Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
2022; Vol. 9(2): 258-274.

Geometry of 2×2 matrix curves

Geometría de las curvas matriciales 2×2

Víctor Arturo Martínez León[*], Newton Mayer Solórzano Chávez[†], Alexis Rodríguez Carranza[‡] and Karen Liseth Gaviria Rojas[§]

Received, Jul. 09, 2022 *Accepted, Set. 23, 2022*

How to cite this article:
Martínez León V. et al. *Geometry of* 2×2 *matrix curves*. Selecciones Matemáticas. 2022;9(2):258–274. http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2022.02.04

Abstract

In this work, we study the geometry of 2×2 order matrix curves with real coefficients. We use the Gram-Schmidt orthogonalization process to generate a convenient moving benchmark. Thus, we obtain the Frenet-Serret formulas. We present a version of the fundamental theorem of 2×2 matrix curves.

Keywords. Matrix curves, Gram-Schmidt orthogonalization process, Frenet-Serret formulas, fundamental theorem of curves.

Resumen

En este trabajo, estudiamos la geometría de las curvas matriciales de orden 2×2 con coeficientes reales. Usamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para generar un referencial móvil conveniente. Así, obtenemos las fórmulas de Frenet-Serret. Presentamos una versión del teorema fundamental de las curvas matriciales de orden 2×2.

Palabras clave. Curvas matriciales, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, fórmulas de Frenet-Serret, teorema fundamental de las curvas.

1. Introducción. Fundamentalmente, la geometría diferencial clásica de curvas es el estudio de las propiedades locales de las curvas en el plano y en el espacio. Para ser mas específico, las propiedades locales determinan el comportamiento de una curva en una vecindad de un punto. Podemos pensar en una curva como un camino que marca el camino que un objeto hace al viajar en el espacio. La estructura principal de la curva que queremos considerar es su forma. Pueden surgir preguntas de la siguiente naturaleza: ¿La curva en consideración es recta o doblada?, ¿Cuan doblada es su curvatura? ¿Ellas pueden ser estudiadas en dimensiones superiores?. Esenciales para el estudio de las curvas espaciales son las ecuaciones de Frenet, que en el caso tridimensional usan curvatura y torsión para expresar las derivadas de los tres campos vectoriales $\{t, n, b\}$ que componen el cuadro de Frenet en términos de los propios campos vectoriales. Podemos hacer un estudio análogo para dimensión cuatro. Existen varias perspectivas a partir de las cuales una curva del espacio puede ser estudiada. Imagine el rastro que un ciclista puede dejar para atrás en una estrada lodosa. Podemos llamar ese camino de curva en dos dimensiones. Mas coloquialmente, una curva puede ser pensada como un viaje hecho por una partícula en movimiento. Las formas mas comunes de parametrizar tal viaje seria en función del tiempo o de la distancia recorrida. Para nuestros propósitos, es conveniente estudiar curvas mediante el lente de la longitud de arco. Y, una vez que estamos apenas preocupados en

[*]Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza - ILACVN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA, Foz do Iguaçu - Paraná, Brasil. (victor.leon@unila.edu.br).
[†]Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza - ILACVN, Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA, Foz do Iguaçu - Paraná, Brasil. (nmayer159@gmail.com).
[‡]Instituto de Investigación en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú. (alrodriguezca@unitru.edu.pe).
[§]Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território - ILATIT, Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA, Foz do Iguaçu - Paraná, Brasil. (karengaviria36@gmail.com).

analizar la forma de la curva del espacio, podemos dejar de considerar la velocidad de la partícula a la medida que ella completa su camino. Para simplificar, podemos felizmente forzar la partícula a moverse a lo largo de su camino en velocidad unitaria. A pesar de que inicialmente podamos imaginar una curva semejante a las marcaciones que hacemos con un lápiz en una hoja de papel plana, tal plano no es la única superficie donde residen las curvas. Las partículas pueden moverse y formar curvas en prácticamente cualquier superficie. En verdad, si nuestro ciclista en nuestra ilustración pedaleó una distancia significativa, la curva resultante del rastro formado en el lodo seria mas identificable con una curva esférica, una vez que nuestro planeta es esférico. Curvas en superficies variadas pueden ser caracterizadas y sus comportamientos resultantes estudiados.

En este trabajo estudiamos la geometría de las curvas en el conjunto de matrices 2×2 con coeficientes reales aprovechando el producto interno de Frobenius y llevando en consideración el isomorfismo entre $\mathbb{R}^4$ y el espacio de las matrices 2×2 con coeficientes reales. Mas específicamente, definimos una noción de regularidad (ver Subsección 3.1) la cual nos ayuda a utilizar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para generar un referencial móvil conveniente (ver Subsección 3.2). Así, obtenemos las fórmulas de Frenet-Serret (ver Teorema 3.1). Finalizamos, presentando una versión del teorema fundamental de las curvas matriciales de orden 2×2 (ver Teorema 3.3).

2. Preliminares.

2.1. Nociones de espacios con producto interno.

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial real. Un **producto interno** en V es una función que asocia, para cada par ordenado de vectores x y y en V, un número real, denotado por $\langle x, y\rangle$, tal que para todo $x,\ y,\ z \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica lo siguiente:

(a) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$, (b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,

(c) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, (d) $\langle x, x\rangle \neq 0$ si $x \neq 0$.

Ejemplo 2.1. Sea $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ y definamos

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}(B^t A)$$

para todo $A,\ B \in V$. Es fácil ver que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define un producto interno en V. Este producto interno es llamado **producto interno de Frobenius**.

Un espacio vectorial real V con un producto interno especifico es llamado **espacio con producto interno**.

Teorema 2.1 (Teorema 6.1 en [4]). Sea V un espacio con producto interno. Entonces para $x,\ y,\ z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son satisfechas:

(a) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, (b) $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,

(c) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, (d) $\langle x, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$.

(e) Si $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in V$ entonces $y = z$.

Definición 2.2. Sea V un espacio con producto interno. Para $x, y \in V$, definimos la **norma o longitud** de x por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ y la **distancia** entre x y y por $\|x - y\|$.

Ejemplo 2.2. Sea $V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $A \in V$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2}$$

es un norma en $\mathbb{R}^{n\times n}$ llamada **norma de Frobenius**.

Teorema 2.2 (Teorema 6.2 en [4]). Sea V un espacio con producto interno. Entonces para todo $x,\ y \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes afirmaciones:

(a) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
(b) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$. En cualquier caso, $\|x\| \geq 0$.
(c) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**).
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Desigualdad triangular**).

