Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2020; Vol. 7(2): 202-213.

Aplicación del método Faedo-Galerkin a una ecuación de onda semilineal con disipación localizada

Application of the Faedo-Galerkin method to a semilinear wave equation with localized dissipation

Carlos Alberto Peña Miranda and Alfonso Pérez Salvatierra

Received, Apr. 22, 2020 *Accepted, Aug. 23, 2020*

How to cite this article:
Peña Miranda CA, Pérez Salvatierra A. *Aplicación del método Faedo-Galerkin a una ecuación de onda semilineal con disipación localizada*. Selecciones Matemáticas. 2020;7(2):202–213. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2020.02.02

Resumen
En este artículo, demostramos la existencia única de la solución para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal mediante el método de Faedo-Galerkin.
Palabras clave. Método de Faedo-Galerkin, existencia y unicidad de solución, ecuación de onda semilineal, disipación localizada.

Abstract

In this article, we demonstrate the unique existence of the solution for the semilinear wave equation with localized dissipation using the Faedo-Galerkin method.
Keywords . Faedo-Galerkin Method, existence and uniqueness of solution, semilinear wave equation, localized dissipation.

1. Introducción. En el presente artículo vamos a demostrar la existencia y unicidad de solución regular para la ecuación de onda semilineal con disipación localizada no lineal dado por,

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(x)u + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \text{ en } \Omega \times [0, +\infty[, \tag{1.1}$$

con condición de frontera

$$u(x,t) = 0, \text{ en } (x,t) \in \Gamma \times [0, +\infty[, \tag{1.2}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ x \in \Omega, \tag{1.3}$$

donde Ω es un conjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ con frontera Γ bien regular.

El objetivo del artículo es demostrar la existencia y la unicidad de una solución regular para el problema (1.1) – (1.3) utilizando el método Faedo-Galerkin que, además de ser un método práctico, didáctico y deductivo de fácil compresión, es el método más apropiado para sistemas que están en presencia de términos no lineales y términos con efectos disipativos no lineales como el que se presenta en el presente trabajo.

*Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga No 375 - Edificio Jorge Basadre, Lima-Perú (cpenam@unmsm.edu.pe).
†Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Calle Germán Amézaga No 375 - Edificio Jorge Basadre, Lima-Perú (aperezs@unmsm.edu.pe).

Para demostrar el resultado de la existencia de soluciones, las funciones α, a, f y g deben verificar las siguientes hipótesis:

(H1) $a \in L^\infty_+(\Omega); a(x) \geq a_0 > 0$ casi siempre en Ω.

(H2) $f \in C^1(\mathbb{R})$ y cumple la siguiente condición de crecimiento

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y|, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

para alguna constante $C > 0$ y $p > 1$ tal que $(n - 2)p \leq n$.

(H3) La función no lineal $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple

(a) $g \in C^1(\mathbb{R})$,

(b) $g(s)s \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$,

(c) g es una función no decreciente,

(d) Existen constantes $m, M > 0$ tal que $m|s| \leq g(s) \leq M|s|$, para todo $s \in \mathbb{R}$,

(e) $g' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(H4) $\alpha \in W^{1,\infty}(\Omega); \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ casi siempre en Ω.

Por otro lado, la estabilización para la ecuación de la onda sujeta a disipación localizada

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

ha sido estudiada por Zuazua, E. [8] y Nakao, M. [5, 6] donde demuestran el decaimiento uniforme de las soluciones considerando la función a positiva en todo el dominio Ω. Además, el decaimiento uniforme de soluciones para ecuaciones de onda semilineal con disipación localizada

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ en } \Omega \times [0, +\infty[,$$

fue estudiada por Peña, C. [7] y Zuazua, E. [9, 10] donde asume que a es una función positiva en una vecindad ω de la frontera de Ω o en todo $\mathbb{R}$.

En la siguientes dos secciones, usando el método de Faedo-Galerkin, demostraremos el siguiente teorema

Teorema 1.1. *Si $\{u_0, u_1\} \in (H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$ y se cumple las hipotesis (H1) – (H4), entonces existe una única solución regular $u : \Omega\times]0, T[\to \mathbb{R}$ del problema (1.1) – (1.3) satisfaciendo*

$$u \in L^\infty(0, T, H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)),\ u' \in L^\infty(0, T, H^1_0(\Omega)),\ u'' \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)).$$

2. Existencia de solución regular.

En esta sección demostramos la existencia de la solución regular, utilizaremos el método de Faedo-Galerkin, que consta de tres pasos:

1. Construcción de soluciones aproximadas en un espacio de dimensión finita.
2. Obtención de estimaciones previas para las soluciones aproximadas.
3. Pasando el límite de soluciones aproximadas.

