,t) \end{cases}$$

cuyo determinante es 1 y obtenemos las soluciones

$$U(t) = \int_0^t -\tilde{t}\,\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t} \quad \text{y} \quad V(t) = \int_0^t \widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t}$$

entonces $\widehat{u}_p(0,t) = -\displaystyle\int_0^t \tilde{t}\,\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t} + \int_0^t t\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t} = \int_0^t \left(t-\tilde{t}\right)\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t}$. Por tanto

$$\widehat{u}_p(t,k) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t} & , \quad k \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^t \left(t-\tilde{t}\right)\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t} & , \quad k = 0 \end{cases}$$

Así, la cara de la solución de la ecuación no homogénea es

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)t\right)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)}_{u_H(x,t):=}$$
$$+ \underbrace{\sum_{0\neq k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k(x) + \int_0^t \left(t-\tilde{t}\right)\widehat{F}(0,\tilde{t})d\tilde{t}}_{u_P(x,t):=}$$

donde $u_H$ es la solución de la ecuación homogénea de ($Q_2$) que ya fue probada y $u_P$ es la solución particular de ($Q_2$).

Como $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\text{sen}\left(\sigma(k)(t-\widetilde{t})\right)}{\sigma(k)} = t-\widetilde{t}$, podemos definir $\left.\dfrac{\text{sen}\left(\sigma(k)(t-\widetilde{t})\right)}{\sigma(k)}\right|_{k=0} = t-\widetilde{t}$ y reescribir la solución

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\cos\left(\sigma(k)t\right)\widehat{\varphi}(k) + \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)t\right)}{\sigma(k)}\widehat{\psi}(k)\right)\Phi_k(x)}_{u_H(x,t)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k(x)}_{u_P(x,t)}$$

■

**Proposición 8.** *Sea $T \in \mathbb{R}^+$ fijo y $s \in \mathbb{R}$, entonces para $t \in [0,T]$*

$$u_P(t) \in H^s_{per} \quad y \quad \|u_P(t)\|_s \leqslant T\,\|F\|_{s-1,\infty}\,, \tag{4.6}$$

*donde $F \in C\left([0,T]\,, H^{s-1}_{per}\right)$ y $\|F\|_{s-1,\infty} := \sup_{t\in[0,T]}\|F(t)\|_{s-1}$.*

*Demostración:* Para probar que $u_P(t) \in H^s_{per}$, usemos la norma en $H^r_{per}$

$$\begin{aligned}
\|u_P(t)\|_r^2 &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^r\left|\int_0^t \frac{\text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)}\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^{r-1}\left|\int_0^t \text{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^{r-1}\left|\int_0^t \widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right|^2 \\
&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^{r-1}\left(\int_0^t \left|\widehat{F}(k,\tilde{t})\right|d\tilde{t}\right)^2 \\
&\leqslant 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^{r-1}\left(\int_0^t \left|\widehat{F}(k,\tilde{t})\right|^2 d\tilde{t}\right)t \\
&\leqslant \left(\int_0^t 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(1+k^2\right)^{r-1}\left|\widehat{F}(k,\tilde{t})\right|^2 d\tilde{t}\right)t \\
&= \left(\int_0^t \|F(t)\|_{r-1}^2\, d\tilde{t}\right)t \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\|F(t)\|_{r-1}^2\left(\int_0^t 1d\tilde{t}\right)t \\
&= \|F\|_{s-1,\infty}^2\, t^2 \\
&\leqslant T^2\,\|F\|_{s-1,\infty}^2 < \infty
\end{aligned} \tag{4.7}$$

para $r \leqslant s$. Así, podemos considerar $u_P \in H^s_{per}$ y de (4.7) obtenemos (4.6). ■

**Proposición 9.** *Sea $T \in \mathbb{R}^+$ fijo y $s \in \mathbb{R}$ entonces $u_p \in C\left([0,T], H^s_{per}\right)$.*

*Demostración:* Sean $t_1, t_2 \in [0,T]$ tales que $0 < t_1 < t_2 < T$. Debemos probar

$$\|u_P(t_1) - u_P(t_2)\|_r \to 0 \quad \text{cuando} \quad t_1 \to t_2$$

Para un valor de $r$ adecuado. Veamos

$$\begin{aligned}
\|u_p(t_1) - u_p(t_2)\|_r^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \int_0^{t_1} \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}(k,t')dt' \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{t_2} \frac{\text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}(k,t')dt' \right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^{t_1} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^{t_2} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right|^2
\end{aligned}$$