Definición 2.3. Sea V un espacio con producto interno. Dos vectores $x, y \in V$ son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$. Un subconjunto S de V es **ortogonal** si para cualesquier dos vectores distintos en S ellos son ortogonales. Un vector $x \in V$ es un **vector unitario** si $\|x\| = 1$. Finalmente, un subconjunto S de V es **ortonormal** si S es ortogonal y consiste enteramente de vectores unitarios.

Teorema 2.3 (Teorema 6.3 en [4]). Sea V un espacio con producto interno y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un subconjunto ortogonal de V consistiendo de vectores no nulos. Si $y \in \langle S \rangle$, entonces

$$y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle y, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Corolario 2.1 (Corolario 1 del Teorema 6.3 en [4]). Con las hipótesis del Teorema 2.3, si S es ortonormal y $y \in \langle S \rangle$, entonces

$$y = \sum_{i=1}^{k} \langle y, v_i \rangle v_i.$$

Teorema 2.4 (Teorema 6.4 en [4]). Sea V un espacio con producto interno y $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de V. Defina $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, donde $v_1 = w_1$ y

$$v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j, \quad \text{para } k = 2, 3, \ldots, n.$$

Entonces S' es un conjunto ortogonal de vectores no nulos tal que $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. La construcción de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ usada en la demostración del Teorema 2.4 es llamada **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**.

2.2. Nociones de cálculo matricial. Denotemos

$$I_{m,n} = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 1 \leq i \leq m \ \text{ y } \ 1 \leq j \leq n\}.$$

Una función definida en un intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^{m \times n}$ es llamada **función matricial**

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & J & \to & \mathbb{R}^{m \times n} \\ & t & \mapsto & \Phi(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \ldots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}(t)]. \end{array}$$

En virtud del isomorfismo de $\mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbb{R}^{mn}$ cualquier función matricial pode ser observada como una curva en $\mathbb{R}^{mn}$

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & J & \to & \mathbb{R}^{mn} \\ & t & \mapsto & (a_{11}(t), a_{12}(t), \ldots, a_{1n}(t), \ldots, a_{m1}(t), a_{m2}(t), \ldots, a_{mn}(t)). \end{array}$$

Así, dada una función matricial $\Phi(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{mn}$ queda automáticamente determinada una colección de mn funciones reales de variable real a_{ij} llamadas funciones coordenadas de Φ. Observe que $a_{ij} : J \to \mathbb{R}$ para todo $(i, j) \in I_{m,n}$. Las propiedades comunes a estas funciones coordenadas, caracterizan las propiedades de la función matricial Φ.

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función real y $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}^{m \times n}$ funciones matriciales definidas en un intervalo entonces $\Phi + \Psi,\ f\Phi$ y $\langle \Phi, \Psi \rangle$ (aquí $m = n$) son funciones definidas de la forma usual, es decir, para todo $t \in I$

- $(\Phi + \Psi)(t) = \Phi(t) + \Psi(t)$;
- $(f\Phi)(t) = f(t)\Phi(t)$;
- $\langle \Phi, \Psi \rangle(t) = \langle \Phi(t), \Psi(t) \rangle$ (cuando $m = n$) donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de Frobenius.

Definición 2.4. Sea $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m \times n}$ una función matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in J$. Si $t_0 \in J$, decimos que la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el **limite de** $\Phi(t)$ **cuando** t **tiende a** t_0, que denotamos por

$$\lim_{t \to t_0} \Phi(t) = A \ \text{ si, y sólo si, } \ \lim_{t \to t_0} a_{ij}(t) = a_{ij}, \quad \text{para todo } (i, j) \in I_{m,n}.$$

Las reglas usuales del álgebra de limites se satisfacen para funciones matriciales, ver ejercicio 21 en [1]. La continuidad de funciones matriciales se definen también en relación a sus funciones coordenadas.

Definición 2.5. Sea $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$ una función matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in J$. Decimos que Φ es **continua** en $t_0 \in J$ si, y sólo si, cada a_{ij} es continua en t_0 para todo $(i,j) \in I_{m,n}$.

Definición 2.6. Sea $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$, donde J es un intervalo abierto. Decimos que Φ es **diferenciable** en $t_0 \in J$ si, y sólo si, existe el siguiente limite:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}[\Phi(t) - \Phi(t_0)].$$

En caso afirmativo, denotamos por $\Phi'(t_0)$ al limite anterior.

Proposición 2.1 (Proposición 1.4.1 en [1]). Sea $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$, donde J es un intervalo abierto tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in J$. Φ es diferenciable en $t_0 \in J$ si, y sólo si, a_{ij} es diferenciable en t_0, para todo $(i,j) \in I_{m,n}$. En caso afirmativo, se satisface que $\Phi'(t_0) = [a'_{ij}(t_0)]$.

Decimos que la función matricial $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$ es de clase C^1 en intervalo J si, y sólo si, Φ es diferenciable en J y la función derivada Φ' es continua en J. Procediendo por inducción, decimos que Φ es de clase C^k ($k > 1$) en el intervalo J si, y sólo si, $\Phi^{(k-1)}$ es diferenciable en J y la función derivada k-ésima $\Phi^{(k)}$ es continua en J. Una función matricial Φ es llamada **diferenciable de clase** C^∞ si existen las derivadas de todos los ordenes de Φ.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\Phi, \Psi : I \to \mathbb{R}^{m\times n}$ funciones matriciales diferenciables definidas en un intervalo entonces $\Phi + \Psi,\ f\Phi$ y $\langle\Phi, \Psi\rangle$ (aquí $m = n$) son funciones diferenciables y

- $(\Phi + \Psi)'(t) = \Phi'(t) + \Psi'(t)$;
- $(f\Phi)'(t) = f(t)\Phi'(t) + f'(t)\Phi(t)$;
- $\langle\Phi, \Psi\rangle'(t) = \langle\Phi'(t), \Psi(t)\rangle + \langle\Phi(t), \Psi'(t)\rangle$ (cuando $m = n$) donde $\langle\cdot, \cdot\rangle$ denota el producto interno de Frobenius.

Sea $\Phi : I \to \mathbb{R}$ una función matricial diferenciable y $f : J \to I$ función real diferenciable. Entonces la función compuesta $(\Phi \circ f)(t) = \Phi(f(t))$ es diferenciable en J y

$$(\Phi \circ f)'(t) = \Phi'(f(t))f'(t).$$

Definición 2.7. Sea $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ una función matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in [a,b]$. Decimos que Φ es **integrable** en $[a,b]$ si, y sólo si, cada a_{ij} es integrable en $[a,b]$. En caso afirmativo, se tiene que

$$\int_a^b \Phi(t)dt = \left[\int_a^b a_{ij}(t)dt\right].$$

Naturalmente muchas de las reglas del cálculo diferencial e integral que conocemos pueden ser extendidas al cálculo matricial.