Paso 1. Construcción de las soluciones aproximadas.

Consideremos $\{w_j\}$ una base una ortonormal en $L^2(\Omega)$, formado por los vectores propios del operador $-\Delta$, es decir, cada vector w_j es una solución al problema espectral

$$((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v),\ \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

La existencia de esta base está garantizada por el teorema espectral en el Análisis Espectral – Manuel Milla Miranda [4]. Sea $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ el subespacio m – dimensional del espacio $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ generador por los primeros m vectores de la base $\{w_j\}$. El problema aproximado consiste en encontrar funciones $u_m(t) \in V_m$ tales que

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j(x),$$

donde los $g_{jm}(t)$ son soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} (u''_m, v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (\alpha(\cdot)u_m, v) + (f(u_m), v) + (a(\cdot)g(u'_m), v) = 0,\ \forall v \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ en } H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ en } H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

Las convergencias anteriores tienen sentido, ya que el conjunto formado por combinaciones lineales de elementos de V_m son densos en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Por el teorema de Caratheodory (ver Coddington [1] pág. 43), el problema aproximado (2.1) tiene una solución local en todo el intervalo $[0, t_m]$, con $t_m < T$. Además, esta solución puede ser extendido a todo intervalo $[0, T]$ como consecuencia de las estimativas a priori que veremos a continuación.

Paso 2. Estimativas apriori.

Primera Estimativas apriori. Considerando $v = u_m'(t) \in V_m$ en la primera fila de (2.1), obtenemos:

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) + (\alpha(\cdot)u_m(t), u_m'(t)) + (f(u_m(t)), u_m'(t)) + (a(\cdot)g(u_m'(t)), u_m'(t)) = 0,$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx\right) + 2\int_\Omega a(x)g(u_m'(t))u_m'(t)dx = 0.$$

Por la hipótesis (H2), la función $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, $\forall s \in \mathbb{R}$, está bien definida.

De la hipótesis (H1) y el índice (b) de (H3) resulta

$$\frac{d}{dt}\left(|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx\right) \leq 0.$$

Integrando de 0 a t obtenemos

$$\begin{aligned}|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx &\leq |u_m'(0)|^2 \\ + |\nabla u_m(0)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(0)|^2 &+ \int_\Omega F(u_m(0))dx.\end{aligned}$$

De las convergencias

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ en } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ y } u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ en } H_0^1(\Omega),$$

existe una constante $C_1 > 0$ independiente de t y m tal que

$$|u_{1m}|^2 + |\nabla u_{0m}|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{0m}|^2 \leq C_1. \tag{2.2}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H2), de (2.2) y la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, $p + 1 \leq \dfrac{2n}{n-2}$, existe una constante $C_2 > 0$ independiente de t y m tal que

$$\int_\Omega F(u_m(0))dx = \int_\Omega \int_0^{u_m(0)} f(s)dsdx \leq C\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + \frac{1}{p+1}|u_{0m}|^{p+1}\right)dx \leq C_2.$$

Por lo tanto,

$$|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m(t)|^2 + \int_\Omega F(u_m(t))dx \leq C_3 \ \ \forall\, t \in [0, T], \tag{2.3}$$

donde la constante C_3 es independiente de t y m. Luego, por el teorema de prolongamiento de solución (ver Coddington [1] pág. 45), podemos extender la solución aproximada $u_m(t)$ a todo el intervalo $[0, T]$.

Mas aún, de la desigualdad (2.3) se obtiene

$$(u_m') \text{ es acotada en } L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \tag{2.4}$$

y

$$(u_m) \text{ es acotada en } L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega)). \tag{2.5}$$

Segunda Estimativa a Priori. Al derivar con respecto a t la primera fila de la ecuación aproximada (2.1), se obtiene

$$(u_m'''(t), v) + (\nabla u_m'(t), \nabla v) + (\alpha(\cdot)u_m'(t), v) + (f'(u_m(t))u_m'(t), v) + (a(\cdot)g'(u_m'(t))u_m''(t), v) = 0.$$

Considerando $v = u''_m(t) \in V_m$ se obtiene

$$(u'''_m(t), u''_m(t)) + (\nabla u'_m(t), \nabla u''_m(t)) + (\alpha(\cdot)u'_m(t), u''_m(t)) + (f'(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t)) \\ + (a(\cdot)g'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t)) = 0;$$

es decir,

$$\frac{d}{dt}\left(|u''_m(t)|^2 + |\nabla u'_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u'_m(t)|^2\right) + 2\int_\Omega f'(u_m(t))u'_m(t)u''_m(t)dx \\ + \ 2\int_\Omega a(x)g'(u'_m(t))|u'_m(t)|^2 dx = 0. \tag{2.6}$$

