Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(2): 276-288.

Caracterización de Proyectivos Relativos e Inyectivos Relativos

Characterization of relative projectives and relative injectives

Felipe Clímaco Ccolque T.

Received, Set. 14, 2020 *Accepted, Nov. 28, 2020*

How to cite this article:
Ccolque T FC. *Caracterización de Proyectivos Relativos e Inyectivos Relativos*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(2):276–288. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.10

Resumen
En este artículo se caracterizan proyectivos relativos e inyectivos relativos a partir de un morfismo de anillos unitarios.

Palabras clave. Clase proyectiva, clase inyectiva, funtor de cambio de anillos, proyectivo relativo e inyectivo relativo.

Abstract
In this article, relative projective and relative injective are characterized based on a homomorphis of unit rings.

Keywords . Projective class, injective class, ring change functor, relative projective and relative injective.

1. Introducción. Dado un morfismo de anillos unitarios $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$. Un $\mathcal{S}-$ módulo es proyectivo relativo si y sólo si es retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} C$; un $\mathcal{S}-$ módulo es inyectivo relativo si y sólo si es retracto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, C)$. En el apéndice A del artículo [1] se da un método para construir una resolución proyectiva relativa de un $S-$módulo N imponiendo condiciones adecuadas en Corolario A.2.

Para ello, se consideró un diagrama en la categoría de $S-$módulos izquierdos

(1.1)
$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "\partial_2"'] & & & \\
Y_1 \arrow[d, "\partial_1"'] & X_{01} \arrow[l, "\mu_1"'] & X_{11} \arrow[l, "d^0_{11}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{21}"'] \\
Y_0 & X_{00} \arrow[l, "\mu_0"'] & X_{10} \arrow[l, "d^0_{10}"'] & \cdots \arrow[l, "d^0_{20}"']
\end{tikzcd},$$

tal que:

$a)$ La columna y las filas son complejos de cadenas.
$b)$ Para cada $r, s \geq 0$ se tiene un $R-$módulo $\overline{X}_{rs}$, aplicaciones de $S-$módulos $s_{rs} : X_{rs} \to S \otimes \overline{X}_{rs}$ y $\pi_{rs} : S \otimes \overline{X}_{rs} \to X_{rs}$ verificando $\pi_{rs} s_{rs} = id$.
$c)$ Cada fila es contráctil como un complejo de $R-$módulos.

Se dan las motivaciones para la investigación en el intento de corroborar la prueba de [1, Cap.2] y el de mejorar el método para obtener una resolución proyectiva relativa del apéndice A de [1]. El problema fue verificar que el $S-$módulo $X_n := \bigoplus_{r+s=n} X_{rs}$ es proyectivo relativo, el cual apareció al detallar la prueba de [1, Cap.2]. Para ello se plantea la siguiente :

*Facultad de Ciencias, UNI-IMCA, Calle los Biólogos, Urb San Cesar, La Molina, Lima 12-Perú (ccolque@imca.edu.pe).

Hipótesis. *Dado $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ un morfismo de anillos unitarios. Todo $\mathcal{S}$-módulo A es un retracto de algún $\mathcal{S}$-módulo $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$.*

Interrogantes: ¿Es posible eliminar la condición $b)$ impuesta sobre el diagrama (1.1), de modo que aún sea válida [1, Cap.2]?, entonces ¿ la restricción dada por dicha condición fue una estrategia para simplificar la construcción de una resolución proyectiva relativa de un $\mathcal{S}-$módulo N?.
El propósito de este artículo es estudiar $\mathcal{S}-$módulos proyectivos relativos, también $\mathcal{S}-$módulos inyectivos relativos a partir de un morfismo de anillos unitarios $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ para caracterizarlos.
Para obtener la caracterización de proyectivos relativos e inyectivos relativos se establecen como los resultados principales Proposición 5, Proposición 9, Ejemplo 4, Lema 1 y los dos teoremas de funtores adjuntos. La presentación de este trabajo se hace en cinco secciones:

En la segunda sección se introduce nociones de funtores adjuntos y funtor de cambio de anillos. Estos funtores van a ser herramientas para transferir clases proyectivas de epimorfismos y clases inyectivas de monomorfismos en las secciones restantes.

En la tercera sección, se establece el primer teorema de funtores adjuntos, luego se da un ejemplo de clase proyectiva de epimorfismos como consecuencia de dicho resultado.

En la cuarta sección, se enuncia y se demuestra el segundo teorema de funtores adjuntos, luego se da un ejemplo de clase inyectiva de monomorfismos como consecuencia de dicho resultado.

En la quinta sección, se aplican los dos teoremas de funtores adjuntos a la caracterización proyectivos relativos e inyectivos relativos, respectivamente. Se dan ejemplos de proyectivos relativos, inyectivos relativos, clases proyectivas de epimorfismos, clases inyectivas de monomorfismos, un proyectivo relativo que no es proyectivo absoluto. Además, se demuestra la hipótesis planteada si el $\mathcal{S}-$módulo $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$ es semisimple.
En la sexta sección, se presentan las conclusiones y recomendaciones. Se sugiere que la forma especial de proyectivos relativos podría ser aprovechada para construir un grupo de Grothendieck.

2. Funtores Adjuntos. En esta sección, se demuestra que el funtor de cambio de anillos tiene adjunto izquierdo y adjunto derecho.

Definición 1. *[2, página 64] Sean $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ funtores tales que existe una equivalencia natural $\eta = \eta_{XY} : \mathfrak{D}(FX, Y) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{C}(X, GY)$ de funtores de $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$. Entonces decimos que F es adjunto izquierdo de G o G es adjunto derecho de F, y escribimos $\eta : F \dashv G$. Se llama η adjunción.*

Ejemplo 1. *Sea A un $\mathbb{R}$ – módulo derecho, B un $\mathbb{R}$ – módulo izquierdo y H un grupo abeliano. Consideremos los funtores*

$$F = - \otimes_{\mathbb{R}} B : \mathfrak{M}^r_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{Ab} \,,$$
$$G = Hom(B, -) : \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{M}^r_{\mathbb{R}} \,,$$

donde $\mathfrak{M}^r_{\mathbb{R}}$ es la categoría de $\mathbb{R}$ – módulos derechos y $\mathfrak{Ab}$ es la categoría de grupos abelianos.
Por [2, Teorema III.7.2] se sabe que $Hom(A \otimes_{\mathbb{R}} B, H) \cong Hom_{\mathbb{R}}(A, Hom(B, H))$.
Esto se verifica, tomando las biyecciones $f \mapsto f'$ tal que $f'(a)(b) = f(a \otimes b)$; $g' \leftarrow g$ tal que $g'(a \otimes b) = g(a)(b)$. Por consiguiente, concluimos que $F \dashv G$.

Observación 1. *La ecuación siguiente expresa la naturalidad de $\eta : F \dashv G$*

$$\eta(\beta \circ \varphi \circ F(\alpha)) = G(\beta) \circ \eta(\varphi) \circ \alpha \,, \tag{2.1}$$

para todo $\alpha : X' \to X$, $\varphi : FX \to Y$, $\beta : Y \to Y'$ [2, (II.7.1)] . Tomando $Y = FX$, $\varphi = 1_{FX}$, se define $\varepsilon_X := \eta(1_{FX}) : X \to GFX$. Llamaremos a ε unidad de la adjunción η. Similarmente, para $X = GY$, se define $\delta_Y := \eta^{-1}(1_{GY}) : FGY \to Y$. Llamaremos a δ counidad de la adjunción η.
Se nota que (2.1) implica que η está determinado por ε, y que η^{-1} está determinado por δ, mediante las reglas

$$\eta(\varphi) = G(\varphi) \circ \varepsilon_X \qquad \text{para } \varphi : FX \to Y \,, \tag{2.2}$$
$$\xi(\psi) = \eta^{-1}(\psi) = \delta_Y F(\psi) \qquad \text{para } \psi : X \to GY \,. \tag{2.3}$$

Dado $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ un morfismo de anillos unitarios. El funtor de la proposición siguiente se llama funtor de cambio de anillos.

Proposición 1. *Entonces existe $F = F_\varphi : \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ funtor covariante.*

Demostración: Sea M un $\mathcal{S}-$módulo; luego, $(M, +)$ es un grupo abeliano. Se define el producto por un escalar $\mathbb{R} \times M \to M$ por $r \cdot m = \varphi(r) \cdot m$ para $r \in \mathbb{R}$, $m \in M$; de modo que M es un $\mathbb{R}-$módulo. Este módulo se denota por FM. Sea $f : M \to N$ morfismo en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$, entonces $f : M \to N$ es morfismo en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$. Este morfismo se denota por Ff. Luego, $F : \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ es un funtor covariante, pues para F se cumplen las dos condiciones siguientes:

(1) Sean $f : M_1 \to M_2,\ g : M_2 \to M_3$ morfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$. Entonces $f : M_1 \to M_2$ y $g : M_2 \to M_3$ son morfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$. Así, se obtiene que $Ff : FM_1 \to FM_2$ y $Fg : FM_2 \to FM_3$ son morfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$. Luego, $(Fg)(Ff) = gf = F(gf)$.