2.3. Nociones de curvas en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2.8. Una **curva parametrizada diferenciable** de $\mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable α, de clase C^∞, de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. La variable $t \in I$ es el **parámetro de la curva**, y el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de los puntos $\alpha(t)$, $t \in I$, es llamado **trazo** de la curva.

Observación 2.1. Una curva parametrizada diferenciable de $\mathbb{R}^3$ es una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ que para cada t asocia $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde las funciones x, y, z son diferenciables de clase C^∞.

Definición 2.9. Una curva parametrizada diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es llamada **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Definición 2.10. Una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está **parametrizada por la longitud de arco** si $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$.

Definición 2.11. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por la longitud de arco, entonces la **curvatura** de α en $s \in I$ es el número real

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Es conocido, que si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco, y tal que $k(s) > 0$ para todo $s \in I$, entonces el conjunto $\{t(s), n(s), b(s)\}$, donde

$$t(s) = \alpha'(s),\ n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)},\ b(s) = t(s) \times n(s),$$

es un referencial ortonormal llamado **triedro de Frenet** el cual satisface las denominadas **fórmulas de Frenet**:

$$
\begin{aligned}
t'(s) &= k(s)n(s), \\
n'(s) &= -k(s)t(s) - \tau(s)b(s), \\
b'(s) &= \tau(s)n(s),
\end{aligned}
$$

donde $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$ llamada **torsión**.

A seguir enunciamos uno de los resultados mas importantes de la teoría de curvas en $\mathbb{R}^3$ la cual nos dice que la curvatura y la torsión determinan la geometría de una curva.

Teorema 2.5 (Teorema fundamental das curvas, Teorema 6.15 en [6]).

(a) Dadas dos funciones diferenciables, $k(s) > 0$ y $\tau(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe una curva regular $\alpha(s)$ parametrizada por la longitud de arco, tal que $k(s)$ es la curvatura y $\tau(s)$ es la torsión de α en s.

(b) La curva $\alpha(s)$ es única si fijamos un punto $\alpha(s_0) = p_0$, $\alpha'(s_0) = v_1$, $\alpha''(s_0) = k(s_0)v_2$, donde v_1 y v_2 son vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$.

(c) Si dos curvas $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ tienen la misma curvatura y torsión (a menos del signo), entonces α y β son congruentes.

3. Curvas matriciales de orden 2×2.

3.1. Curvas regulares de orden m.

Definición 3.1. Una **curva parametrizada diferenciable** de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es una función matricial α, de clase C^∞, de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. La variable $t \in I$ es llamada **parámetro de la curva**, y el subconjunto de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de los puntos $\alpha(t)$, $t \in I$, es llamado **trazo** de la curva.

Observación 3.1. Una curva parametrizada diferenciable de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que para cada $t \in I$ asocia una matriz 2×2 de la forma $\alpha(t) = [\alpha_{ij}(t)]$, donde las componentes $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ son funciones diferenciables de clase C^∞.

Análogo a las rectas en $\mathbb{R}^n$ de la forma $\alpha(t) = P + tQ$, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 (Recta). La aplicación

$$
\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0^{11} + t\alpha_{11} & \alpha_0^{12} + t\alpha_{12} \\ \\ \alpha_0^{21} + t\alpha_{21} & \alpha_0^{22} + t\alpha_{22} \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R},
$$

donde $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 \neq 0$ es una curva parametrizada diferenciable de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, cuyo trazo es una "linea recta" pasando por el punto $\begin{pmatrix} \alpha_0^{11} & \alpha_0^{12} \\ \\ \alpha_0^{21} & \alpha_0^{22} \end{pmatrix}$ y "paralela" al vector de coordenadas $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Sea $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) \end{pmatrix}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, una curva parametrizada diferenciable de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. El **vector tangente** a α en $t \in I$ es definido como siendo el vector

$$
\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'_{11}(t) & \alpha'_{12}(t) \\ \alpha'_{21}(t) & \alpha'_{22}(t) \end{pmatrix}.
$$

Definición 3.2. Una curva parametrizada diferenciable α de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es llamada **regular de orden** m si el conjunto de m-vectores $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \ldots, \alpha^{(m)}(t)\}$ son linealmente independientes para todo $t \in I$.

Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos, $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ curvas parametrizadas diferenciables. Decimos que α y β son equivalentes si existe una biyección $h : J \to I$ diferenciable C^∞, con $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$ y tal que $\beta = \alpha \circ h$. En estas condiciones, decimos que β es una **reparametrización** de α por h. La función h es llamada **cambio de parámetro**.

Observe que, si β es una reparametrización de α por h, entonces α es una reparametrización de β por h^{-1}. La **orientación** de una curva regular α es el sentido del recorrido del trazo de α. Una reparametrización α de β tiene orientación igual (resp. opuesta) a la de α si el cambio de parámetro es estrictamente creciente (resp. decreciente).

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$. Para dos puntos $t_0 \leq t_1$ de I fijos, la **longitud del arco** de la curva α de t_0 a t_1 es dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de Frobenius. La **función longitud de arco** de la curva α a partir de t_0 es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(s)\| ds, \quad t \geq t_0.$$

Una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es llamada **parametrizada por la longitud del arco** si el vector tangente es unitario, es decir, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$.

Proposición 3.1. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ y $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$ la función longitud de arco de α a partir de t_0. Entonces, existe la función inversa h de s, definida en el intervalo abierto $J = s(I)$, y $\beta = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α, donde β está parametrizada por la longitud del arco.

Demostración: Como α es una curva regular de orden $m \geq 1$ entonces $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Luego $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, es decir, s es una función estrictamente creciente. De ahí existe una función inversa de s, $h : J \to I$. Ahora como $h(s(t)) = t$ tenemos que

$$h'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0.$$

Concluimos que $\beta = \alpha \circ h$ es una reparametrización de α y

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(s(t))s'(t)\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = 1.$$

Por lo tanto, β está parametrizada por la longitud del arco. □

La aplicación β de la Proposición 3.1 es llamada **reparametrización de α por la longitud de arco**.

La Proposición 3.1 nos dice que toda curva regular de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ puede ser reparametrizada por la longitud de arco, fijando un $t_0 \in I$. Por lo tanto, podemos suponer que una curva regular está parametrizada por la longitud de arco para fines de estudios geométricos.