De la hipótesis (H.2) y la desigualdad de Hölder generalizada, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega f'(u_m(t))u'_m(t)u''_m(t)dx &\leq \int_\Omega |f'(u_m(t))||u'_m(t)||u''_m(t)|dx \\ &\leq \int_\Omega C\left(1 + |u_m(t)|^{p-1}\right)|u'_m(t)||u''_m(t)|dx \\ &= C\left(\int_\Omega |u'_m(t)||u''_m(t)|dx + \int_\Omega |u_m(t)|^{p-1}|u'_m(t)||u''_m(t)|dx\right) \\ &\leq C\left(|u'_m(t)||u''_m(t)| + |u_m(t)|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|u'_m(t)|_{L^{2p}(\Omega)}|u''_m(t)|\right).\end{aligned}$$

De las inmersiones Sobolev

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega), \quad 2p \leq \frac{2n}{n-2},$$

y de (2.4) – (2.5) resulta

$$\int_\Omega f'(u_m(t))u'_m(t)u''_m(t)dx \leq C_4|u''_m(t)| + C_5|\nabla u'_m(t)||u''_m(t)|.$$

De la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ se concluye

$$\int_\Omega f'(u_m(t))u'_m(t)u''_m(t)dx \leq C_6|u''_m(t)|^2 + C_7|\nabla u'_m(t)|. \tag{2.7}$$

Además, por la hipótesis (H1) y (c) de (H3), resulta que $g'(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Luego

$$\int_\Omega a(x)g'(u'_m(t))|u'_m(t)|^2 dx \geq 0. \tag{2.8}$$

Reemplazando (2.7) y (2.8) en (2.6) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(|u''_m(t)|^2 + |\nabla u'_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u'_m(t)|^2\right) \leq C_6|u''_m(t)|^2 + C_7|\nabla u'_m(t)|^2. \tag{2.9}$$

Ahora, integrando ambos lados de la desigualdad (2.9) desde de 0 a t, $t \in [0, T]$, se obtiene

$$|u''_m(t)|^2 + |\nabla u'_m(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u'_m(t)|^2 \leq |u''_m(0)|^2 + |\nabla u_{1m}|^2 \\ + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{1m}|^2 + C_8\int_0^t \left(|u''_m(\tau)|^2 + |\nabla u'_m(\tau)|^2\right)d\tau. \tag{2.10}$$

En lo que sigue vamos a acotar la sucesión $(u''_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$. Considerando $t = 0$ y $v = u''_m(0) \in V_m$ en el problema aproximado (2.1), tenemos

$$(u''_m(0), u''_m(0)) + (\nabla u_{0m}, \nabla u''_m(0)) + (\alpha(\cdot)u_{0m}, u''_m(0)) + (f(u_{0m}), u''_m(0)) + (a(\cdot)g(u_{1m}), u''_m(0)) = 0.$$

Por la fórmula de Green

$$|u''_m(0)| - (\Delta u_{0m}, u''_m(0)) + (\alpha(\cdot)u_{0m}, u''_m(0)) + (f(u_{0m}), u''_m(0)) + (a(\cdot)g(u_{1m}), u''_m(0)) = 0.$$

Además, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y simplificando se obtiene

$$|u_m''(0)| \leq |\Delta u_m(0)|_{L^2(\Omega)} + |\alpha|_{L^\infty(\Omega)}|u_{0m}| + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|.$$

Luego

$$|u_m''(0))| \leq |u_{0m}|_{H^2(\Omega)} + |\alpha|_{L^\infty(\Omega)}|u_{0m}| + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|.$$

De la acotación de la sucesión $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$ en $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, resulta

$$|u_m''(0)|_{L^2(\Omega)} \leq C_9 + C_{10}|\alpha|_{L^\infty(\Omega)} + |f(u_{0m})| + |a|_{L^\infty(\Omega)}|g(u_{1m})|. \tag{2.11}$$