Acotaremos la serie, para ello consideremos el $n$-ésimo término

$$\begin{aligned}
n_{k,t'} &= 2\pi \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^{t_1} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right|^2 \\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \int_0^{t_1} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{t_2} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right|^2 \\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \left| \int_0^{t_1} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \int_0^{t_2} \text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))\, \widehat{F}(k,t')dt' \right| \right)^2 \\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \int_0^{t_1} \left| \text{sen}\,(\sigma(k)(t_1 - t'))\, \widehat{F}(k,t') \right| dt' \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t_2} \left| \text{sen}\,(\sigma(k)(t_2 - t'))\, \widehat{F}(k,t') \right| dt' \right)^2 \\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} 2 \left[ \left( \int_0^{t_1} \left| \widehat{F}(k,t') \right| dt' \right)^2 + \left( \int_0^{t_2} \left| \widehat{F}(k,t') \right| dt' \right)^2 \right] \\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} 2 \left[ \left( \int_0^{t_1} \left| \widehat{F}(k,t') \right|^2 dt' \right) t_1 + \left( \int_0^{t_2} \left| \widehat{F}(k,t') \right|^2 dt' \right) t_2 \right]
\end{aligned}$$

Aplicando la suma infinita en ambos lados de la desigualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} n_{k,t'} \leqslant 2 &\left[ \left( \int_0^{t_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \widehat{F}(k,t') \right|^2 dt' \right) t_1 \right. \\
&\quad \left. + \left( \int_0^{t_2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \widehat{F}(k,t') \right|^2 dt' \right) t_2 \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\left[\left(\int_0^{t_1} \|F\|_{r-1}^2\, dt'\right) t_1 + \left(\int_0^{t_2} \|F\|_{r-1}^2\, dt'\right) t_2\right] \\
&= 2\,\|F\|_{r-1}^2 \left[\left(\int_0^{t_1} 1dt'\right) t_1 + \left(\int_0^{t_2} 1dt'\right) t_2\right] \\
&= 2\,\|F\|_{r-1}^2 \left(t_1^2 + t_2^2\right) \\
&< 4\,\|F\|_{r-1}^2\, T^2 \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

siempre que $r \leqslant s$. En particular podemos considerar $r = s$. Usando el M–Test, hemos probado la convergencia uniforme de la serie y por tanto podemos intercambiar la suma infinita con el límite para obtener

$$\lim_{t_1 \to t_2} \|u_P(t_1) - u_P(t_2)\|_s \to 0$$

**Proposición 10.** *Dada* $u = u_H + u_P \in C\left([0, +\infty[\,, H^s_{per}\right)$, *entonces*

$$\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F(t) \textit{ en } H^{s-4}_{per}.$$

*Demostración:* Para probar $\partial_t^2 u(t) = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F(t) \in H^{s-4}_{per}$, debemos demostrar

$$\left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) + F(t) \right\|_{s-4} \to 0 \text{ , cuando } h \to 0 \tag{4.8}$$

Para ello, consideremos la norma en $H^r_{per}$, a fin de determinar el valor de $r$ adecuado. Veamos,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial_t u(t+h) - \partial_t u(t)}{h} - \partial_x^2 u(t) + \partial_x^4 u(t) + F(t) \right\|_r = \\
&= \left\| \frac{\partial_t u_H(t+h) - \partial_t u_H(t)}{h} - \partial_x^2 u_H(t) + \partial_x^4 u_H(t) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r \\
&\leqslant \underbrace{\left\| \frac{\partial_t u_H(t+h) - \partial_t u_H(t)}{h} - \partial_x^2 u_H(t) + \partial_x^4 u_H(t) \right\|_r}_{u_H(t)} \\
&\qquad + \underbrace{\left\| \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r}_{u_p(t)}
\end{aligned}
$$

Para el caso de la norma sobre la parte de la desigualdad, que representa la solución de la ecuación homogénea, ya se probó que esta tiende a 0, cuando $h$ tiende a 0. Solo debemos probar que la norma de la parte que representa a la solución particular de la ecuación tiende a 0, cuando $h$ tiende a 0. Para ello trataremos de acotar la serie que representa esta norma.