Definición 3.3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ parametrizada por la longitud de arco. La **primera curvatura** de α en $s \in I$ es el número real $k_1(s)$ definido por

$$k_1(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Proposición 3.2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ parametrizada por la longitud de arco. Entonces, $\alpha(I)$ es un "segmento de recta" si, y sólo si, $k_1(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Demostración: Supongamos que $\alpha(I)$ es un "segmento de recta" parametrizada por la longitud de arco, entonces $\alpha(s) = P + sA_0$, donde $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y A_0 es un vector unitario de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Por lo tanto,

$$\alpha'(s) = A_0 \quad \text{y} \quad \alpha''(s) = O$$

para todo $s \in I$. Se sigue que $k_1(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$. Recíprocamente, si $\|\alpha''(s)\| = 0$ para todo $s \in I$, entonces $\alpha''(s) = O$ para todo $s \in I$, de ahí integrando dos veces en relación a s y considerando que $\alpha'(t)$ sea unitario, tenemos que existen dos matrices constantes $A_0, P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\alpha(s) = P + sA_0$, donde A_0 es una matriz unitaria. □

Definición 3.4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ parametrizada por la longitud de arco tal que $k_1(s) > 0$. El vector

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k_1(s)}$$

es denominado **vector normal** a α en s. Denotando por $t(s) = \alpha'(s)$, el denominado **vector tangente** a α en s, tenemos que $t(s)$ y $n(s)$ son vectores ortonormales y

$$t'(s) = k_1(s)n(s). \tag{3.1}$$

Proposición 3.3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden m $(m \geq 1)$ de curvatura k_1 no nula. Si α es una curva plana (contenida en un subespacio de dimensión dos), entonces α está contenida en un plano generado por $t(s)$ y $n(s)$.

Demostración: Podemos suponer $\alpha(s)$ parametrizada por la longitud de arco. Como α es una curva plana, entonces existe un plano de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene $\alpha(I)$. Sean v_1, v_2 vectores constantes, linealmente independientes y ortogonales a este plano. Probaremos que v_1 y v_2 son ortogonales a $t(s)$ y $n(s)$ para todo $s \in I$. Fijando $s_0 \in I$, entonces para todo $s \in I$, y $i = 1, 2$,

$$\langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v_i \rangle = 0,$$

Derivando, tenemos

$$\langle \alpha'(s), v_i \rangle = 0, \quad \langle \alpha''(s), v_i \rangle = 0,$$

por lo tanto,

$$\langle t(s), v_i \rangle = 0, \quad k_1(s)\langle n(s), v_i \rangle = 0.$$

Como $k_1(s) > 0$, concluimos que el plano generado por $t(s)$ y $n(s)$ no depende de s y contiene $\alpha(I)$. □

3.2. Fórmulas de Frenet-Serret. A seguir definiremos una base ortonormal en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Para esto, debemos suponer primeramente que la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es regular de orden 4. Motivados por la base móvil de Frenet-Serret para vectores en el espacio euclidiano (ver Capítulo 2 en [3]) la cual es obtenida usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (ver Teorema 2.4) en los vectores $\alpha'(s),\ \alpha''(s),\ \alpha'''(s)$ y $\alpha^{(iv)}(s)$.

Definición 3.5. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden 4. El conjunto $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$, donde

$$t(s) = \alpha'(s), \qquad n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k_1(s)},$$

$$b_1(s) = \frac{\alpha'''(s) - \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)}{\|\alpha'''(s) - \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)\|} \tag{3.2}$$

y

$$b_2(s) = \frac{\alpha^{(iv)}(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), n(s)\rangle n(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), b_1(s)\rangle b_1(s)}{\|\alpha^{(iv)}(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), n(s)\rangle n(s) - \langle \alpha^{(iv)}(s), b_1(s)\rangle b_1(s)\|}.$$

es llamada **base móvil de Frenet-Serret** de α en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Los vectores b_1 y b_2 son llamados **vector binormal** y **vector trinormal** respectivamente.

El siguiente teorema nos dá las expresiones de las derivadas de la base móvil en función de la propia base construida arriba.

Teorema 3.1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden 4 parametrizada por la longitud de arco, entonces los elementos de la base móvil de Frenet-Serret satisfacen las denominadas **fórmulas de Frenet-Serret**:

$$\begin{aligned}
t'(s) &= k_1(s)n(s),\\
n'(s) &= -k_1(s)t(s) + k_2(s)b_1(s),\\
b_1'(s) &= -k_2(s)n(s) + k_3(s)b_2(s),\\
b_2'(s) &= -k_3(s)b_1(s),
\end{aligned}$$

donde k_1, k_2, k_3 son llamadas primera, segunda y tercera curvatura respectivamente, y son dadas por $k_1 = \langle t', n\rangle = \|\alpha''\|$, $k_2 = \langle n', b_1\rangle$ y $k_3 = \langle b_1', b_2\rangle$.

Demostración: Como $\alpha''(s) = k_1(s)n(s)$ derivando obtenemos

$$n'(s) = \frac{\alpha'''(s)}{k_1(s)} - \frac{k_1'(s)}{k_1(s)}n(s). \tag{3.3}$$

Por otro lado, de (3.2) tenemos que

$$\alpha'''(s) = \theta(s)b_1(s) + \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) + \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle n(s), \tag{3.4}$$

donde

$$\theta(s) = \|\alpha'''(s) - \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)\|.$$

Note que de (3.3) y (3.4) verificamos que $n'(s)$ es independiente del vector trinormal $b_2(s)$. En seguida, mostraremos también que $n'(s)$ no depende del vector normal $n(s)$. En efecto, derivando la identidad $k_1^2(s) = \|\alpha''(s)\|^2$ en relación a s, tenemos

$$\langle \alpha'''(s), n(s)\rangle = k_1'(s),$$

luego, de (3.3), concluimos que la componente normal de $n'(s)$ es nula. Siendo $\alpha''(s)$ perpendicular a $t(s)$, tenemos que

$$\langle \alpha'''(s), t(s)\rangle = -\langle \alpha''(s), t'(s)\rangle = -k_1^2(s),$$

luego, de (3.3), la componente tangencial de $n'(s)$ es $-k_1(s)$. Así, $n'(s)$ puede ser escrito como,

$$n'(s) = -k_1(s)t(s) + k_2(s)b_1(s). \tag{3.5}$$

Como $b_1'(s)$ es combinación lineal de $t(s)$, $n(s)$, $b_1(s)$, $b_2(s)$ y por el Corolario 2.1 tenemos que

$$b_1'(s) = \langle b_1'(s), t(s)\rangle t(s) + \langle b_1'(s), n(s)\rangle n(s) + \langle b_1'(s), b_1(s)\rangle b_1(s) + \langle b_1'(s), b_2(s)\rangle b_2(s).$$