De la hipótesis (H.2) y la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
|f(u_{0m})|^2 = \int_\Omega |f(u_{0m})|^2 dx &\leq C \int_\Omega \left(|u_{0m}| + |u_{0m}|^p\right)^2 dx \\
&\leq 2C \int_\Omega \left(|u_{0m}|^2 + |u_{0m}|^{2p}\right) dx \\
&\leq 2C \left(|u_{0m}|^2_{L^2(\Omega)} + |u_{0m}|^{2p}_{L^{2p}(\Omega)}\right) \\
&\leq 2C \left(|u_{0m}|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{C}|\nabla u_{0m}|^{2p}_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

De (2.2), existe una constante $C_{11} > 0$ tal que

$$|f(u_m(0))| \leq C_{11}. \tag{2.12}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H.3) (d) y de la convergencia $u_m'(0) = u_{1m} \to u_1$ en $H_0^1(\Omega)$ se obtiene

$$|g(u_{1m})| = \left(\int_\Omega |g(u_{1m})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M \left(\int_\Omega |u_{1m}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{12}|u_{1m}|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{13}. \tag{2.13}$$

De (2.11) – (2.13), resulta que la sucesión $(u_m''(0))_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. Mas aún, de la tercera fila de (2.1), la sucesión $(\nabla u_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $C_{14} > 0$ tal que

$$|u_m''(0)|^2 + |\nabla u_{1m}|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_{1m}|^2 \leq C_{14}. \tag{2.14}$$

De (2.10) y la desigualdad (2.14) resulta

$$|u_m''(t)|^2 + |\nabla u_m'(t)|^2 + |\alpha^{1/2}(\cdot)u_m'(t)|^2 \leq C_{14} + C_8 \int_0^t \left(|u_m''(\tau)|^2 + |\nabla u_m'(\tau)|^2\right) d\tau.$$

Por la desigualdad de Gronwall, se obtiene

$$|u_m''(t)|^2 + |\nabla u_m'(t)|^2 \leq C_{15}, \;\; \forall\, t \in [0,T],\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Mas aún

$$(u_m'') \text{ es acotada en } L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \tag{2.15}$$

y

$$(\nabla u_m') \text{ es acotada en } L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)). \tag{2.16}$$

Paso 3. Paso al límite.

De las estimativas en (2.4), (2.5), (2.15) y (2.16), existe (u_μ) sucesión de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T > 0$

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.17}$$

$$u_\mu' \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ en } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$u''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Por la cadena de inmersiones

$$D(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$
$$\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \left[L^2(0,T;L^2(\Omega))\right]' \hookrightarrow D'(0,T;L^2(\Omega))$$

y unicidad de límite, resulta $\varphi = u'$ y $\phi = u''$.

De la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, de (2.17), (2.18), (2.19) y en virtud al teorema de Aubin-Lions (ver Lions [3] pág. 58), podemos extraer una subsucesión de (u_μ) y de (u'_μ) la cual será denotada de la misma forma, de modo que

$$u_\mu \to u \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \tag{2.20}$$

y

$$u'_\mu \to u' \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q), \tag{2.21}$$

donde $Q = \Omega \times (0,T)$. Luego,

$$u_\mu \to u \text{ casi siempre en } Q \tag{2.22}$$

y

$$u'_\mu \to u' \text{ casi siempre en } Q.$$

De la continuidad de la funciones f y g resulta

$$f(u_\mu) \to f(u) \text{ casi siempre en } Q \tag{2.23}$$

y

$$g(u'_\mu) \to g(u') \text{ casi siempre en } Q. \tag{2.24}$$

Afirmación 1.

$$f(u_\mu) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la hipótesis (H2) y de $f(0) = 0$, resulta

$$\begin{aligned} |f(u_\mu)|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |f(u_\mu(x,t))|^2 dxdt \\ &\le 2C \int_0^T \int_\Omega \left(|u_\mu(x,t)|^2 + |u_\mu(x,t)|^{2p}\right) dxdt \\ &\le 2C \left(|u_\mu|^2_{L^2(Q)} + |u_\mu|^{2p}_{L^{2p}(Q)}\right). \end{aligned}$$

De la inmersión

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$$

y de (2.5), existe una constante $C_{16} > 0$ tal que

$$|f(u_\mu)|_{L^2(Q)} \le C_{16}, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

De (2.23), (2.25) y el lema de Lions (ver Lions [3] pág. 12) se obtiene

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{2.26}$$

Por otro lado, de la hipótesis (H2) y de la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ se obtiene

$$\begin{aligned}|f(u_\mu(t))|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u_\mu(x,t))|^2 dx \\ &\leq 2C \int_\Omega \left(|u_\mu(x,t)|^2 + |u_\mu(x,t)|^{2p}\right) dxdt \\ &\leq 2C \left(|u_\mu(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_\mu(t)|^{2p}_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