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \partial_x^2 u_P(t) + \partial_x^4 u_P(t) + F(t) \right\|_r = \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u_p(k,t)}}{h} + \sigma(k)^2 \widehat{u_p}(t) - \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u_p(k,t)}}{h} \right. \\
&\quad \left. + \sigma(k)^2 \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t-\tilde{t}\,)\right)}{\sigma(k)} \widehat{F}(k,t) d\tilde{t} - \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u_p(k,t)}}{h} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t-\tilde{t}\,)\right) \widehat{F}(k,t) d\tilde{t} - \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\partial_t \widehat{u_p(k,t+h)} - \partial_t \widehat{u_p(k,t)}}{h} \right. \\
&\quad \left. - \left( \int_0^t -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t-\tilde{t}\,)\right) \widehat{F}(k,t) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \right) \right|^2 \\
&= \left\| \frac{\partial_t u_P(t+h) - \partial_t u_P(t)}{h} - \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t) \right) \Phi_k \right\|_r
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Analiceramos el caso de las derivadas de primer y segundo orden de la solución particular.

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_p'(k,t) &= \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right)}{\sigma(k)} \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} - \cos(\sigma(k)t) \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \widehat{F}(k,t) \\
&\quad + \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} + \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)t)}{\sigma(k)} \cos(\sigma(k)t) \widehat{F}(k,t) \\
&= \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} + \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} \\
&= \int_0^t \left( \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) + \cos(\sigma(k)t) \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) \right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} \\
&= \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\,\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Así

$$
u_p'(k,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k
$$

Para el caso de la derivada de segundo orden

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_p''(k,t) &= \sigma(k) \cos(\sigma(k)t) \int_0^t \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} + \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \\
&\quad - \sigma(k) \operatorname{sen}(\sigma(k)t) \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\,\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} + \cos(\sigma(k)t) \cos(\sigma(k)t) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) \\
&= -\sigma(k) \int_0^t \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\,\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}\,) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Luego

$$
u_p''(k,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\,\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t) \right) \Phi_k
$$

Ahora veremos los espacios $H^r_{per}$, para un $r$ adecuado, para los cuales la derivada de primer y segundo orden son válidas. Para ello, usaremos el M–test de Weiertrasss para probar

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k\right\|_r=0$$

Para ello, partamos de

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k\right\|_r^2=\\
&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\frac{\widehat{u}_p(t+h)-\widehat{u}_p(t)}{h}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right|_r^2\\
&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\frac{1}{h\sigma(k)}\left[\operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+h)\right)\int_0^{t+h}\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right.\right.\\
&\quad-\cos\left(\sigma(k)(t+h)\right)\int_0^{t+h}\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}-\operatorname{sen}\left(\sigma(kt)\right)\int_0^t\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\\
&\quad\left.\left.+\cos\left(\sigma(kt)\right)\int_0^t\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right]-\left(\int_0^t C_1\left(k,t\widehat{-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right)\right|^2
\end{aligned}\tag{4.12}$$

Aplicaremos el Teorema del valor Medio. Para ello definamos la función

$$\begin{aligned}
G(\tau):=\operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)&\int_0^{t+\tau}\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\\
-\cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)&\int_0^{t+\tau}\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}
\end{aligned}$$

$G$ es una función continua en $[0,h]$ y diferenciable en $]0,h[$, por el Teorema del Valor Medio existe $c\in\,]0,h[$ tal que

$$hG'(c)=G(h)-G(0)$$

donde

$$\begin{aligned}
G'(\tau)&=\sigma(k)\cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)\int_0^{t+\tau}\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\\
&\quad-\sigma(k)\operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)\int_0^{t+\tau}\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\\
&=\sigma(k)\left(\int_0^{t+\tau}\left(\cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)\cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\right.\right.\\
&\quad\left.\left.-\operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right)\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\\
&=\sigma(k)\int_0^{t+\tau}\cos\left(t+\tau-\tilde{t}\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\\
&=\sigma(k)\int_0^{t+\tau}C_1\left(k,t+\widehat{\tau-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)d\tilde{t}
\end{aligned}$$

reemplazando en (4.12) tenemos

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right)\widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k\right\|_r^2\\
&=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^r\left|\int_0^{t+c}C_1\left(k,t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)d\tilde{t}-\int_0^t C_1\left(k,t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)d\tilde{t}\right|^2
\end{aligned}\tag{4.13}$$