Ahora por (3.1), (3.5) y por el hecho de que $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ ser una base ortonormal se tiene

$$\langle b_1'(s), b_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle b_1'(s), t(s)\rangle = -\langle b_1(s), t'(s)\rangle = -\langle b_1(s), k_1(s)n(s)\rangle = 0,$$

$$\langle b_1'(s), n(s)\rangle = -\langle b_1(s), n'(s)\rangle = -k_2(s),$$

luego

$$b_1'(s) = -k_2(s)n(s) + k_3(s)b_2(s). \tag{3.6}$$

Como $b_2'(s)$ es combinación lineal de $t(s)$, $n(s)$, $b_1(s)$, $b_2(s)$ y por el Corolario 2.1 tenemos que

$$b_2'(s) = \langle b_2'(s), t(s)\rangle t(s) + \langle b_2'(s), n(s)\rangle n(s) + \langle b_2'(s), b_1(s)\rangle b_1(s) + \langle b_2'(s), b_2(s)\rangle b_2(s).$$

Ahora por (3.1), (3.5), (3.6) y por el hecho de que $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ ser una base ortonormal se tiene

$$\langle b_2'(s), b_2(s)\rangle = 0,$$

$$\langle b_2'(s), t(s)\rangle = -\langle b_2(s), t'(s)\rangle = -\langle b_2(s), k_1(s)n(s)\rangle = 0,$$

$$\langle b_2'(s), n(s)\rangle = -\langle b_2(s), n'(s)\rangle = -\langle b_2(s), -k_1(s)t(s) + k_2(s)b_1(s)\rangle = 0,$$

por lo tanto, $b_2'(s) = -k_3(s)b_1(s)$. $\square$

Observe que en el teorema anterior, por construcción de la base, las curvaturas k_1, k_2 y k_3 son no nulas.

Ejemplo 3.2. Consideremos la curva parametrizada por la longitud de arco

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{as}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & \operatorname{sen}\left(\dfrac{as}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ \\ \cos\left(\dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) & \operatorname{sen}\left(\dfrac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R},$$

donde $0 < b < a$. Denotemos $c_2 = \sqrt{a^2+b^2}$, $c_4 = \sqrt{a^4+b^4}$ y $c_6 = \sqrt{a^6+b^6}$. Calculando las derivadas podemos obtener la base móvil de Frenet-Serret y las curvaturas:

$$t(s) = \frac{1}{c_2}\begin{pmatrix} -a\operatorname{sen}\left(\dfrac{as}{c_2}\right) & a\cos\left(\dfrac{as}{c_2}\right) \\ \\ -b\operatorname{sen}\left(\dfrac{bs}{c_2}\right) & b\cos\left(\dfrac{bs}{c_2}\right) \end{pmatrix}, \quad n(s) = \frac{1}{c_4}\begin{pmatrix} -a^2\cos\left(\dfrac{as}{c_2}\right) & -a^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{as}{c_2}\right) \\ \\ -b^2\cos\left(\dfrac{bs}{c_2}\right) & -b^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{bs}{c_2}\right) \end{pmatrix},$$

$$b_1(s) = \frac{1}{c_2}\begin{pmatrix} b\,\mathrm{sen}\left(\frac{as}{c_2}\right) & -b\cos\left(\frac{as}{c_2}\right) \\ \\ -a\,\mathrm{sen}\left(\frac{bs}{c_2}\right) & a\cos\left(\frac{bs}{c_2}\right)\end{pmatrix},\ b_2(s) = \frac{1}{c_4}\begin{pmatrix} b^2\cos\left(\frac{as}{c_2}\right) & b^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{as}{c_2}\right) \\ \\ -a^2\cos\left(\frac{bs}{c_2}\right) & -a^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{bs}{c_2}\right)\end{pmatrix},$$

$$k_1(s) = \frac{c_4}{c_2^2},\ k_2(s) = \frac{ab(a^2-b^2)}{c_4c_2^2} \quad \text{y} \quad k_3(s) = \frac{ab}{c_4}.$$

3.3. Isometrias en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Definición 3.6. Una aplicación $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una **isometria** de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ si F preserva distancias, es decir, para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$\|F(P) - F(Q)\| = \|P - Q\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma de Frobenius.

Ejemplo 3.3.

(a) La transformación identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es una isometria.

(b) Sea A un punto fijo de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. La aplicación $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que, para cada $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, asocia $T(P) = A + P$ es una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, denominada **traslación** por A.

(c) Consideremos la aplicación F que, a cada punto $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix}$, asocia

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta & x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z\cos\gamma - w\,\mathrm{sen}\,\gamma & z\,\mathrm{sen}\,\gamma + w\cos\gamma\end{pmatrix},$$

donde $0 < \theta, \gamma < 2\pi$ son fijos. Entonces, F es una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(d) La aplicación definida por $F\begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -w\end{pmatrix}$ es una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, denominada aplicación **antípoda**.

Proposición 3.4.

(a) Si F y G son isometrias de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $F \circ G$ es una isometria.

(b) Si F y G son traslaciones, entonces $F \circ G = G \circ F$ es una traslación.

(c) Si T es una traslación por A, entonces T^{-1} es invertible y T^{-1} es una traslación por $-A$.

(d) Dados dos puntos A y B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, existe una única traslación T tal que $T(A) = B$.

Demostración: La prueba es idéntica a la Proposición 6.3 en [6]. □

Definición 3.7. Una **transformación ortogonal** de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es una aplicación lineal $C : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que preserva el producto interno, es decir,

$$\langle C(P), C(Q)\rangle = \langle P, Q\rangle,\ \forall P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Note que el Ejemplo 3.3 (a), (c) y (d) son transformaciones ortogonales.

Observación 3.2. Una transformación ortogonal C de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, siendo una aplicación linear, satisface las siguientes propiedades:

- $C(O) = O$.
- C es diferenciable y la diferencial de C en cualquier punto $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ coincide con C, es decir, $dC_P(V) = C(V)$.

Proposición 3.5. Toda transformación ortogonal es un isomorfismo y una isometria.

Demostración: Sea $C : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una transformación ortogonal. Sea $P \in \mathrm{Nu}(F)$ de ahí tenemos que

$$0 = \langle C(P), C(P)\rangle = \langle P, P\rangle$$

entonces $P = O$. Concluimos que C es inyectiva y por el Teorema 2.5 en [4] tenemos que C es un isomorfismo. Ahora mostremos que C es una isometria. Como C es una aplicación lineal y preserva el producto interno, tenemos que, $\forall\ P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$\begin{aligned} \|C(P) - C(Q)\|^2 &= \|C(P-Q)\|^2 = \langle C(P-Q), C(P-Q)\rangle \\ &= \langle P-Q, P-Q\rangle = \|P-Q\|^2. \end{aligned}$$

Concluimos que $\|C(P) - C(Q)\| = \|P - Q\|$, es decir, C es una isometria. □

Proposición 3.6. Si $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una isometria tal que $F(O) = O$, entonces F es una transformación ortogonal.