(2) Sea $M \in |\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}|$, entonces $F(id_M) = id_{FM}$. En efecto, $id_M : M \to M$ es morfismo en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ tal que $id_M(m) = m,\ \forall m \in M$. Luego, $F(id_M) : FM \to FM$ es morfismo en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$. Así, $F(id_M) = id_M = id_{FM}$ $\square$

Sean M un $\mathbb{R}-$módulo, $GM = \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} M$ y $Gf = \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} f$.

Proposición 2. *Existe $G = G_\varphi : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ funtor covariante.*

Sean M un $\mathbb{R}-$módulo, $HM = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, M)$ y $H\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \alpha)$.

Proposición 3. *Existe $H = H_\varphi : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ funtor covariante.*

Proposición 4. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ morfismo de anillos unitarios.*

1) *Si $M \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ y $N \in |\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}|$, entonces existe $\eta_1 : Hom_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \otimes M, N) \to Hom_{\mathbb{R}}(M, N)$ isomorfismo de grupos abelianos.*

2) *Si $N \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ y $M \in |\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}|$, entonces existe $\eta_3 : Hom_{\mathbb{R}}(M, N) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{S}}\big(M, Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N)\big)$.* $\square$

La aplicación η_1 definida por $\eta_1(g)(m) = g(1 \otimes m)$ es un isomorfismo con inversa dada por $\eta_2(h)(s \otimes m) = sh(m)$; mientras que la aplicación η_3 definida por $\eta_3(g)(m)(s) = g(sm)$ es un isomorfismo con inversa dada por $\eta_4(h)(m) = h(m)(1)$.

Proposición 5. *Sean F, G y H funtores covariantes de las proposiciones 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces:*

1. *G es adjunto izquierdo de F; i.e., $G \longrightarrow\!\!\!\dashv F$,*
2. *H es adjunto derecho de F; i.e., $F \longrightarrow\!\!\!\dashv H$.*

Demostración:

1. Se define $\eta : \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(G\cdot, \cdot) \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(\cdot, F\cdot) : \big(\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}\big)^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}} \to \mathfrak{S}$ sobre un objeto $(M, N) \in |(\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}})^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}|$, como el morfismo

$$\eta_{MN} :\ \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(\underset{\mathcal{S}\otimes M}{\underset{\|}{GM}}, N) \longrightarrow \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M, \underset{N}{\underset{\|}{FN}}), \ \text{ en } \mathfrak{S}, \text{ dado por:}$$

$$\eta_{MN}(g)(m) = g(1 \otimes m), \tag{2.4}$$

y sobre un morfismo $(\alpha^{op}, \beta) : (M_1, N_1) \to (M_2, N_2)$ en $(\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}})^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$, se tiene el diagrama conmutativo en $\mathfrak{S}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \otimes M_1, N_1) \arrow[r, "\eta_1 = \eta_{M_1N_1}"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M_1, N_1) \arrow[d, "\rho_2"] \\
\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \otimes M_2, N_2) \arrow[r, "\eta_2 = \eta_{M_2N_2}"'] & \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M_2, N_2).
\end{tikzcd}$$

En efecto, con los diagramas conmutativos

$$\rho_1(\varphi) :\ \begin{tikzcd}
\mathcal{S} \otimes M_2 \arrow[r] \arrow[d, "id\otimes\alpha"'] & N_2 \\
\mathcal{S} \otimes M_1 \arrow[r, "\varphi"] & N_1 \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd} \qquad \rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) :\ \begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & N_2 \\
M_1 \arrow[r, "\eta_1(\varphi)"] & N_1, \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

se obtiene:

$$\rho_1(\varphi) = \beta\varphi(id \otimes \alpha) \quad \& \quad \rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) = \beta\eta_1(\varphi)\alpha. \tag{2.5}$$

Por otro lado $\eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big) : M_2 \to N_2$ es dado por:

$$\eta_2\rho_1(\varphi)(m_2) = \rho_1(\varphi)(1 \otimes m_2) = \beta\varphi(id \otimes \alpha)(1 \otimes m_2) = \beta\varphi(1 \otimes \alpha m_2).$$

Pero $\beta\eta_1(\varphi)\alpha(m_2) = \beta[\eta_1(\varphi)(\alpha m_2)] = \beta\varphi(1 \otimes \alpha m_2)$. Luego $\beta\eta_1(\varphi)\alpha = \eta_2\rho_1(\varphi)$. Por (2.5), $\rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) = \eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big)$. Además, por la parte 1) de Proposición 4, η_{MN} definido en (2.4) es una biyección. Por lo tanto, G es adjunto izquierdo de F.

2. Se define $\eta' : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(F\cdot,\cdot) \to \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(\cdot, H\cdot) : (\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}})^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{S}$ sobre un objeto $(M,N) \in |(\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}})^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ como el morfismo

$$\eta'_{MN} : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(\underset{\substack{\| \\ M}}{FM}, N) \longrightarrow \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(M, \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S},N)}}{HN}), \quad \text{en } \mathfrak{S}\text{, dado por:}$$

$$\eta'_{MN}(g)(m)(s) = g(sm), \tag{2.6}$$

y sobre un morfismo $(\alpha^{op}, \beta) : (M_1, N_1) \to (M_2, N_2)$ en $(\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}})^{op} \times \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ se tiene el diagrama conmutativo en $\mathfrak{S}$

$$\begin{tikzcd}
\varphi \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M_1, N_1) \arrow[r, "\eta_1 = \eta'_{M_1N_1}"] \arrow[d, "\rho_1"'] & \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}\big(M_1, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N_1)\big) \arrow[d, "\rho_2"] \\
\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M_2, N_2) \arrow[r, "\eta_2 = \eta'_{M_2N_2}"'] & \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}\big(M_2, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N_2)\big)
\end{tikzcd}$$

En efecto, con los diagramas conmutativos

$$\rho_1(\varphi) : \begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & N_2 \\
M_1 \arrow[r, "\varphi"'] & N_1 \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd} \qquad \rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) : \begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N_2) \\
M_1 \arrow[r, "\eta_1(\varphi)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N_1), \arrow[u, "\beta_*"']
\end{tikzcd} \quad \text{se obtiene:}$$

$$\rho_1(\varphi) = \beta\varphi\alpha \quad \& \quad \rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) = \beta_*\eta_1(\varphi)\alpha. \tag{2.7}$$

Por otro lado, $\eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big) : M_2 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, N_2)$ es dado por:

$$\eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big)(m_2)(s) = \rho_1(\varphi)(sm_2) = \beta\varphi\alpha(sm_2).$$

Pero $\beta_*\eta_1(\varphi)\alpha(m_2)(s) = \beta_*\varphi\big(s\alpha(m_2)\big) = \beta\varphi\alpha(sm_2)$; de modo que $\beta_*\eta_1(\varphi)\alpha = \eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big)$. De (2.7) se obtiene, $\rho_2\big(\eta_1(\varphi)\big) = \eta_2\big(\rho_1(\varphi)\big)$.

Por otro lado, por la parte 2) de Proposición 4, el η'_{MN} definido en (2.6) es una biyección. Por lo tanto, H es adjunto derecho de F □

3. Clase Proyectiva. Un morfismo $f : M \to N$ en una categoría $\mathfrak{C}$ es *epic* (o epimorfismo) si para todos los morfismos $N \overset{h}{\underset{g}{\rightrightarrows}} W$ en $\mathfrak{C}$ tales que $gf = hf$ se tiene que $g = h$.

Un objeto P de $\mathfrak{C}$ es proyectivo si para cada epimorfismo $\varepsilon : M \to N$ en $\mathfrak{C}$, la aplicación inducida $\varepsilon_* = \mathfrak{C}(P, \varepsilon) : \mathfrak{C}(P, M) \to \mathfrak{C}(P, N)$ es suryectiva, es decir, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] \\
M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] & N
\end{tikzcd}$$

Sean $\mathfrak{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{E}$ una clase de epimorfismos en $\mathfrak{A}$.