Recordemos que, si tenemos dos funciones integrables $f$ y $g$ sobre un intervalo $[a,b]$ se cumple la desigualdad de Cauchy–Schwarz para integrales

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\right)\left(\int_a^b\left(g(x)\right)^2dx\right)$$

En el caso que $g(x) = 1$, para todo $x \in [a, b]$, tenemos

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2\, dx\right)(b-a)$$

Aplicando esta desigualdad en la serie que representa (4.13), tenemos

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k \right\|_r^2 \\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left|\int_0^{t+c} C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)d\tilde{t}\right|^2\right. \\
&\quad \left. + \left|\int_0^{t} C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)d\tilde{t}\right|^2\right] \qquad (4.14)\\
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 2 \left[\left(\int_0^{t+c} \left|C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right|^2 d\tilde{t}\right)\times(t+c)\right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^{t} \left|C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right|^2 d\tilde{t}\right)\times t\right] \\
&\leqslant 2\int_0^{t+c}\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right|^2\right) d\tilde{t}\times(t+c) \\
&\quad +2\int_0^{t}\left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left|C_1\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right|^2\right) d\tilde{t}\times t \\
&= 2\left(\int_0^{t+c} \left\|C_1\left(t+c-\tilde{t}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right\|_r^2 d\tilde{t}\right)\times(t+c) \\
&\quad +2\left(\int_0^{t} \left\|C_1\left(t+c-\tilde{t}\right)\left(F(k,\tilde{t})\right)\right\|_r^2 d\tilde{t}\right)\times t \\
&\leqslant 2\left(\int_0^{t+c} \left\|F(k,\tilde{t})\right\|_r^2 d\tilde{t}\right)(t+c) + 2\left(\int_0^{t} \left\|F(k,\tilde{t})\right\|_r^2 d\tilde{t}\right)\times t \text{ para } r\leqslant s \\
&\leqslant 2\left(\int_0^{t+c} \sup_{\tilde{t}\in[0,T]} \left\|F(k,\tilde{t})\right\|_{s-1}^2 d\tilde{t}\right)\times(t+c) + 2\left(\int_0^{t} \sup_{\tilde{t}\in[0,T]} \left\|F(k,\tilde{t})\right\|_{s-1}^2 d\tilde{t}\right)\times t \\
&\leqslant 2\left\|F\right\|_{s-1,\infty}^2 \times\left((t+c)^2+t^2\right) \quad \text{donde} \quad t+c, t\in[0,T] \\
&\leqslant 4\left\|F\right\|_{s-1,\infty}^2 \left(T^2\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Esto prueba que la serie dada en (4.14) converge uniformemente. Por tanto, el límite cuando $h \to 0$ puede ingresar en la norma y así

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \cos\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k \right\|_r = 0$$

Analicemos el caso de la segunda derivada. Debemos demostrar

$$\left\| \frac{u_p'(t+h)-u_p'(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\sigma(k)\left(\int_0^t \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t})d\tilde{t}\right)\Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k,\tilde{t})\Phi_k \right\|_r \to 0$$

cuando $h$ tiende a 0, para un $r$ adecuado. Usaremos el M–Test de Weiertrass para probar la convergencia uniforme de la serie que la representa. Veamos,

$$\left\| \frac{u_p'(t+h)-u_p'(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k,\tilde{t}) \Phi_k \right\|_r$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{\widehat{u}_p'(t+h)-\widehat{u}_p'(t)}{h} + \int_0^t \sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} - \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \frac{1}{h} \left[ \cos\left(\sigma(k)(t+h)\right) \int_0^{t+h} \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right. \right.$$

$$+ \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+h)\right) \int_0^{t+h} \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} - \cos\left(\sigma(kt)\right) \int_0^t \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t}$$

$$\left. \left. + \operatorname{sen}\left(\sigma(kt)\right) \int_0^t \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right] + \sigma(k) \left( \int_0^t C_2\left(k, \widehat{t-\tilde{t})\left(F(k,\tilde{t}\right)} \right) \right) - \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2$$