Demostración: Primeramente, mostremos que F preserva el producto interno. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Como consecuencia de las propiedades de producto interno y el hecho que F es una isometria con $F(O) = O$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle F(P), F(Q)\rangle &= \frac{1}{2}[\|F(P)\|^2 + \|F(Q)\|^2 - \|F(P) - F(Q)\|^2] \\ &= \frac{1}{2}[\|P\|^2 + \|Q\|^2 - \|P-Q\|^2] = \langle P, Q\rangle. \end{aligned}$$

Resta mostrar que F es una aplicación lineal, es decir,

$$F(aP + bQ) = aF(P) + bF(Q),$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Como F preserva el producto interno, tenemos que

$$\begin{aligned} \|F(aP+bQ) - aF(P) - bF(Q)\|^2 =& \|aP+bQ\|^2 + a^2\|P\|^2 + b^2\|Q\|^2 - 2a\langle aP+bQ, P\rangle \\ &- 2b\langle aP+bQ, Q\rangle + 2ab\langle P, Q\rangle \\ =& \|aP+bQ-aP-bQ\|^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. Si $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una isometria, entonces, existe una única traslación T y una única transformación ortogonal C, tal que $F = T \circ C$.

Demostración: Existencia: Sea T una traslación por $F(O)$, entonces por la Proposición 3.4 tenemos que T^{-1} es la traslación por $-F(O)$ y la aplicación compuesta $T^{-1} \circ F$ es una isometria. Como

$$(T^{-1} \circ F)(O) = T^{-1}(F(O)) = F(O) - F(O) = O,$$

por la Proposición 3.6, $T^{-1} \circ F$ es una transformación ortogonal que denotamos por C. Por lo tanto,

$$F = T \circ (T^{-1} \circ F) = T \circ C.$$

Unicidad: Sean T y $\overline{T}$ traslaciones, C y $\overline{C}$ transformaciones ortogonales tales que $F = T \circ C = \overline{T} \circ \overline{C}$. Entonces, $C = (T^{-1} \circ \overline{T}) \circ \overline{C}$ y como $C(O) = \overline{C}(O) = O$ tenemos que $T^{-1} \circ \overline{T})(O) = O$. Se sigue de la Proposición 3.4 que $T^{-1} \circ \overline{T}$ es la traslación por O, es decir, $T^{-1} \circ \overline{T} =$ identidad, luego $\overline{T} = T$. Por lo tanto, $T \circ C = T \circ \overline{C}$. Consecuentemente $C = \overline{C}$. □

Ejemplo 3.4.

(a) La aplicación

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & 2+y \\ -z & 3+w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

es una isometria y $F = T \circ C$, donde T es una traslación por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y C es una transformación ortogonal $C\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -z & w \end{pmatrix}$.

(b) La aplicación

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z & 4-y \\ 7 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z & 2+w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

es una isometria y $F = T \circ C$, donde T es una traslación por $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ y C es una transformación ortogonal $C\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z & -y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z & w \end{pmatrix}$.

Observe que, si $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una función diferenciable, entonces, para cada $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, la diferencial de F en P es una aplicación lineal $dF_P : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$dF_P(V) = \frac{d}{dt}\Big(F(P+tV)\Big)\Big|_{t=0}.$$

Proposición 3.7. Con la notación anterior, sea $F = T \circ C$ una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces F es diferenciable y $\forall P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $dF_P(V) = C(V)$.

Demostración: Como T y C son diferenciables entonces F es diferenciable. Si T es una traslación por A, entonces

$$F(P+tV) = (T \circ C)(P+tV) = A + C(p+tV) = A + C(P) + tC(V).$$

Por lo tanto,

$$dF_P(V) = \frac{d}{dt}\Big(A + C(P) + tC(V)\Big)\Big|_{t=0} = C(V).$$

□

Corolario 3.1. Si F es una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $\forall P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dF_P preserva el producto interno, es decir,

$$\langle dF_P(V), dF_P(W)\rangle = \langle V, W\rangle, \ \ \forall\, V, W \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Proposición 3.8. Sean A y B puntos de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, V_1, V_2, V_3, V_4 y W_1, W_2, W_3, W_4 referenciales ortonormales de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces, existe una única isometria F de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $F(A) = B$ y $dF_A(V_i) = W_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Demostración: Existencia: Por el Teorema 2.6 em [4], existe $C : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ aplicación lineal, tal que $C(V_i) = W_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, como $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ existen $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$P = \sum_{i=1}^{4} a_i V_i \quad \text{y} \quad Q = \sum_{j=1}^{4} b_j V_j.$$

Ahora, usando el hecho de que $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ y $\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ son bases ortonormales tenemos que

$$\begin{aligned} \langle C(P), C(Q)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{4} a_i C(V_i), \sum_{j=1}^{4} b_j C(V_j)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{4} a_i b_j \langle C(V_i), C(V_j)\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{4} a_i b_j \langle W_i, W_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{4} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^{4} a_i b_j \langle V_i, V_j\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{4} a_i V_i, \sum_{j=1}^{4} b_j V_j\right\rangle = \langle P, Q\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos que C preserva el producto interno. Por lo tanto, C es una transformación ortogonal. Sea T la traslación por $B - C(A)$. Entonces, la isometria $F = T \circ C$ satisface las condiciones exigidas. En efecto,

$$F(A) = (T \circ C)(A) = T(C(A)) = C(A) + (B - C(A)) = B,$$

y por la Proposición 3.7, tenemos

$$dF_A(V_i) = C(V_i) = W_i, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Unicidad: Supongamos que $F = T \circ C$ y $\overline{F} = \overline{T} \circ \overline{C}$ satisfacen las condiciones de la proposición, es decir,

$$F(A) = \overline{F}(A) = B \quad \text{y} \quad dF_A(V_i) = d\overline{F}_A(V_i) = W_i.$$

De la última relación obtenemos que $C(V_i) = \overline{C}(V_i) = W_i$. Por el Corolario del Teorema 2.6 en [4], tenemos que $C = \overline{C}$. Por lo tanto, $T \circ C(A) = \overline{T} \circ C(A) = B$, es decir, T y $\overline{T}$ son traslaciones que llevan $C(A)$ en B. Concluimos de la Proposición 3.4 que $T = \overline{T}$, por lo cual $F = \overline{F}$. □

Definición 3.8. Dos curvas regulares de orden 4, $\alpha,\ \beta : I \to \mathbb{R}^3$ son **congruentes** si existe una isometria F de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\beta = F \circ \alpha$.