Definición 2. *Sea $\varepsilon : B \to C$ un epimorfismo de $\mathfrak{A}$. Un objeto P de $\mathfrak{A}$ se llama proyectivo relativo a ε si $\varepsilon_* = \mathfrak{A}(P, \varepsilon) : \mathfrak{A}(P, B) \to \mathfrak{A}(P, C)$ es suryectiva . Es decir, dado $f \in \mathfrak{A}(P, C)$, $\exists g \in \mathfrak{A}(P, B)$ tal que $\varepsilon_*(g) = f$. P es llamado $\mathscr{E}-$proyectivo si es proyectivo relativo a ε, para todo $\varepsilon \in \mathscr{E}$.*

Proposición 6. *$P_1 \oplus P_2$ es $\mathscr{E}-$proyectivo si y sólo si P_1 y P_2 son $\mathscr{E}-$proyectivos.*

Demostración: Sea $\varepsilon \in \mathscr{E}$ (arbitrario) y $B \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} C$ *epic* en $\mathfrak{A}$. $\Rightarrow$) Dado $\phi_1 : P_1 \to C$. Tomando $\phi = \langle \phi_1, 0 \rangle : P_1 \oplus P_2 \to C$, como $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo relativo a ε, $\exists \psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle : P_1 \oplus P_2 \to B$ tal que $\varepsilon\psi = \phi$. Luego, $\varepsilon\psi_1 = \phi_1$ y así P_1 es proyectivo relativo a ε. Similarmente, de $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo relativo a ε se sigue que P_2 es proyectivo relativo a ε.

$\Leftarrow$) Si P_1 y P_2 son proyectivos relativos a ε, entonces $P_1 \oplus P_2$ es proyectivo relativo a ε. En efecto, dado $\phi = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle : P_1 \oplus P_2 \to C$ se tiene $\phi_1 : P_1 \to C$ y $\phi_2 : P_2 \to C$ morfismos en $\mathfrak{A}$. Puesto que P_1 y P_2

son proyectivos relativos a ε, existen $\psi_1 : P_1 \to B$ y $\psi_2 : P_2 \to B$ tales que $\varepsilon\psi_i = \phi_i$ para $i = 1, 2$. Así, existe $\psi = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle : P_1 \oplus P_2 \to B$ tal que $\varepsilon\psi = \phi$ □

Definición 3. *La clausura, $C(\mathscr{E})$, de $\mathscr{E}$, consiste de los epimorfismos ε en $\mathfrak{A}$ tal que cada objeto $\mathscr{E}-$proyectivo de $\mathfrak{A}$ es también proyectivo relativo a ε. La clase $\mathscr{E}$ es cerrada si $\mathscr{E} = C(\mathscr{E})$.*

Proposición 7. [2, P IX.1.2] *Una clase cerrada de epimorfismos contiene cada proyección $\pi : A \oplus B \twoheadrightarrow A$.*

Demostración: Sea $\mathscr{E}$ una clase cerrada de epimorfismos en $\mathfrak{A}$, entonces $\pi \in \mathscr{E}$. En primer lugar, se observa que π es *epic* en $\mathfrak{A}$. Dado $C \in |\mathfrak{A}|$ y $f : C \to A$ morfismo en $\mathfrak{A}$. Por propiedad universal del producto [3, Definición 1.4.1] y el hecho que $A \times B \cong A \oplus B$, existe morfismo $g : C \to A \oplus B$ tal que $f = \pi g$. Así, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] \\ A \oplus B \arrow[r, two heads, "\pi"] & A \end{tikzcd}$$

Luego, cualquier objeto C de $\mathfrak{A}$ es proyectivo relativo a π.
Afirmación: $\pi \in C(\mathscr{E})$. Sea P un $\mathscr{E}-$proyectivo, entonces P es proyectivo relativo a π. En efecto, tomando $C = P$ resulta que P es proyectivo relativo a π. Así, $\pi \in C(\mathscr{E})$. Como $\mathscr{E}$ es clase cerrada, $C(\mathscr{E}) = \mathscr{E}$. Por lo tanto, $\pi \in \mathscr{E}$ □

Un epimorfismo $\varepsilon : A \twoheadrightarrow B$ de $\mathbb{R}$-módulos se descompone si existe un morfismo $\nu : B \longrightarrow A$ de $\mathbb{R}-$módulos tal que $\varepsilon\nu = 1_B$,

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dashed, "\exists \nu"'] \arrow[d, "1_B"] \\ A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & B \end{tikzcd}$$

Proposición 8. *Sea $\mathbb{R}$ un anillo unitario. La clase $\mathscr{E}$ de epimorfismos de $\mathbb{R}-$módulos izquierdos que se descomponen es cerrada.*

Demostración: Sean $\varepsilon \in \mathscr{E}$ (arbitrario), $M \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ y $\alpha \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(M, C)$. Puesto que $\varepsilon : B \to C$, se descompone como morfismo de $\mathbb{R}-$módulos, existe $\nu \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(C, B)$ tal que $\varepsilon\nu = id_C$. Luego se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\exists \beta = \nu\alpha"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon"] & C \arrow[l, shift left, "\nu"] \end{tikzcd}$$

Así, cualquier $R-$módulo izquierdo M es proyectivo relativo a ε; i.e., M es $\mathscr{E}-$proyectivo.
Afirmación: $C(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{E}$. En efecto, sea $\zeta \in C(\mathscr{E})$, como cada $\mathbb{R}-$módulo izquierdo es $\mathscr{E}-$proyectivo, C es $\mathscr{E}-$proyectivo. Por definición de clausura, C es proyectivo relativo a ζ.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "\exists \tau"'] \arrow[d, "id_C"] \\ B \arrow[r, two heads, "\zeta"] & C \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\exists \tau \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(C, B)$ tal que $\zeta\tau = id_C$. Así, $\zeta \in \mathscr{E}$. Luego, $\mathscr{E}$ es cerrada □

Definición 4. *Una clase cerrada $\mathscr{E}$ de epimorfismos de $\mathfrak{A}$ es proyectiva si para cada objeto A de $\mathfrak{A}$ existe un epic $\varepsilon : P \to A$ en $\mathscr{E}$, donde P es $\mathscr{E}-$proyectivo.*

Ejemplo 2. *La clase $\mathscr{E}$ de epimorfismos de $\mathbb{R}-$módulos izquierdos que se descomponen es proyectiva.*
Demostración: Según Proposición 8, la clase $\mathscr{E}$ es cerrada. Dado $A \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$, existe $\varepsilon : P \twoheadrightarrow A$, donde P es $\mathscr{E}-$proyectivo.
En efecto, Proposición 7 garantiza que $\varepsilon = \pi : A \oplus B \twoheadrightarrow A$ está en $\mathscr{E}$ para cualquier $\mathbb{R}-$módulo B. Como cada $\mathbb{R}-$módulo es $\mathscr{E}-$proyectivo; en particular, $P = A \oplus B$ es $\mathscr{E}-$proyectivo. Por lo tanto, $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva □

En este trabajo, se agrega una condición al funtor fiel $U : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ de [2, Theorem IX.4.1], la cual es que U preserva epimorfismos para establecer dicho resultado.

Teorema 1. *Sea $\mathscr{E}$ una clase proyectiva en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Sea $\mathfrak{A}'$ una categoría abeliana. Sean $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ y $U : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ funtores tales que $F \dashv U$. Asuma que U es fiel & preserva epic. Entonces:*

i) $\mathscr{E}' = U^{-1}\mathscr{E}$ *es una clase proyectiva de epimorfismos de* $\mathfrak{A}'$*;*

ii) *Si* P *es* $\mathscr{E}$*-proyectivo en* $\mathfrak{A}$*, entonces* FP *es* $\mathscr{E}'$*-proyectivo en* $\mathfrak{A}'$*;*

iii) *Los* $\mathscr{E}'$*-proyectivos son sumandos directos de* FP*, donde* P *es un* $\mathscr{E}$*-proyectivo.*

Demostración: Se puede encontrar en [2, Theorem IX.4.1] y [4, Teorema 3.10.2] □

Sea $\mathbb{Z}$ un anillo de enteros. Por definición de clausura de una clase de epimorfismos tenemos:

Ejemplo 3. *La clase* $\mathscr{E}_1$ *de todos los epimorfismos en* $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}$ *es cerrada.*

Proposición 9. *La clase* $\mathscr{E}_1$ *de todos los epimorfismos de* $\mathbb{Z}-$*módulos izquierdos es proyectiva.*

Demostración: Según el ejemplo anterior, la clase $\mathscr{E}_1$ es cerrada. Dado $A \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}|$, existe $\varepsilon : P \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A$ en $\mathscr{E}_1$, donde P es $\mathscr{E}_1-$proyectivo.
En efecto, tomando en [2, Proposition I.4.3] $\Lambda = \mathbb{Z}$, para el $\mathbb{Z}$-módulo A existe un $\mathbb{Z}$-módulo libre P tal que $P/Ker(\varepsilon) \cong A$ para algún morfismo ε de $\mathbb{Z}$-módulos. Es decir, existe un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo P tal que $\varepsilon : P \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow A$ es un epimorfismo. Por lo tanto, $\mathscr{E}_1$ es una clase proyectiva □

Corolario 1. *La clase* $\mathscr{E}'_1$ *de todos los epimorfismos de* $\Lambda-$*módulos izquierdos es proyectiva.*

Demostración: Sea $\varphi : \mathbb{Z} \to \Lambda$ tal que $\varphi(1) = 1_\Lambda$ morfismo de anillos unitarios, entonces se obtiene el funtor de cambio de anillos $F = F_\varphi : \mathfrak{m}^l_\Lambda \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}$. Tomando $U = F$ en Teorema 1 se concluye que $\mathscr{E}'_1 = F^{-1}(\mathscr{E}_1)$ es una clase proyectiva □

La demostración de este corolario da nueva demostración de [3, Teorema 2.4.4].