Definamos la función

$$H(\tau) := \cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \int_0^{t+\tau} \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t}$$
$$+ \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \int_0^{t+\tau} \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t}$$

$H$ es una función continua en $[0,h]$ y diferenciable en $]0,h[$, así por el Teorema del Valor Medio existe $c \in ]0,h[$ tal que

$$hH'(c) = H(h) - H(0)$$

donde

$$H'(\tau) = -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \int_0^{t+\tau} \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t}$$
$$+ \sigma(k) \cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \int_0^{t+\tau} \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t+\tau)$$
$$= -\sigma(k) \left( \int_0^{t+\tau} \left( \operatorname{sen}\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \cos\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \right. \right.$$
$$\left. \left. - \cos\left(\sigma(k)(t+\tau)\right) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\tilde{t}\right) \right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right) + \widehat{F}(k,t+\tau)$$
$$= -\sigma(k) \int_0^{t+\tau} \operatorname{sen}\left(t+\tau-\tilde{t}\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t+\tau)$$
$$= -\sigma(k) \int_0^{t+\tau} C_2\left(k, t+\widehat{\tau-\tilde{t}}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t+\tau)$$

reemplazando tenemos

$$\left\| \frac{u_p'(t+h)-u_p'(t)}{h} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t -\sigma(k) \operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t-\tilde{t}\right)\right) \widehat{F}(k,\tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{F}(k,\tilde{t}) \Phi_k \right\|_r$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| -\sigma(k) \int_0^{t+c} C_2\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) d\tilde{t} + \widehat{F}(k,t+c) \right.$$

$$\left. + \sigma(k) \int_0^t C_2\left(k, \widehat{t-\tilde{t})\left(F(k,\tilde{t}\right)}\right) d\tilde{t} - \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2 \tag{4.15}$$

Apliquemos la siguiente propiedad

$$(a+b+c+d)^2 \leqslant 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

continuando en (4.15)

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r 4 \left( \left| \sigma(k) \int_0^{t+c} C_2\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right) (F(k,\tilde{t}))d\tilde{t} \right|^2 + \left| \widehat{F}(k,t+c) \right|^2 \right.\\
&\quad \left. + \left| \sigma(k) \int_0^{t} C_2\left(k, \widehat{t-\tilde{t}\,)\,(}F(k,\tilde{t})\right) d\tilde{t} \right|^2 + \left| \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left(\sigma(k)\right)^2 (t+c) \int_0^{t+c} \left| C_2\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) \right|^2 d\tilde{t} \right.\\
&\quad +2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \widehat{F}(k,t+c) \right|^2\\
&\quad +2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left(\sigma(k)\right)^2 (t) \int_0^{t} \left| C_2\left(k, \widehat{t-\tilde{t}\,)\,(}F(k,\tilde{t})\right) \right|^2 d\tilde{t}\\
&\quad \left. +2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( (t+c) \times \int_0^{t+c} \left( 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left| C_2\left(k, t+\widehat{c-\tilde{t}}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) \right|^2 \right) d\tilde{t} \right.\\
&\quad +2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \widehat{F}(k,t+c) \right|^2\\
&\quad +t \times \int_0^{t} \left( 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r+2} \left| C_2\left(k, \widehat{t-\tilde{t}\,)\,(}F(k,\tilde{t})\right) \right|^2 \right) d\tilde{t}\\
&\quad \left. +2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \widehat{F}(k,\tilde{t}) \right|^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( (t+c) \times \int_0^{t+c} \left\| C_2\left(t+c-\tilde{t}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) \right\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \left\| F(k,t+c) \right\|_r^2 \right.\\
&\quad \left. + t \times \int_0^{t} \left\| C_2\left(t-\tilde{t}\right) \left(F(k,\tilde{t})\right) \right\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \left\| F(k,t) \right\|_r^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( (t+c) \times \int_0^{t+c} \left\| F(k,\tilde{t}) \right\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \left\| F(k,t+c) \right\|_r \right.\\
&\quad \left. + t \times \int_0^{t} \left\| F(k,\tilde{t}) \right\|_{r+2}^2 d\tilde{t} + \left\| F(k,t) \right\|_r^2 \right) \quad , \quad r+2 \leqslant s-1\\
&\leqslant 4 \left( (t+c) \times \int_0^{t+c} \sup_{\tilde{t}\in[0,T]} \left\| F(k,\tilde{t}) \right\|_{s-3}^2 d\tilde{t} + \sup_{t\in[0,T]} \left\| F(k,t) \right\|_{s-3}^2 \right.\\
&\quad \left. + t \times \int_0^{t} \sup_{\tilde{t}\in[0,T]} \left\| F(k,\tilde{t}) \right\|_{s-3}^2 d\tilde{t} + \sup_{t\in[0,T]} \left\| F(k,t) \right\|_{s-3}^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( (t+c)^2 \times \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 + 2 \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 + t^2 \times \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( T^2 \times \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 + 2 \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 + T^2 \times \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 \right)\\
&\leqslant 4 \left( 2T^2 \times \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 + 2 \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 \right)\\
&\leqslant 8 \left\| F \right\|_{s-3,\infty}^2 \left(T^2+1\right)\\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Por el M–Test de Weierstrass, hemos probado que la serie converge uniformemente. Luego, el límite puede ingresar en la norma y obtener el resultado esperado. ■