Proposición 3.9. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una curva regular de orden 4 parametrizada por la longitud de arco con $k_1(s) > 0,\ \forall s \in I$ y F una isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces la función $\overline{\alpha} = F \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una curva regular de orden 4 parametrizada por la longitud de arco con curvaturas $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3$ y base móvil $\{\overline{t}, \overline{n}, \overline{b}_1, \overline{b}_2\}$ dadas por

$$\overline{k}_1(s) = k_1(s),\ \overline{k}_2(s) = k_2(s),\ \overline{k}_3(s) = k_3(s),$$

$$\overline{t}(s) = dF_{\alpha(s)}(t(s)),\ \overline{n}(s) = dF_{\alpha(s)}(n(s)),\ \overline{b}_1(s) = dF_{\alpha(s)}(b_1(s)),\ \overline{b}_2(s) = dF_{\alpha(s)}(b_2(s)),$$

donde k_1, k_2, k_3 y $\{t, n, b_1, b_2\}$ son las curvaturas y base móvil de α, respectivamente.

Demostración: Como F y α son diferenciables tenemos que $\overline{\alpha}$ es diferenciable. Ademas, tenemos que

$$\overline{\alpha}^{(i)}(s) = dF_{\alpha(s)}(\alpha^{(i)}(s)),\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.7}$$

Luego, por la inyectividad de $dF_{\alpha(s)}$ y el Teorema 3.1 em [5], obtenemos que $\{\overline{\alpha}'(s), \overline{\alpha}''(s), \overline{\alpha}'''(s), \overline{\alpha}^{(iv)}(s)\}$ es un conjunto linealmente independiente. Por la ortogonalidade de la transformación $dF_{\alpha(s)}$, tenemos

$$\|\overline{\alpha}'(s)\| = \|dF_{\alpha(s)}(\alpha'(s))\| = \|\alpha'(s)\| = 1.$$

Por lo tanto, $\overline{\alpha}$ es parametrizada por la longitud de arco. De (3.7) tenemos que

$$\overline{t}(s) = dF_{\alpha(s)}(t(s)).$$

Como $dF_{A(s)}$ es linear, preserva el producto interno y por (3.7), obtenemos que

$$\overline{k}_1(s) = \|\overline{\alpha}''(s)\| = \|dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))\| = \|\alpha''(s)\| = k_1(s),$$

$$\overline{n}(s) = \frac{\overline{\alpha}''(s)}{\overline{k}_1(s)} = \frac{dF_{\alpha(s)}(\alpha''(s))}{k_1(s)} = dF_{\alpha(s)}\left(\frac{\alpha''(s)}{k_1(s)}\right) = dF_{\alpha(s)}(n(s)),$$

$$\begin{aligned}\overline{b}_1(s) =& \frac{dF_{\alpha(s)}(\alpha'''(s)) - \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle dF_{\alpha(s)}(t(s)) - \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle dF_{\alpha(s)}(n(s))}{\|\alpha'''(s) - \langle \alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle \alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)\|}\\ =& dF_{\alpha(s)}(b_1(s)),\end{aligned}$$

así,

$$\overline{k}_2(s) = \langle \overline{n}'(s), \overline{b}_1(s)\rangle = \langle dF_{\alpha(s)}(n'(s)), dF_{\alpha(s)}(b_1(s))\rangle = \langle n'(s), b_1(s)\rangle = k_2(s).$$

$$\overline{b}_2(s) = dF_{\alpha(s)}(b_2(s)),$$

finalmente,

$$\overline{k}_3(s) = \langle \overline{b}_1'(s), \overline{b}_2(s)\rangle = \langle dF_{\alpha(s)}(b_1'(s)), dF_{\alpha(s)}(b_2(s))\rangle = \langle b_1'(s), b_2(s)\rangle = k_3(s).$$

□

3.4. Teorema fundamental de las curvas en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Teorema 3.3. [Teorema Fundamental de las curvas en $\mathbb{R}^{2\times 2}$]

(a) Si $k_1, k_2, k_3 : I \to \mathbb{R}$ son tres funciones de clase C^∞ con $k_1(s), k_2(s), k_3(s) > 0$, para todo $s \in I$, existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ parametrizada por la longitud de arco, tal que $k_1(s)$ es la primera curvatura, $k_2(s)$ es la segunda curvatura y $k_3(s)$ es a tercera curvatura de α en s para todo $s \in I$.

(b) La curva α del item (a) es única si fijamos un punto $P_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y vectores ortonormales V_1, V_2, V_3, V_4 con las siguientes condiciones,

$$\begin{aligned}
\alpha(s_0) = P_0,\ \alpha'(s_0) = V_1,\ \alpha''(s_0) = k_1(s_0)V_2,\\
\alpha'''(s_0) = -k_1^2(s_0)V_1 + k_1'(s_0)V_2 + k_1(s_0)k_2(s_0)V_3,\\
\alpha^{(iv)}(s_0) = -3k_1(s_0)k_1'(s_0)V_1 + (-k_1^3(s_0) + k_1''(s_0) - k_1(s_0)k_2^2(s_0))V_2\\
+(2k_1'(s_0)k_2(s_0) + k_1(s_0)k_2'(s_0))V_3 + k_1(s_0)k_2(s_0)k_3(s_0)V_4.
\end{aligned}$$

(c) Si dos curvas $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ parametrizadas por la longitud de arco tienen la misma primera curvatura, segunda curvatura y tercera curvatura, entonces α y β son congruentes.

Demostración: Vamos iniciar probando (c). La idea es considerar una isometria F conveniente y la curva $\overline{\alpha} = F \circ \alpha$ que es congruente a α, en seguida probar que $\overline{\alpha} = \beta$. Fijemos $s_0 \in I$. Usaremos los índices α y β para indicar la curva a la cual se refiere la primera curvatura, segunda curvatura, etc. Por la Proposición 3.8 existe F isometria de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$ y

$$dF_{\alpha(s_0)}(t_\alpha(s_0)) = t_\beta(s_0),\ dF_{\alpha(s_0)}(n_\alpha(s_0)) = n_\beta(s_0),$$

$$dF_{\alpha(s_0)}(b_{1\alpha}(s_0)) = b_{1\beta}(s_0),\ dF_{\alpha(s_0)}(b_{2\alpha}(s_0)) = b_{2\beta}(s_0).$$

Sea $\overline{\alpha} = F \circ \alpha$, denotemos por $\overline{k}_1, \overline{k}_2$, etc, la primera curvatura, segunda curvatura, etc, relativos a la curva $\overline{\alpha}$. Se sigue de la Proposición 3.9 y de la F escogida que

$$\overline{\alpha}(s_0) = \beta(s_0),\ \ \overline{t}(s_0) = t_\beta(s_0),\ \ \overline{k}_1 = k_{1\alpha} = k_{1\beta},\ \overline{n}(s_0) = n_\beta(s_0),\ \ \overline{k}_2 = k_{2\alpha} = k_{2\beta},$$

$$\overline{b}_1(s_0) = b_{1\beta}(s_0),\ \ \overline{k}_3 = k_{3\alpha} = k_{3\beta},\ \ \overline{b}_2(s_0) = b_{2\beta}(s_0).$$