4. Clase Inyectiva. Esta sección está destinada a la formulación y formalización del dual de [2, Theorem IX.4.1]. Un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathfrak{C}$ es *monic* (o monomorfismo) si para todos los morfismos $W \underset{g}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A$ en $\mathfrak{C}$ tales que $fg = fh$ se tiene $g = h$.
Sea $\mathscr{M}$ una clase de monomorfismos en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Sea $\mu : A \to B$ un monomorfismo de $\mathfrak{A}$. Un objeto I de $\mathfrak{A}$ se llama inyectivo relativo a μ si conmuta el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "\mu"] & B \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

I es llamado $\mathscr{M}-$inyectivo si es inyectivo relativo a μ, para todo $\mu \in \mathscr{M}$.

La clausura, $C(\mathscr{M})$, de $\mathscr{M}$, consiste de los monomorfismos μ en $\mathfrak{A}$ tal que cada objeto $\mathscr{M}-$inyectivo de $\mathfrak{A}$ es también inyectivo relativo a μ. La clase $\mathscr{M}$ es cerrada si $\mathscr{M} = C(\mathscr{M})$.

Proposición 10. *Una clase cerrada de monomorfismos contiene cada inyección*
$i_A : A \rightarrowtail A \oplus B$.

Demostración: Sea $\mathscr{M}$ clase cerrada de monomorfismos en $\mathfrak{A}$, entonces $i_A \in \mathscr{M}$.
En efecto, se observa que i_A es monic en $\mathfrak{A}$. Dado $C \in |\mathfrak{A}|$ y $f : A \to C$ morfismo en $\mathfrak{A}$. Por propiedad universal de suma directa $A \oplus B$ [3, Definición 1.4.6], existe morfismo $g : A \oplus B \to C$ tal que $f = g \circ i_A$. Así, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, "i_A"] & A \oplus B \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

Luego, cualquier objeto C de $\mathfrak{A}$ es inyectivo relativo a i_A.
Afirmación: $i_A \in C(\mathscr{M})$. Sea I un $\mathscr{M}-$inyectivo, entonces I es inyectivo relativo a i_A. De hecho, tomando $C = I$ resulta que I es inyectivo relativo a i_A. Así, $i_A \in C(\mathscr{M})$.
Como $\mathscr{M}$ es cerrada, $C(\mathscr{M}) = \mathscr{M}$, luego $i_A \in \mathscr{M}$ □

Un monomorfismo $\mu : A \rightarrowtail B$ de $\mathbb{R}$-módulos se descompone si existe un morfismo
$\nu : B \longrightarrow A$ de $\mathbb{R}$-módulos tal que $\nu\mu = 1_A$,

$$\begin{tikzcd} A & \\ A \arrow[u, "1_A"] \arrow[r, tail, "\mu"] & B \arrow[ul, dashed, "\exists \nu"'] \end{tikzcd}$$

Proposición 11. *La clase* $\mathscr{M}$ *de monomorfismos de* $\mathbb{R}-$*módulos izquierdos que se descomponen es cerrada.*

Demostración: Sean $\mu : A \rightarrowtail B$ en $\mathscr{M}$, $M \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ y $\alpha \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(A, M)$. Puesto que μ se descompone como morfismo de $\mathbb{R}-$módulos, existe $\nu : B \to A$ tal que $\nu\mu = id_A$. Luego, se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M & \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, shift left, "\mu"] & B \arrow[ul, dashed, "\exists\beta=\alpha\nu"'] \arrow[l, shift left, "\nu"] \end{tikzcd}$$

Así, cualquier $\mathbb{R}-$módulo izquierdo M es inyectivo relativo a μ; i.e., M es $\mathscr{M}-$inyectivo.
Afirmación: $C(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{M}$. Sea $\xi \in C(\mathscr{M})$. Como cada $\mathbb{R}-$módulo izquierdo es $\mathscr{M}-$inyectivo, A es $\mathscr{M}-$inyectivo. Por definición de clausura, A es inyectivo relativo a ξ .

$$\begin{tikzcd} A & \\ A \arrow[u, "id_A"] \arrow[r, tail, "\xi"] & B \arrow[ul, dashed, "\exists\tau"'] \end{tikzcd}$$

Así, existe $\tau \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(B, A)$ tal que $id_A = \tau\xi$. Es decir, $\xi \in \mathscr{M}$. Por lo tanto, $\mathscr{M}$ es cerrada $\square$

Definición 5. *Una clase cerrada $\mathscr{M}$ de monomorfismos de $\mathfrak{A}$ es inyectiva si para cada objeto A de $\mathfrak{A}$ existe un monic $\mu : A \rightarrowtail I$ en $\mathscr{M}$, donde I es $\mathscr{M}-$inyectivo.*

Ejemplo 4. *La clase $\mathscr{M}$ de monomorfismos de $\mathbb{R}-$módulos izquierdos que se descomponen.*

Demostración: Según proposición 11, la clase $\mathscr{M}$ es cerrada.
Dado $A \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$, existe $\mu_0 : A \rightarrowtail I$ en $\mathscr{M}$, donde I es $\mathscr{M}-$inyectivo.

En efecto, Proposición 10 garantiza que $\mu_0 = i_A : A \rightarrowtail A \oplus B$ está en $\mathscr{M}$ para cualquier $\mathbb{R}-$módulo B. Como cada $\mathbb{R}-$módulo es $\mathscr{M}-$inyectivo; en particular, $I = A \oplus B$ es $\mathscr{M}-$inyectivo. Por lo tanto, $\mathscr{M}$ es una clase inyectiva $\square$

Proposición 12. *Los monomorfismos son reflejados mediante un funtor fiel.*

Demostración: Sea $U : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ un funtor fiel. Sea $\mu' : X \to Y$ un morfismo en $\mathfrak{A}'$ tal que $U\mu' : UX \to UY$ es un monomorfismo, entonces debemos demostrar que μ' es un monomorfismo.
Sean g, $h : Z \to X$ morfismos en $\mathfrak{A}'$ tales que $\mu' \circ g = \mu' \circ h$. Entonces vamos a deducir que $g = h$.
Aplicando el funtor U a la igualdad de composiciones, $U\mu' \circ Ug = U\mu' \circ Uh$. Puesto que $U\mu'$ es monomorfismo, $Ug = Uh$. Pero U es funtor fiel, luego $g = h$. Así, μ' es un monomorfismo $\square$

Teorema 2. *Sea $\mathscr{M}$ una clase inyectiva en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$. Sea $\mathfrak{A}'$ una categoría abeliana. Sean $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ y $U : \mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$ funtores tales que $U \dashv F$. Asuma que U es fiel & preserva monic. Entonces :*

$i)$ *$\mathscr{M}' = U^{-1}\mathscr{M}$ es una clase inyectiva de monomorfismos de $\mathfrak{A}'$;*
$ii)$ *Si I es $\mathscr{M}$-inyectivo en $\mathfrak{A}$, entonces FI es $\mathscr{M}'$-inyectivo en $\mathfrak{A}'$;*
$iii)$ *Los $\mathscr{M}'$-inyectivos son sumandos directos de FI, donde I es un $\mathscr{M}$-inyectivo.*

Demostración: Por proposición 12, vemos que $\mathscr{M}' = \{\mu' \text{ monic en } \mathfrak{A}' \,|\, U\mu' \in \mathscr{M}\}$.
$ii)$ Sea I un $\mathscr{M}$-inyectivo.Consideremos el diagrama siguiente en $\mathfrak{A}'$

$$\begin{tikzcd} FI & \\ B_1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, tail, "\mu' \text{ en } \mathscr{M}'"'] & B_2 \arrow[ul, dashed, "\exists\psi"'] \end{tikzcd}$$