De (2.5) se obtiene

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |f(u_\mu(t))|_{L^2(\Omega)} \leq C_{17}.$$

Luego, la sucesión $(f(u_\mu))_{\mu\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $(f(u_\mu))_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$ se cumple

$$f(u_\mu) \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Así como,

$$f(u_\mu) \rightharpoonup \psi \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.26) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se concluye

$$f(u_\mu) \overset{*}{\rightharpoonup} f(u) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmación 2.

$$a(\cdot)g(u'_\mu(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} a(\cdot)g(u'(t)) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la convergencia (2.24)

$$a(\cdot)g(u'_\mu) \to a(\cdot)g(u') \text{ casi siempre en } Q. \tag{2.27}$$

De la hipótesis (H1), índice (d) de (H3) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned}|a(\cdot)g(u'_\mu)|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dxdt \\ &\leq M \int_0^T \int_\Omega |a(x)|^2 |u'_\mu(x,t)|^2 dxdt \\ &\leq M|a|^2_{L^\infty(\Omega)} |u'_\mu|^2_{L^2(Q)} < \infty. \qquad (2.28)\end{aligned}$$

De (2.27), (2.28) y el lema de Lions resulta

$$a(\cdot)g(u'_\mu) \rightharpoonup a(\cdot)g(u') \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{2.29}$$

De la hipótesis (H1), índice (d) de (H3) y (2.4) se obtiene

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |a(\cdot)g(u'_\mu(t))|_{L^2(\Omega)} \leq M|a|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{0<t<T} \text{ess}\, |u'_\mu(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_{18}.$$

Luego, la sucesión $\left(a(\cdot)g(u'_\mu(t)\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $\left(a(\cdot)g(u'_\mu(t)))\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$ se cumple

$$a(\cdot)g(u'_\mu(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

también se tiene,

$$a(\cdot)g(u'_\mu(t)) \rightharpoonup \eta \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.29) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se concluye

$$a(\cdot)g(u'_\mu(t))) \overset{*}{\rightharpoonup} a(\cdot)g(u'(t))) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Afirmación 3.

$$\alpha(\cdot)u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(\cdot)u \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

En efecto, de la convergencia (2.22), resulta

$$\alpha(\cdot)u_\mu \to \alpha(\cdot)u \text{ casi siempre en } Q. \tag{2.30}$$

De la hipótesis (H4) y (2.4) se obtiene

$$\begin{aligned}|\alpha(\cdot)u_\mu|^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |\alpha(x)u_\mu(x,t)|^2 dxdt\\ &\le \int_0^T \int_\Omega |\alpha(x)|^2 |u_\mu(x,t)|^2 dxdt\\ &\le |\alpha|^2_{L^\infty(\Omega)}|^2 |u_\mu|^2_{L^2(Q)} < \infty. \end{aligned}\tag{2.31}$$

De (2.30), (2.31) y el lema de Lions se obtiene

$$\alpha(\cdot)u_\mu \rightharpoonup \alpha(\cdot)u \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q). \tag{2.32}$$

De la hipótesis (H4) y (2.5) se obtiene

$$\sup_{0<t<T} \text{ess}\, |\alpha(\cdot)u_\mu(t)|_{L^2(\Omega)} \le M|\alpha|_{L^\infty(\Omega)} \sup_{0<t<T} \text{ess}\, |u_\mu(t)|_{L^2(\Omega)} \le C_{19}.$$

Luego, la sucesión $(\alpha(\cdot)u_\mu(t))_{\mu\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Por lo tanto, existe una subsucesión $(\alpha(\cdot)u_\mu(t))_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$ se cumple

$$\alpha(\cdot)u_\mu(t) \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

También se tiene,

$$\alpha(\cdot)u'_\mu(t) \rightharpoonup \eta \text{ en } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.32) y unicidad de límite en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, se concluye

$$\alpha(\cdot)u_\mu(t) \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha(\cdot)u'(t) \text{ en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

De las afirmaciones 1, 2 y 3, para $w_j \in H^1_0(\Omega)$ y $\theta \in D(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, resulta

$$\int_0^T \left(a(\cdot)g(u'_\mu(t)), w_j\right)\theta(t)dt \to \int_0^T \left(a(\cdot)g(u'(t)), w_j\right)\theta(t)dt, \tag{2.33}$$

$$\int_0^T \left(f(u'_\mu(t)), w_j\right)\theta(t)dt \to \int_0^T \left(f(u'(t)), w_j\right)\theta(t)dt \tag{2.34}$$

y

$$\int_0^T \left(\alpha(\cdot)u_\mu(t), w_j\right)\theta(t)dt \to \int_0^T \left(\alpha(\cdot)u(t), w_j\right)\theta(t)dt. \tag{2.35}$$