**Proposición 11 (Dependencia continua en compactos).** *Sean* $u = u_H + u_P \in H^s_{per}$ *y* $\widetilde{u} = \widetilde{u}_H + \widetilde{u}_P \in$

*$H^s_{per}$ tales que*

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u &= \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F_1(t)\\ u(0) &= \varphi \in H^s_{per}\\ \partial_t u(0) &= \psi \in H^{s-1}_{per}\end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned}\partial_t^2 \widetilde{u} &= \partial_x^2 \widetilde{u}(t) - \partial_x^4 \widetilde{u}(t) + F_2(t)\\ \widetilde{u}(0) &= \widetilde{\varphi} \in H^s_{per}\\ \partial_t \widetilde{u}(0) &= \widetilde{\psi} \in H^{s-1}_{per}\end{aligned}$$

*Si $F_1 \xrightarrow{H^{s-1}_{per}} F_2$, $\varphi \xrightarrow{H^s_{per}} \widetilde{\varphi}$ y $\psi \xrightarrow{H^{s-1}_{per}} \widetilde{\psi}$ entonces $u \xrightarrow{H^s_{per}} \widetilde{u}$.*

*Demostración:* La demostración solo depende de la dependencia continua de la solución particular

$$\begin{aligned}
&\|u_P(t) - \widetilde{u}_P(t)\|_r^2 =\\
&= \left\| \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_1(k,t')dt' - \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_2(k,t')dt' \right\|_r^2\\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r \left| \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_1(k,t')dt' - \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))}{\sigma(k)} \widehat{F}_2(k,t')dt' \right|^2\\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))\, \widehat{F}_1(k,t')dt' - \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t'))\, \widehat{F}_2(k,t')dt' \right|^2\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t')) \left(\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2\right)(k,t')dt' \right|^2,
\end{aligned}$$

acotando el $n-$ésimo término, tenemos

$$\begin{aligned}
n_{k,t} &= 2\pi \frac{(1+k^2)^r}{\sigma(k)^2} \left| \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t')) \left(\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2\right)(k,t')dt' \right|^2\\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \int_0^t \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t')) \left(\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2\right)(k,t')dt' \right|^2\\
&\leqslant 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \int_0^t \left| \operatorname{sen}(\sigma(k)(t-t')) \left(\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2\right)(k,t') \right| dt' \right)^2\\
&= 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \int_0^t \left| \left(\widehat{F}_1 - \widehat{F}_2\right)(k,t') \right| dt' \right)^2\\
&= 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \int_0^t \left| \left(\widehat{F_1 - F_2}\right)(k,t') \right| dt' \right)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando la suma infinita en ambos lados de la desigualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} n_{k,t} &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left( \int_0^t \left| \left(\widehat{F_1 - F_2}\right)(k,t') \right|^2 dt' \right) \times t\\
&= \left( \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi(1+k^2)^{r-1} \left| \left(\widehat{F_1 - F_2}\right)(k,t') \right|^2 dt' \right) \times t\\
&= \left( \int_0^t \|F_1(t') - F_2(t')\|_{r-1}^2 \, dt' \right) \times t\\
&\leqslant \left( \int_0^t \sup_{t' \in [0,T]} \|F_1(t') - F_2(t')\|_{r-1}^2 \, dt' \right) \times t\\
&\leqslant \|F_1 - F_2\|_{r-1,\infty}^2 \, T^2\\
&< \infty \ , \ \text{para } r \leqslant s.
\end{aligned}$$