Aplicando la adjunción $\eta : U \dashv F$, obtenemos en $\mathfrak{A}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} I & \\ UB_1 \arrow[u, "\eta^{-1}(\varphi)"] \arrow[r, tail, "\mu' \text{ en } \mathscr{M}'"'] & UB_2 \arrow[ul, dashed, "\exists\psi'"'] \end{tikzcd}$$

Por hipótesis I es $\mathscr{M}$-inyectivo, luego existe $\psi' : UB_2 \to I$ tal que $\eta^{-1}(\varphi) = \psi' \circ U\mu'$.
Considerando (2.1) y aplicando η a la ecuación anterior obtenemos que $\varphi = \psi \circ \mu'$, donde $\psi = \eta(\psi')$. Por lo tanto, FI es $\mathscr{M}'$-inyectivo.
$i)(1)$ Por definición $\mathscr{M}'$ es una clase de monomorfismos de $\mathfrak{A}'$. Ahora, probemos que $\mathscr{M}'$ es cerrada. Si $\beta' \in C(\mathscr{M}')$, entonces $\beta' \in \mathscr{M}'$. En efecto, suponiendo que $\beta' : B_1 \rightarrowtail B_2$ está en $\mathfrak{A}'$ & I' es un

$\mathscr{M}'$-inyectivo, por definición de clausura de monomorfismos, obtenemos que I' es inyectivo respecto a β'. Es decir, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} I' & \\ B_1 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, tail, "\beta' \text{ en } \mathfrak{A}'"'] & B_2 \arrow[ul, dashed, "\exists\psi"'] \end{tikzcd}$$

tal que $\varphi = \psi \circ \beta'$. En particular, podemos tomar $I' = FI$, donde I es $\mathscr{M}$-inyectivo. Luego aplicando η^{-1} al diagrama y la ecuación anteriores $\eta^{-1}(\varphi) = \eta^{-1}(\psi) \circ U\beta'$ y

$$\begin{tikzcd} I & \\ UB_1 \arrow[u, "\eta^{-1}(\varphi)"] \arrow[r, tail, "U\beta' \text{ en } \mathfrak{A}"'] & UB_2 \arrow[ul, dashed, "\exists\eta^{-1}(\psi)"'] \end{tikzcd}$$

donde $U\beta'$ es monic en $\mathfrak{A}$ pues U preserva monics.
Esto significa que $U\beta' \in C(\mathscr{M})$. Pero $\mathscr{M}$ es cerrada, luego $U\beta' \in \mathscr{M}$. Por lo tanto, $\beta' \in \mathscr{M}'$.
$i)(2)$ Dado $B' \in |\mathfrak{A}'|$ existe $\mu' : B' \rightarrowtail I'$ en $\mathscr{M}'$, donde I' es $\mathscr{M}'$-inyectivo.
Como $B' \in |\mathfrak{A}'|$, tenemos que $UB' \in |\mathfrak{A}|$. Ahora, por el hecho que $\mathscr{M}$ es una clase inyectiva en $\mathfrak{A}$, existe $\mu : UB' \rightarrowtail I$ en $\mathscr{M}$, donde I es $\mathscr{M}$-inyectivo. Recordando que $\eta : U \dashv F$, sabemos que $\eta = \eta_{B'I} : \mathfrak{A}(UB', I) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}'(B', FI)$. Así, para $\mu \in \mathfrak{A}(UB', I)$ existe un único $\mu' \in \mathfrak{A}'(B', FI)$ tal que $\eta(\mu) = \mu'$.
Por otro lado, tenemos la composición de morfismos

$$UB' \xrightarrow{U\mu'} UFI \xrightarrow{\delta_I} I\ , \tag{4.1}$$

donde δ es la counidad de la adjunción η.
Tomando $\psi = \mu'$, $X = B'$, $Y = I$ en (2.3), obtenemos que $\eta^{-1}(\mu') = \delta_I \circ U\mu'$.

$$\text{Así, } \mu = \delta_I \circ U\mu'. \tag{4.2}$$

Como μ es monic, se sigue inmediatamente que $U\mu'$ es monic.
Por la parte $ii)$, FI es $\mathscr{M}'$-inyectivo. Como $U\mu'$ es monic, por la proposición 12 μ' es monic. Falta demostrar que $\mu' : B' \rightarrowtail FI$ está en $\mathscr{M}'$.
Para ello, sea J un $\mathscr{M}$-inyectivo, entonces J es inyectivo respecto a $U\mu'$. Es decir, debemos obtener el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} J & \\ UB' \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, tail, "U\mu'"'] & UFI \arrow[ul, dashed, "\exists\widetilde{\psi}"'] \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

En efecto, por (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\begin{tikzcd} J & & I \arrow[ll, dashed, "\exists\psi_1"'] \\ UB' \arrow[u, "\psi"] \arrow[urr, tail, "\mu"] \arrow[rr, tail, "U\mu'"'] & & UFI \arrow[u, "\delta_I"'] \arrow[ull, dashed, "\exists\widetilde{\psi}"] \end{tikzcd}$$

Sea $\widetilde{\psi} = \psi_1 \circ \delta_I$. Entonces el diagrama (4.3) conmuta, pues

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ U\mu' &= (\psi_1 \circ \delta_I) \circ U\mu' \text{ por asociatividad se tiene} \\ &= \psi_1 \circ \mu = \psi \text{ por el diagrama anterior}. \end{aligned}$$

Esto significa que $U\mu' \in C(\mathscr{M})$. Pero $\mathscr{M}$ es cerrada, luego $U\mu' \in \mathscr{M}$. Por consiguiente $\mu' \in \mathscr{M}'$.
Tomando $I' = FI$, donde I es $\mathscr{M}$-inyectivo, queda probada la afirmación hecha en $i)(2)$.

$iii)$ Los $\mathscr{M}'$-inyectivos son sumandos directos de FI para algún $\mathscr{M}$-inyectivo I.
En efecto, sea C un $\mathscr{M}'$-inyectivo, luego $UC \in |\mathfrak{A}|$. Como $\mathscr{M}$ es una clase inyectiva en $\mathfrak{A}$, existe $\mu : UC \rightarrowtail I$ en $\mathscr{M}$, donde I es $\mathscr{M}$-inyectivo.

Haciendo $B' = C$ en la prueba de la parte $i)(2)$, sabemos que existe $\mu' : C \rightarrowtail FI$ en $\mathscr{M}'$, donde $FI = I'$. Luego, por el hecho que C es $\mathscr{M}'$-inyectivo, obtenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} C & \\ C \arrow[u, "1_C"] \arrow[r, tail, dashed, "\exists \mu'"] & FI \arrow[ul, dashed, "\exists \nu"'] \end{tikzcd}$$

Así $\nu \circ \mu' = 1_C$. Según [5] (B. Mitchell - Theory of Categories - Academic Press), toda categoría abeliana puede ser inmerso en una categoría de Λ-módulos con Λ conveniente. En vista de este resultado se puede realizar pruebas en categorías abelianas como se estuviera en categoría de módulos. Por lo tanto, conforme a [6, Proposición 3.2.2] obtenemos $FI = \mathrm{Ker}(\nu) \oplus \mathrm{Im}(\mu')$. Como $\mathrm{Im}(\mu') \cong C$, C es sumando directo de FI $\square$

Sea $\mathbb{Z}$ un anillo de enteros. Por definición de clausura de una clase de monomorfismos :

Ejemplo 5. *La clase $\mathscr{M}_1$ de todos los monomorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}$ es cerrada.*

Proposición 13. *La clase $\mathscr{M}_1$ de todos los monomorfismos de $\mathbb{Z}-$módulos izquierdos es inyectiva.*
Demostración: Según el ejemplo anterior, la clase $\mathscr{M}_1$ es cerrada.
Dado $A \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}|$, existe $\mu : A \rightarrowtail I$ en $\mathscr{M}_1$, donde I es $\mathscr{M}_1-$inyectivo.
En efecto, como un grupo abeliano es un $\mathbb{Z}-$módulo, por [2, Proposition I.7.4] el $\mathbb{Z}$-módulo A puede ser inmerso en un $\mathbb{Z}$-módulo divisible D. Puesto que $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, por [2, Theorem I.7.1] D es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. Es decir, existe un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo $I = D$ tal que $\mu : A \rightarrowtail I$ es un monomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Por lo tanto, $\mathscr{M}_1$ es una clase inyectiva $\square$

Corolario 2. *La clase $\mathscr{M}'_1$ de todos los monomorfismos de $\Lambda-$módulos izquierdos es inyectiva.*

Demostración: Sea $\varphi : \mathbb{Z} \to \Lambda$ tal que $\varphi(1) = 1_\Lambda$ morfismo de anillos unitarios, entonces se obtiene el funtor de cambio de anillos $F = F_\varphi : \mathfrak{m}^l_\Lambda \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{Z}}$. Tomando $U = F$ en Teorema 2 se concluye que $\mathscr{M}'_1 = F^{-1}(\mathscr{M}_1)$ es una clase inyectiva $\square$

La demostración de este corolario da nueva demostración de [3, Teorema 2.4.11].