Por otro lado, de (2.19) resulta

$$\langle u''_\mu, \varphi\rangle \to \langle u'', \varphi\rangle \ \ \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega));$$

es decir,

$$\int_0^T \left(u''_\mu(t), \varphi(t)\right) dt \to \int_0^T \left(u''(t), \varphi(t)\right) dt.$$

En particular para $\varphi = w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ se obtiene

$$\int_0^T \left(u''_\mu(t), w_j\right)\theta(t)dt \to \int_0^T \left(u''(t), w_j\right)\theta(t)dt. \tag{2.36}$$

De (2.17)

$$\langle \nabla u_\mu, \varphi \rangle \to \langle \nabla u, \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in L^1\left(0, T; \left[L^2(\Omega)\right]^n\right),$$

es decir,

$$\int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla \varphi)_{[L^2(\Omega))]^n}\, dt \to \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi)_{[L^2(\Omega))]^n}\, dt.$$

En particular para $\varphi = \nabla w_j \theta \in L^1\left(0, T; \left[L^2(\Omega)\right]^n\right)$ resulta

$$\int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)_{[L^2(\Omega))]^n}\, \theta(t) dt \to \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)_{[L^2(\Omega))]^n}\, \theta(t) dt. \tag{2.37}$$

Afirmación 4. La función u obtenida verifica el problema (1.1).

En efecto, considerando en el problema aproximado $v = w_j$, $j = 1, 2, \ldots m.$ resulta

$$\begin{aligned}(u''_m(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) + (\alpha(\cdot) u_m(t), w_j) + (f(u_m(t)), w_j)\\ + (a(\cdot) g(u'_m(t)), w_j) = 0.\end{aligned} \tag{2.38}$$

Sea $\theta \in D(0, T)$ y $j \in \mathbb{N}$ con $\mu < j$. Multiplicando la ecuación aproximada (2.38) por θ e integrando desde 0 hasta T, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_\mu(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\alpha(\cdot) u_\mu(t), w_j)\theta(t) dt\\ + \int_0^T (f(u_\mu(t)), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (a(\cdot) g(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t) dt = 0.\end{aligned}$$

De las convergencias (2.33), (2.34), (2.35) (2.36) y (2.37) resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (\alpha(\cdot) u(t), w_j)\theta(t) dt\\ + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T (a(\cdot) g(u'(t)), w_j)\theta(t) dt = 0.\end{aligned}$$

De la totalidad del conjuto $\{w_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ en $H_0^1(\Omega)$ resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), v)\theta(t) dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) dt + \int_0^T (\alpha(\cdot) u(t), v)\theta(t) dt + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t) dt\\ + \int_0^T (a(\cdot) g(u'(t)), v)\theta(t) dt = 0,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall \theta \in D(0, T).\end{aligned}$$

En particular, para $v \in D(\Omega)$ resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega u''(x,t) v(x)\theta(t) dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u(t) v(x)\theta(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \alpha(x) u(t) v(x)\theta(t) dt\\ + \int_0^T \int_\Omega f(u(x,t)) v(x)\theta(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u'(x,t)) v(x)\theta(t) dt = 0,\ \forall \theta \in D(0, T).\end{aligned}$$

De la totalidad del conjunto $\{v\theta;\ v \in D(\Omega),\ \theta \in D(0, T)\}$ en $D(\Omega \times (0, T))$ obtenemos

$$u'' - \Delta u + \alpha(x) u + \ f(u) + a(x) g(u') = 0 \text{ en } D'(\Omega \times (0, T)).$$

Por otro lado, como $u'', \alpha(\cdot) u, f(u), a(\cdot) h(u') \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, entonces $\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Luego,

$$u'' - \Delta u + \alpha(x) u + \ f(u) + a(x) g(u') = 0 \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Por el teorema de regularidad para problemas elípticos y la condición (1.2), se obtiene

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),\ \forall\, T>0.$$

Verificación de los datos iniciales. Como $u, u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, entonces $u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ y $u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Por tanto, tiene sentido calcular $u(0)$, $u(T)$, $u'(0)$ y $u'(T)$.