Luego, $\|u_P(t) - \widetilde{u}_P(t)\|_r \leqslant \|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty} T$. Así

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u_P(t) - \widetilde{u}_p(t)\|_s \leqslant \|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty} T \tag{4.16}$$

y por tanto, de (4.16), obtenemos que $u \to \widetilde{u}$ en $H^s_{per}$, cuando $F_1 \to F_2$ en $H^{s-1}_{per}$. ■

**Proposición 12 (Unicidad de la solución).** *Sean* $t \in [0, T]$, $u = u_H(t) + u_P(t) \in H^s_{per}$ *y* $\widetilde{u} = \widetilde{u}_H(t) + \widetilde{u}_P(t) \in H^s_{per}$ *tales que*

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t) + F_1(t) \\ &u(0) = \varphi \in H^s_{per} \\ &\partial_t u(0) = \psi \in H^{s-1}_{per} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} &\partial_t^2 \widetilde{u} = \partial_x^2 \widetilde{u}(t) - \partial_x^4 \widetilde{u}(t) + F_2(t) \\ &\widetilde{u}(0) = \widetilde{\varphi} \in H^s_{per} \\ &\partial_t \widetilde{u}(0) = \widetilde{\psi} \in H^{s-1}_{per} \end{aligned}$$

*Es decir, satisfacen* ($Q_2$), entonces $u = \widetilde{u}$ en $H^s_{per}$. ■

*Demostración:* Solo nos bastará probar que $u_P = \widetilde{u}_P$ en $H^s_{per}$. En efecto, de (4.16) tenemos

$$\|u_P(t) - \widetilde{u}_P(t)\|_s \leqslant \sup_{t \in [0;T]} \|u_P(t) - \widetilde{u}_P(t)\|_s \leqslant \|F_1 - F_2\|_{s-1,\infty} T = 0$$

de donde concluimos que $u_P = \widetilde{u}_P$. ■

**Corolario 3.** *La única solución de (*$Q_2$) es

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \cos\left(\sigma(k)t\right) \widehat{\varphi}(k) + \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)t\right)}{\sigma(k)} \widehat{\psi}(k) \right) \Phi_k(x) \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t \frac{\operatorname{sen}\left(\sigma(k)\left(t - \tilde{t}\right)\right)}{\sigma(k)} \widehat{F}(k, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) \Phi_k(x). \end{aligned}$$

**5. Conclusiones.** En el estudio realizado de la ecuación de Boussinesq en espacios de Sobolev Periódico, tanto en el caso homogéneo ($Q_1$) como en el correspondiente problema no homogéneo ($Q_2$), se ha obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Usando la teoría de Fourier, se ha demostrado la existencia y unicidad de la solución del modelo ($Q_1$), así como la dependencia continua de la solución respecto a los datos iniciales.
2. En el análisis de diferenciabilidad de la solución versus los datos iniciales obtenemos resultados como el averiguar en que espacio $H^r_{per}$ existe $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u(t) - \partial_x^4 u(t)$ y que esto depende del espacio donde se considere los datos iniciales.
3. Usando la teoría de Fourier, se ha demostrado la existencia y unicidad de la solución del modelo no homogéneo ($Q_2$).
4. Además, se ha obtenido la dependencia continua de la solución del problema ($Q_2$) respecto a los datos iniciales y a la parte no homogénea del problema.

**6. Agradecimientos.** Estudio B19141891 VRIP–UNMSM.

## ORCID and License

Victor Papuico Bernardo https://orcid.org/0000-0002-8835-7922
Yolanda Santiago Ayala https://orcid.org/0000-0003-2516-0871



# Referencias

[1] Iorio R, Iorio V. *Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University, 2001.
[2] Santiago Y, Rojas S. *Existencia y dependencia continua de la solución de la ecuación de onda no homogénea en espacios de Sobolev Periódico*. Selecciones Matemáticas. 2020; 07(01):52-73.
[3] Santiago Y, Rojas S. *Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico*. Selecciones Matemática. 2019; 06(01):49-65.
[4] Santiago Y, Rojas S. *Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit*. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.