5. Aplicación de los Teoremas de Funtores Adjuntos. Dado un morfismo de anillos unitarios. Se discute la caracterización de proyectivos relativos e inyectivos relativos utilizando clase proyectiva de epimorfismos, clase inyectiva de monomorfismos, teoremas de funtores adjuntos y el funtor de cambio de anillos.

Lema 1. *Sean $\mathfrak{D} \xrightarrow{G} \mathfrak{C} \xrightarrow{F} \mathfrak{D} \xrightarrow{H} \mathfrak{C}$ funtores covariantes; $\eta : G \longrightarrow\!\!\!\!\dashv F$ y $\eta' : F \longrightarrow\!\!\!\!\dashv H$ adjunciones, entonces:*
1. *F preserva monic,*
2. *F preserva epic.*

Demostración:
1. Si $f : M_1 \to M_2$ es *monic* en $\mathfrak{C}$, entonces Ff es *monic* en $\mathfrak{D}$.

Dados $N \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} F(M_1)$ morfismos en $\mathfrak{D}$ tales que $(Ff)g = (Ff)h$, se va a deducir que $g = h$.

En efecto, por hipótesis $\eta : G \longrightarrow\!\!\!\!\dashv F$, esto significa que
$\eta : \mathfrak{C}(G\cdot, \cdot) \to \mathfrak{D}(\cdot, F\cdot) : \mathfrak{D}^{op} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{S}$ es equivalencia natural. Luego, para cada $(X, Y) \in |\mathfrak{D}^{op} \times \mathfrak{C}|$ se tiene $\eta_{XY} : \mathfrak{C}(GX, Y) \to \mathfrak{D}(X, FY)$ morfismo en $\mathfrak{S}$, y para cada morfismo $(\alpha^{op}, \beta) : (N_1, M_1) \to (N_2, M_2)$ en $\mathfrak{D}^{op} \times \mathfrak{C}$ se tiene el diagrama conmutativo con filas isomorfismos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(GN_1, M_1) \arrow[r, "\sim", "\eta_{N_1M_1}"'] \arrow[d, "\mathfrak{C}(G\alpha^{op}, \beta)"'] & \mathfrak{D}(N_1, FM_1) \arrow[d, "\mathfrak{D}(\alpha^{op}, F\beta)"] \\ \mathfrak{C}(GN_2, M_2) \arrow[r, "\sim", "\eta_{N_2M_2}"'] & \mathfrak{D}(N_2, FM_2). \end{tikzcd}$$

Tomando $N = N_1 = N_2$, $\alpha = id_N$ y $\beta = f$ se obtiene

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(GN, M_1) \arrow[r, "\sim", "\eta_1 = \eta_{NM_1}"'] \arrow[d, "\mathfrak{C}(id_{GN}, f) = f_*"'] & \mathfrak{D}(N, FM_1) \arrow[d, "\mathfrak{D}(id_N, Ff) = (Ff)_*"] \\ \mathfrak{C}(GN, M_2) \arrow[r, "\sim", "\eta_2 = \eta_{NM_2}"'] & \mathfrak{D}(N, FM_2). \end{tikzcd}$$

Por la conmutatividad de este diagrama, para cualquier $\psi \in \mathfrak{C}(GN, M_1)$ se tiene la igualdad $(Ff)_* \eta_1(\psi) = \eta_2 f_*(\psi)$. Luego

(5.1) $$\eta_2^{-1}(Ff)\eta_1(\psi) = f\psi.$$

Para $g \in \mathfrak{D}(N, FM_1)$, $\eta_1^{-1}(g) \in \mathfrak{C}(GN, M_1)$. Tomando $\psi = \eta_1^{-1}(g)$, por (5.1) se obtiene

(5.2) $$\eta_2^{-1}(Ff)g = f\eta_1^{-1}(g).$$

Como $g, h \in \mathfrak{D}(N, FM_1)$ son tales que $(Ff)g = (Ff)h$, aplicando η_2^{-1} se obtiene $\eta_2^{-1}(Ff)g = \eta_2^{-1}(Ff)h$. Por (5.2) $f\eta_1^{-1}(g) = f\eta_1^{-1}(h)$. Puesto que f es *monic*, $\eta_1^{-1}(g) = \eta_1^{-1}(h)$. Así, $g = h$, ya que η_1^{-1} es isomorfismo (monic).

2. Si $f : N_2 \to N_1$ es *epic* en $\mathfrak{C}$, entonces Ff es *epic* en $\mathfrak{D}$. Si $F(N_1) \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} N$ son morfismos en $\mathfrak{D}$ tales que $g(Ff) = h(Ff)$, entonces $g = h$. En efecto, por hipótesis, $\eta' : F \dashv H$. Esto significa que $\eta' : \mathfrak{D}(F\cdot, \cdot) \to \mathfrak{C}(\cdot, H\cdot) : \mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$ es equivalencia natural de funtores covariantes. Luego, para cada $(X, Y) \in |\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}|$ se tiene $\eta'_{XY} : \mathfrak{D}(FX, Y) \to \mathfrak{C}(X, HY)$ un morfismo en $\mathfrak{S}$, y para cada morfismo $(\gamma^{op}, \delta) : (N_1, M_1) \to (N_2, M_2)$ en $\mathfrak{C}^{op} \times \mathfrak{D}$ se tiene el diagrama conmutativo con filas isomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(FN_1, M_1) \arrow[r, "\sim", "\eta'_{N_1M_1}"'] \arrow[d, "\mathfrak{D}(F\gamma^{op}{,}\delta)"'] & \mathfrak{C}(N_1, HM_1) \arrow[d, "\mathfrak{C}(\gamma^{op}{,}H\delta)"] \\
\mathfrak{D}(FN_2, M_2) \arrow[r, "\sim", "\eta'_{N_2M_2}"'] & \mathfrak{C}(N_2, HM_2)
\end{tikzcd}$$

$$\psi \in \mathfrak{D}(FN_1, M_1) \Rightarrow \mathfrak{D}(F\gamma^{op}, \delta)(\psi) : \quad \begin{tikzcd}
FN_2 \arrow[r] \arrow[d, "F\gamma"'] & M_2 \\
FN_1 \arrow[r, "\psi"] & M_1, \arrow[u, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

y así

(5.3) $$\mathfrak{D}(F\gamma^{op}, \delta)(\psi) = \delta\psi(F\gamma).$$

$$\psi' \in \mathfrak{C}(N_1, HM_1) \Rightarrow \mathfrak{C}(\gamma^{op}, H\delta)(\psi') : \quad \begin{tikzcd}
N_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & HM_2 \\
N_1 \arrow[r, "\psi'"] & HM_1, \arrow[u, "H\delta"']
\end{tikzcd}$$

y así

(5.4) $$\mathfrak{C}(\gamma^{op}, H\delta)(\psi') = (H\delta)\psi'\gamma.$$

Por la conmutatividad del diagrama

$$\mathfrak{C}(\gamma^{op}, H\delta)\big(\eta'_{N_1M_1}(\psi)\big) = \eta'_{N_2M_2}\mathfrak{D}(F\gamma^{op}, \delta)(\psi).$$

(5.5) $$\text{Por (5.3) y (5.4)}: \quad (H\delta)\big(\eta'_{N_1M_1}(\psi)\big)\gamma = \eta'_{N_2M_2}\delta\psi(F\gamma).$$

Tomando $N = M_1 = M_2$, $\delta = id_N$ y $\gamma = f$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}(FN_1, N) \arrow[r, "\sim", "\eta_3"'] \arrow[d, "\mathfrak{D}(Ff^{op}{,}id_N)"'] & \mathfrak{C}(N_1, HN) \arrow[d, "\mathfrak{C}(f^{op}{,}id_{HN})"] \\
\mathfrak{D}(FN_2, N) \arrow[r, "\sim", "\eta_4"'] & \mathfrak{C}(N_2, HN)
\end{tikzcd}$$

Luego de (5.5)

(5.6) $$\psi \in \mathfrak{D}(FN_1, N)\text{: } \eta_3(\psi)f = \eta_4\psi(Ff).$$

Como $g(Ff) = h(Ff)$, aplicando η_4: $\eta_4 g(Ff) = \eta_4 h(Ff)$. Según (5.6), $\eta_3(g)f = \eta_3(h)f$. Puesto que f es *epic*, $\eta_3(g) = \eta_3(h)$. Así, $g = h$ pues η_3 es isomorfismo $\square$

Este teorema afirma que si F tiene adjunto izquierdo, entonces F preserva *monic*. Si F tiene adjunto derecho, entonces F preserva *epic*.