Afirmación 5. Se cumple:

$$u(0)=u_0 \text{ y } u'(0)=u_1.$$

En efecto, sea $\theta \in C^0([0,T])$ con $\theta(0)=1$ y $\theta(T)=1$. Como $u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ entonces

$$\langle u'_\mu,\varphi\rangle \to \langle u',\varphi\rangle,\ \forall\varphi\in L^1(0,T;L^2(\Omega));$$

es decir,

$$\int_0^T (u'_\mu(t),\varphi)dt \to \int_0^T (u'(t),\varphi)dt,\ \forall\varphi\in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

En particular, para $\varphi = w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\forall j\in\mathbb{N}$, resulta

$$\int_0^T (u'_\mu(t),w_j)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes y de la convergencia $u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ en $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, se obtiene.

$$-(u_\mu(0),w_j)-\int_0^T (u_\mu(t),w_j)\theta'(t)dt \to -(u(0),w_j)-\int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt.$$

Luego

$$(u_\mu(0),w_j)\to(u(0),w_j),\ \forall j\in\mathbb{N}.$$

Por la densidad de (w_j) en $L^2(\Omega)$ resulta $u_\mu(0)\rightharpoonup u(0)$ en $L^2(\Omega)$.

Por otro lado, del problema aproximado, tenemos

$$u_\mu(0)\rightharpoonup u_0 \text{ en } L^2(\Omega).$$

De la unicidad de límite, se concluye

$$u(0)=u_0.$$

Para $0<\delta<T$, consideremos la función

$$\theta_\delta(t)=\begin{cases} -\dfrac{t}{\delta}+1 & \text{si } 0\le t\le\delta,\\ 0 & \text{si } \delta<t\le T.\end{cases}$$

que pertenece a $H_0^1(0,T)$. Multiplicando la ecuación aproximada (2.38) por θ e integrando desde 0 hasta T, se obtiene

$$\int_0^T (u''_\mu(t),w_j)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (\nabla u_\mu(t),\nabla w_j)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (\alpha(\cdot)u_\mu(t),w_j)\theta_\delta(t)dt$$
$$+\int_0^T (f(u_\mu(t)),w_j)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (a(\cdot)g(u'_\mu(t)),w_j)\theta_\delta(t)dt=0.$$

Teniendo en cuenta la densidad de los elementos de la base (w_j) en $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y las convergencias (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37), se obtiene que para todo $v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ se cumple

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (\nabla u(t),\nabla v)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (\alpha(\cdot)(u(t),v)\theta_\delta(t)dt$$
$$+\int_0^T (f(u(t)),v)\theta_\delta(t)dt+\int_0^T (a(\cdot)g(u'(t)),v)\theta_\delta(t)dt=0.$$

Integrando por partes la primera integral resulta

$$-(u_1,v)+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u''(t),v)dt+\int_0^\delta(\nabla u(t),\nabla v)\theta_\delta(t)dt+\int_0^\delta(\alpha(\cdot)u(t),v)\theta_\delta(t)dt$$
$$+\int_0^\delta (f(u(t)),v)\theta_\delta(t)dt+\int_0^\delta(a(\cdot)g(u'(t)),v)\theta_\delta(t)dt=0.$$

Cuando $\delta\to 0$, se obtiene

$$(u_1,v)=(u'(0),v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^2(\Omega);$$

es decir,

$$u'(0)=u_1.$$

3. Unicidad de la solución regular. En esta sección demostramos la unicidad de la solución regular. Sean u y v dos soluciones regulares del problema (1.1) – (1.3), considerando $w=u-v$ tenemos que w cumple el siguiente problema:

$$\begin{cases} w''-\Delta w+\alpha(x)w+f(u)-f(v)+a(x)\left(g(u')-g(v')\right)=0 & \text{en } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\ w=0 & \text{en } \Gamma\times[0,+\infty[,\\ w(x,0)=w_t(x,0)=0, & x\in\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Multiplicando la primera fila de (3.1) por w'

$$(w''(t),w'(t))+(-\Delta w(t),w'(t))+(\alpha(\cdot)w(t),w'(t))+(f(u(t))-f(v(t)),w'(t))$$
$$+\left(a(\cdot)\left(g(u'(t))-g(v'(t)\right),w'(t)\right)=0.$$

Por hipótesis (c) de (H3) y $a\in L_+^\infty(\Omega)$ se obtiene

$$(w''(t),w'(t))+(-\Delta w(t),w'(t))+(\alpha(\cdot)w(t),w'(t))+(f(u(t))-f(v(t)),w'(t))\le 0.$$

Integrando sobre Ω obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(|w'|^2_{L^2(\Omega)}+|\alpha^{1/2}(\cdot)w|^2_{L^2(\Omega)}+|\nabla w|^2_{L^2(\Omega}\right)\le 2\int_\Omega |f(u(t))-f(v(t))||w'|dx. \tag{3.2}$$