Definición 6. [4, Definición 3.9.7] *En una categoría $\mathfrak{C}$, un objeto B es un retracto de un objeto A si existen morfismos $k : A \to B$ y $\nu : B \to A$ tales que $k\nu = 1_B$, donde k es una retracción .*

La demostración del teorema siguiente y de su corolario se puede ver en [4].

Teorema 3. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ un morfismo de anillos unitarios. Entonces cada $\mathcal{S}$-módulo que es $\mathscr{E}'$-proyectivo es un retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} C$, para algún $\mathbb{R}$-módulo C.*

Un $\mathcal{S}-$módulo que es $\mathscr{E}'-$proyectivo se llama proyectivo relativo. Entonces el teorema anterior afirma que un proyectivo relativo es un retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} C$.

Corolario 3. *Cada $\mathcal{S}$-módulo $\mathscr{E}'$-proyectivo tiene la forma $B = \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{B}$ para algún $\mathbb{R}$-módulo $\overline{B}$.*

Proposición 14. *Sea A un $\mathcal{S}$-módulo. Si existen un $\mathbb{R}$-módulo $\overline{A}$, morfismos de $\mathcal{S}$-módulos $s : A \to \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ y $t : \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A} \to A$ tales que $ts = 1_A$; entonces A es $\mathscr{E}'$-proyectivo.*

Demostración: Primero se demuestra que $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ es $\mathscr{E}'$-proyectivo. Puesto que $\overline{A}$ es $\mathbb{R}$-módulo y $\mathscr{E}$ es la familia de epimorfismos de $\mathbb{R}$-módulos que se descomponen, por la demostración de Proposición 8 $\overline{A}$ es $\mathscr{E}$-proyectivo. Por Proposición 5 F preserva epic y $G \dashv F$. Puesto que F es fiel, por la parte $ii)$ de Teorema 1 G preserva proyectivos. Por lo tanto, $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A} = G(\overline{A})$ es $\mathscr{E}'$-proyectivo.
Sea $\varepsilon \in \mathscr{E}'$, $\alpha \in \mathfrak{m}^{\ell}_{\mathcal{S}}(A, C)$ y $\varepsilon \in \mathfrak{m}^{\ell}_{\mathcal{S}}(B, C)$, entonces existe $\beta \in \mathfrak{m}^{\ell}_{\mathcal{S}}(A, B)$ tal que $\alpha = \varepsilon\beta$. En efecto, como $\mathcal{S} \otimes \overline{A}$ es $\mathscr{E}'-$proyectivo, entonces existe $\beta' \in \mathfrak{m}^{\ell}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S} \otimes \overline{A}, B)$ tal que $\alpha t = \varepsilon\beta'$. Esto significa que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \otimes \overline{A} \arrow[rr, shift left, "t"] \arrow[d, "\beta'"'] & & A \arrow[ll, shift left, "s"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dll, dashed, "\beta"'] \\
B \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"] & & C
\end{tikzcd}$$

Tomando $\beta = \beta' s$, se tiene $\varepsilon\beta = \varepsilon\beta' s = \alpha t s = \alpha$. Por lo tanto, A es $\mathscr{E}'-$proyectivo $\square$

Esta proposición afirma que un retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ es un proyectivo relativo.

Teorema 4. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ un morfismo de anillos. Entonces cada $\mathcal{S}$-módulo que es $\mathscr{M}'$-inyectivo es un retracto de $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, C)$, para algún $\mathbb{R}$-módulo C.*

Demostración: Como φ es morfismo de anillos de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{S}$, las categorías $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ y $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ son abelianas. Además, existe $F = F_{\varphi} : \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ funtor de cambio de anillos.
Por otro lado, existe $H : \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ funtor tal que $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, A)$, $f \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, f)$. Considerando [2, (IV.12.7)] y Proposición 5 sabemos que $F \dashv H$.
Según [2, (IV.12.4)] F tiene adjunto izquierdo, entonces por Lema 1 F preserva monic.
Sea $\mathscr{M}$ la familia de todos los monomorfismos de $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ que se descomponen. Entonces en virtud de Ejemplo 4 $\mathscr{M}$ es una clase inyectiva en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$.
En seguida, demostremos que F es fiel. Sean f y $g \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(A, B)$ tales que $Ff = Fg$, entonces $f = g$.
En efecto, f y $g \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(A, B)$ implica que Ff y $Fg \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(FA, FB)$.
Del hecho que $Ff = Fg$ se obtiene $Ff(Fa) = Fg(Fa)$ para $a \in A$. Recordando que como grupos abelianos $FA = A$, $FB = B$, se sigue que $Ff(a) = Fg(a)$ y $f(a) = g(a)$. Así, $f = g$.
Definimos $\mathscr{M}' = F^{-1}(\mathscr{M})$. Por Teorema 2, $\mathscr{M}'$ es una clase inyectiva de monomorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$. Ahora, sea $D \in |\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}|$ un $\mathscr{M}'$-inyectivo. Por la parte $iii)$ de Teorema 2, existe $C \in |\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}|$ un $\mathscr{M}$-inyectivo tal que D es sumando directo de $HC = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, C)$. Según [6, Proposición 3.2.2] existen morfismos $\mu' \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(D, HC)$ y $\nu \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(HC, D)$ tales que $\nu\mu' = 1_D$. Esto equivale a que el diagrama siguiente en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$ es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
D & \\
D \arrow[u, "1_D"] \arrow[r, dashed, "\exists\mu'"] & HC \arrow[ul, dashed, "\exists\nu"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, el $\mathcal{S}$-módulo D es un retracto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, C)$ $\square$

Un $\mathcal{S}-$módulo que es $\mathscr{M}'-$inyectivo se llama inyectivo relativo. Entonces el teorema anterior afirma que un inyectivo relativo es un retracto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, C)$.

Proposición 15. *Sea A un $\mathcal{S}$-módulo. Si existen un $\mathbb{R}$-módulo $\overline{A}$, morfismos de $\mathcal{S}$-módulos $\nu : A \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ y $\rho : Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A}) \to A$ tales que $\rho\nu = 1_A$; entonces A es $\mathscr{M}'$-inyectivo.*

Demostración: Primero se demuestra que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ es $\mathscr{M}'$-inyectivo. En efecto, sea $\mathscr{M}$ la clase de monomorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}$ que se descomponen. Dados $f \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(A, \overline{A})$ y $\mu \in \mathscr{M}$ con $\mu \in \mathfrak{m}^l_{\mathbb{R}}(A, B)$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \overline{A} & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, tail, shift left, "\mu"] & B \arrow[l, shift left, "\nu"] \arrow[ul, dashed, "\exists g = f\nu"'] \end{tikzcd}$$

donde $\nu\mu = id_A$. Así, el $\mathbb{R}-$módulo $\overline{A}$ es $\mathscr{M}-$inyectivo. Debido a Proposición 5 F preserva monic y $F \dashv H$. Puesto que F es fiel, por la parte $ii)$ de Teorema 2 H preserva inyectivos. Por lo tanto, $H\overline{A} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ es $\mathscr{M}'-$inyectivo.
Sea $\mu \in \mathscr{M}'$, $\alpha \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(B, A)$ y $\mu \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(B, C)$, entonces existe $\beta \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(C, A)$ tal que $\alpha = \beta\mu$. En efecto, como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ es $\mathscr{M}'-$inyectivo, entonces existe $\beta' \in \mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}(C, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A}))$ tal que $\nu\alpha = \beta'\mu$. Esto significa que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift right, "\nu"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A}) \arrow[l, shift right, "\rho"'] \\ B \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, tail, "\mu"] & C \arrow[u, "\beta'"'] \arrow[ul, dashed, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Tomando $\beta = \rho\beta'$, se tiene $\beta\mu = \rho\beta'\mu = \rho\nu\alpha = \alpha$. Por lo tanto, A es $\mathscr{M}'-$inyectivo $\square$

Esta proposición afirma que un retracto de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ es un inyectivo relativo.

Ejemplos. Se presentan como ejemplos :

$i)$ $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ es un proyectivo relativo.

$ii)$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ es un inyectivo relativo.

$iii)$ $\mathscr{E}' = F^{-1}(\mathscr{E})$ es una clase proyectiva de epimorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$, donde $\mathscr{E}$ es una clase proyectiva de epimorfismos de $\mathbb{R}-$módulos que se descomponen.