De la integral del segundo miembro de (3.2) y de la hipótesis (H2), se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u)-f(v)||w'|dx &\le C\int_\Omega\left(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)|u-v||w'|dx\\ &=C\int_\Omega\left(1+|u|^{p-1}+|v|^{p-1}\right)|w||w'|dx\\ &=C\left(\int_\Omega|w||w'|dx+\int_\Omega|u|^{p-1}|w||w'|dx+\int_\Omega|v|^{p-1}|w||w'|dx\right).\end{aligned}$$

Como $\dfrac{p-1}{2p}+\dfrac{1}{2p}+\dfrac{1}{2}=1$, por la desigualdad de Hölder generalizada se tiene:

$$\int_\Omega |f(u)-f(v)||w'|dx\le C\left(|w||w'|+|u|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|w|_{L^{2p}(\Omega)}|w'|+|v|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}|w|_{L^{2p}(\Omega)}|w'|dx\right).$$

De la inmersión de Sobolev $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ y desigualdad de Poincaré resulta

$$\int_\Omega |f(u)-f(v)||w'|dx\le C_{20}(1+m(t))|\nabla w||w'|,$$

donde $m(t)=|u|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}+|v|^{p-1}_{L^{2p}(\Omega)}$.

Usando la desigualdad $2ab\le a^2+b^2$ se obtiene

$$\int_\Omega |f(u)-f(v)||w'|dx\le \widehat{C}(1+m(t))\left(|\nabla w|^2+|w'|\right). \tag{3.3}$$

De las desigualdades (3.2) y (3.3) se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(|w'(t)|^2+|\nabla w(t)|^2+|\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2\right)\le \widehat{C}(1+m(t))\left(|\nabla w(t)|^2+|w'(t)|^2\right).$$

Integrando desde 0 hasta t se tiene

$$|w'(t)|^2+|\nabla w(t)|^2+|\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2\le \widehat{C}\int_0^t(1+m(t))\left(|\nabla w|^2+|w'|^2\right)dt.$$

Por la desigualdad de Gronwall, resulta

$$|w'(t)|^2+|\nabla w(t)|^2+|\alpha^{1/2}(\cdot)w(t)|^2\le 0,$$

para todo $t\in[0,T]$, lo que demuestra que

$$w(t)\equiv 0 \text{ en } H_0^1(\Omega)\ \ \forall t\in[0,T].$$

Por tanto, $u=v$, es decir, la solución regular es única.

4. Conclusión. Para datos, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ y $u_1\in H_0^1(\Omega)$, se obtiene solución regular para la ecuación de la onda semilineal con disipación localizada. Además con las hipótesis mencionadas en el trabajo, se obtiene unicidad de la solución regular.

Por otro lado, el método de Faedo-Galerkin es en general el más apropiado para cualquier tipo de ecuaciones en derivadas parciales elípticas e hiperbólicas ya sea que tengan términos lineales y no lineales, como en nuestro caso que se tiene un término localmente disipativo no lineal $a(x)g(u_t)$.

ORCID and License

Carlos Alberto Peña Miranda https://orcid.org/0000-0002-4339-4615
Alfonso Pérez Salvatierra https://orcid.org/0000-0001-9944-4020

Referencias

[1] Coddington E, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: Mac Graw-Hill; 1955.
[2] Lions JL. Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod; 1969.
[3] Lions JL, Magenes E. Problémes aux Limites nom Homogens et Applications. Vol 1. Paris: Dumod; 1968.
[4] Milla M. Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos. Vol 28. Rio de Janeiro: IM-UFRJ; 1994.
[5] Nakao M. A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations. J. Math. Soc. Japan. 1978; 30(4):747-762.
[6] Nakao M. Decay estimate of the solutions to the initial – boundary value problem for the wave equation with a dissipation. Israel J. Mathematics. 1996; 95:25-42.
[7] Peña C, Pérez A, Guardia A. Decaimiento exponencial de la ecuación de onda semilineal con disipación localizada. Pesquimat. 2013; 16(1):19-34.
[8] Zuazua E. Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems. Asymptotic Analysis. 1988; 1(2):161-185.
[9] Zuazua E. Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. Comm. Partial Differential Equations. 1990; 15(2):205-235.
[10] Zuazua E. Exponential decay for the semilinear wave equations, with localized Damping in Unbounded Domains. J. Math. Pures Appl. 1991; 70(4):513-529.