$iv)$ $\mathscr{M}' = F^{-1}(\mathscr{M})$ es una clase inyectiva de monomorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\mathcal{S}}$, donde $\mathscr{M}$ es una clase inyectiva de monomorfismos de $\mathbb{R}-$módulos que se descomponen.

Si $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{S} = \Lambda$ y $\varphi(1) = 1_{\Lambda}$, entonces :

$v)$ $\mathscr{E}'_1 = F^{-1}(\mathscr{E}_1)$ es una clase proyectiva de epimorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\Lambda}$, donde $\mathscr{E}_1$ es la clase proyectiva de epimorfismos de grupos abelianos.

$vi)$ $\mathscr{M}'_1 = F^{-1}(\mathscr{M}_1)$ es una clase inyectiva de monomorfismos en $\mathfrak{m}^l_{\Lambda}$, donde $\mathscr{M}_1$ es la clase inyectiva de monomorfismos de grupos abelianos.

$vii)$ $\mathscr{E}'_2 = F^{-1}(\mathscr{E}_2)$ es una clase proyectiva en $\mathfrak{m}^l_{\Lambda}$, de epimorfismos de $\Lambda-$módulos que se descomponen como morfismos de grupos abelianos.

$viii)$ $\mathscr{M}'_2 = F^{-1}(\mathscr{M}_2)$ es una clase inyectiva en $\mathfrak{m}^l_{\Lambda}$, de monomorfismos de $\Lambda-$módulos que se descomponen como morfismos de grupos abelianos.

Discusión. Se observa que $\mathscr{E}'_2 \subseteq \mathscr{E}'_1$. De esto se deduce que cada $\Lambda-$módulo proyectivo ($\mathscr{E}'_1$-proyectivo) es proyectivo relativo ($\mathscr{E}'_2$-proyectivo). La recíproca es falsa.

Contraejemplo. Haciendo $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}_2$, $B = \mathbb{Z}_2$ y $G = \mathbb{Z}$ en Ejemplo 1
$Hom(\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, Hom(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}))$. De esto se sigue que $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$.
Tomando $f(k) = 2k$ y g como el morfismo canónico, la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos izquierdos
$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2$ es exacta. Aplicando el funtor $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} (-)$ y [2, Proposition III.7.3(ii)] se obtiene la sucesión siguiente no exacta $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}_2}} \mathbb{Z}_2$. Así, el $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}_2$ no es plano.
Si $\Lambda = \mathbb{Z}_2$, entonces se sabe que $\mathbb{Z}_2$ es un $\mathbb{Z}-$módulo no proyectivo. Sin embargo $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, por Proposición 14 se deduce que $\mathbb{Z}_2$ es proyectivo relativo.

No todo submódulo de un $\Lambda-$módulo es un sumando directo. Por ejemplo, según [2, Exercise I.3.7] $\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ no es sumando directo de $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}$ porque conforme a [6, Ejemplo 1.5.1]

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \langle 2 \rangle) \xrightarrow{u_*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{v_*} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0$$

no es exacta a pesar de que la sucesión $0 \longrightarrow \langle 2 \rangle \xrightarrow{u} \mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$ es exacta.
Un $\Lambda-$módulo se llama semisimple si todos sus submódulos son sumandos directos. Conforme a [6, Corolario 3.2.3] $\mathbb{Z}_4$ no es semisimple pues el submódulo $\langle 2 \rangle = \{0, 2\}$ de $\mathbb{Z}_4$ no es sumando directo.
En contexto de la categoría de $\mathcal{S}-$módulos, por Definición 6 un $\mathcal{S}-$módulo B es retracto de un $\mathcal{S}-$módulo

A si $Im(\nu)$ es sumando directo de A; i.e., $A = \text{Ker}(k) \oplus \text{Im}(\nu)$.

Tomando $\mathbb{R} = \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_4$ y $\varphi = i$ la inclusión de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_4$ (morfismo de anillos unitarios), se sabe que $\mathbb{Z}_4$ es $\mathbb{Z}_2-$módulo ya que $\mathbb{Z}_4$ es $\mathbb{Z}_4-$módulo. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_4$.
Por otro lado, se muestra que $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{Z}_4-$módulo como aplicación $2)$ de [6, Proposición 1.1.3].
Sea $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ tal que $f(1) = 2$. Entonces f es morfismo de $\mathbb{Z}_4-$módulos e $Im(f) = \langle 2 \rangle = \{0, 2\}$. En consecuencia, $\mathbb{Z}_2$ no es retracto de $\mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2$.
Con este hecho se descarta la posibilidad de tomar $\overline{A} = FA$ (como $\mathbb{R}$-módulo inducido por el S-módulo A) para probar la afirmación de la hipótesis planteada.
Sin embargo, se demuestra lo siguiente. Todo $\mathcal{S}$-módulo A tal que $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$ es semisimple es un retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$, donde $\overline{A}$ es el $\mathbb{R}$-módulo inducido por A.
En efecto, la aplicación $\nu : A \to \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$ dada por $\nu(a) = 1 \otimes_{\mathbb{R}} a$ es un morfismo de $\mathcal{S}-$módulos pues $\nu(\lambda a) = \lambda \otimes_{\mathbb{R}} a = \lambda\nu(a)$ para $\lambda \in \mathcal{S}$ y $a \in A$. Como $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$ es semisimple, $Im(\nu)$ es submódulo de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$ se deduce que $Im(\nu) = \nu(A)$ es sumando directo de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A$. Puesto que el morfismo ν es inyectivo, $A \cong Im(\nu)$. En virtud de [6, Proposición 3.2.2] se concluye que A es un retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$.

6. Conclusiones. Dado $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$, un morfismo de anillos unitarios :

$i)$ Los retractos de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ son proyectivos relativos.
$ii)$ Los retractos de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ son inyectivos relativos.
$iii)$ El $S-$módulo $X_n := \bigoplus_{r+s=n} X_{rs}$ es proyectivo relativo si cada X_{rs} es un retracto de $S \otimes_R \overline{X}_{rs}$ (Proposición 14 y Proposición 6).
$iv)$ Un $\mathcal{S}-$ módulo es proyectivo relativo si y sólo si es retracto de $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} C$ (Teorema 3 y Proposición 14).
$v)$ Un $\mathcal{S}-$ módulo es inyectivo relativo si y sólo si es retracto de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, \overline{A})$ (Teorema 4 y Proposición 15).

Al lector de este trabajo se le puede recomendar el estudio de los tres enunciados siguientes :

$i)$ Por el hecho que $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} A = G(A)$ es proyectivo relativo para cada $\mathcal{S}-$módulo A, donde G es un funtor aditivo, se puede formar con estos objetos un semigrupo abeliano bajo la suma directa, entonces se podría construir el grupo de Grothendieck correspondiente.
$ii)$ Por el hecho que $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}, A) = H(A)$ es inyectivo relativo para cada $\mathcal{S}-$módulo A, donde H es un funtor aditivo, se puede formar con estos objetos un semigrupo abeliano bajo la suma directa, entonces se podría construir también otro grupo de Grothendieck.
$iii)$ Aún queda abierta el descarte de la hipótesis de la investigación, tal vez se podría conseguir construyendo un $\mathcal{S}-$módulo A que no tenga la forma $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \overline{A}$ o que no sea sumando directo de uno de esta forma.

7. Agradecimientos. El autor agradece a la Universidad Nacional del Altiplano de Puno por la oportunidad dada para enseñar cursos de álgebra en la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas; al Instituto de Matemática y Ciencias Afines por las condiciones adecuadas que me ha ofrecido para realizar el estudio de doctorado en Matemática; y a Dr. Christian Valqui por sus ideas que me motivaron realizar esta investigación.

ORCID and License

Felipe Clímaco Ccolque T. http://orcid.org/0000-0002-9440-3569

Referencias

[1] Guccione JA, Guccione JJ. Hochschild (co)homology of Hopf crossed products.*K-theory.* 2002; 25(2):138-169.
[2] Hilton PJ, Stammbach U. A course in Homological Algebra. New York Heidelberg Berlin: Springer Verlag; 1971.
[3] Ccolque Taipe FC. Sucesiones Espectrales, Homología de Complejos Filtrados y Derivación de Funtores Compuestos. [Tesis de maestría]. Lima : Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingeniería; 2009.
[4] Ccolque F.C. Tópicos de Álgebra y Categorías. Lima: Centro de Producción Imprenta de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos; 2018.
[5] Mitchell B. Theory of Categories. Volume 17.*New York and London: Academic Press, Inc*; 1965.
[6] Gentile ER. Estructuras Algebraicas II. Washington, D.C.: Secretaría General de la Organización de Estados Americanos; 1971.