Para probar que $\overline{\alpha} = \beta$, basta mostrar que $\overline{t} = t_\beta$, pues en este caso tendremos $\overline{\alpha}(s) - \beta(s)$ constante y, como $\overline{\alpha}(s_0) = \beta(s_0)$, podremos concluir que $\overline{\alpha}(s) = \beta(s),\ \forall s \in I$. Consideremos la función $f : I \to \mathbb{R}$, que a cada $s \in I$ asocia

$$f(s) = \|\overline{t}(s) - t_\beta(s)\|^2 + \|\overline{n}(s) - n_\beta(s)\|^2 + \|\overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s)\|^2 + \|\overline{b}_2(s) - b_{2\beta}(s)\|^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f'(s) &= 2\langle \overline{t}'(s) - t_\beta'(s), \overline{t}(s) - t_\beta(s)\rangle + 2\langle \overline{n}'(s) - n_\beta'(s), \overline{n}(s) - n_\beta(s)\rangle\\
&\quad +2\langle \overline{b}_1'(s) - {b_1}_\beta'(s), \overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s)\rangle + 2\langle \overline{b}_2'(s) - {b_2}_\beta'(s), \overline{b}_2(s) - b_{2\beta}(s)\rangle\\
&= 2\overline{k}_1\langle \overline{n}(s) - n_\beta(s), \overline{t}(s) - t_\beta(s)\rangle - 2\overline{k}_1\langle \overline{t}(s) - t_\beta(s), \overline{n}(s) - n_\beta(s)\rangle\\
&\quad +2\overline{k}_2\langle \overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s), \overline{n}(s) - n_\beta(s)\rangle - 2\overline{k}_2\langle \overline{n}(s) - n_\beta(s), \overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s)\rangle\\
&\quad +2\overline{k}_3\langle \overline{b}_2(s) - b_{2\beta}(s), \overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s)\rangle - 2\overline{k}_3\langle \overline{b}_1(s) - b_{1\beta}(s), \overline{b}_2(s) - b_{2\beta}(s)\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es constante. Como $f(s_0) = 0$, tenemos $f \equiv 0$ y, consecuentemente, $\overline{t} = t_\beta$.

Ahora mostremos (a). Para probar la existencia de α mostraremos primero que existe un referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ que satisface las fórmulas de Frenet-Serret.

Por el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales (ver Teorema 6 de la Sección 7 del Capítulo 6 en [2] o ver Teorema 4.2.3 en [1]) tenemos que, fijados

$$t(s_0) = \begin{pmatrix} t_{11}(s_0) & t_{12}(s_0) \\ t_{21}(s_0) & t_{22}(s_0) \end{pmatrix}, \; n(s_0) = \begin{pmatrix} n_{11}(s_0) & n_{12}(s_0) \\ n_{21}(s_0) & n_{22}(s_0) \end{pmatrix},$$

$$b_1(s_0) = \begin{pmatrix} (b_1)_{11}(s_0) & (b_1)_{12}(s_0) \\ (b_1)_{21}(s_0) & (b_1)_{22}(s_0) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_2(s_0) = \begin{pmatrix} (b_2)_{11}(s_0) & (b_2)_{12}(s_0) \\ (b_2)_{21}(s_0) & (b_2)_{22}(s_0) \end{pmatrix},$$

el sistema de dieciséis ecuaciones diferenciales, $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned} t'_{ij}(s) &= k_1(s) n_{ij}(s), \\ n'_{ij}(s) &= -k_1(s) t_{ij}(s) + k_2(s)(b_1)_{ij}(s), \\ (b_1)'_{ij}(s) &= -k_2(s) n_{ij}(s) + k_3(s)(b_2)_{ij}(s), \\ (b_2)'_{ij}(s) &= -k_3(s)(b_1)_{ij}(s), \end{aligned} \tag{3.8}$$

posee una única solución con las condiciones iniciales dadas. En particular, existe una única solución $t_{ij}, n_{ij}, (b_1)_{ij}, (b_2)_{ij}$, $i, j = 1, 2$ del sistema (3.8) cuando fijamos

$$t(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; n(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b_1(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_2(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Vamos probar ahora que la solución $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ para todo $s \in I$. Para esto, consideremos las funciones

$$\langle t(s), t(s)\rangle, \; \langle n(s), n(s)\rangle, \; \langle b_1(s), b_1(s)\rangle, \; \langle b_2(s), b_2(s)\rangle, \; \langle t(s), n(s)\rangle,$$

$$\langle t(s), b_1(s)\rangle, \; \langle t(s), b_2(s)\rangle, \; \langle n(s), b_1(s)\rangle, \; \langle n(s), b_2(s)\rangle, \; \langle b_1(s), b_2(s)\rangle,$$

que satisfacen el sistema de diez ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle t(s), t(s)\rangle &= 2k_1(s)\langle t(s), n(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle n(s), n(s)\rangle &= -2k_1(s)\langle t(s), n(s)\rangle + 2k_2(s)\langle n(s), b_1(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle b_1(s), b_1(s)\rangle &= -2k_2(s)\langle n(s), b_1(s)\rangle + 2k_3(s)\langle b_1(s), b_2(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle b_2(s), b_2(s)\rangle &= -2k_3(s)\langle b_1(s), b_2(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle t(s), n(s)\rangle &= -k_1(s)\langle t(s), t(s)\rangle + k_1(s)\langle n(s), n(s)\rangle + k_2(s)\langle t(s), b_1(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle t(s), b_1(s)\rangle &= k_1(s)\langle n(s), b_1(s)\rangle - k_2(s)\langle t(s), n(s)\rangle + k_3(s)\langle t(s), b_2(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle t(s), b_2(s)\rangle &= k_1(s)\langle n(s), b_2(s)\rangle - k_3(s)\langle t(s), b_1(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle n(s), b_1(s)\rangle &= -k_1(s)\langle t(s), b_1(s)\rangle + k_2(s)\langle b_1(s), b_1(s)\rangle - k_2(s)\langle n(s), n(s)\rangle + k_3(s)\langle n(s), b_2(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle n(s), b_2(s)\rangle &= -k_1(s)\langle t(s), b_2(s)\rangle + k_2(s)\langle b_1(s), b_2(s)\rangle - k_3(s)\langle n(s), b_1(s)\rangle,\\
\frac{d}{ds}\langle b_1(s), b_2(s)\rangle &= -k_2(s)\langle n(s), b_2(s)\rangle + k_3(s)\langle b_2(s), b_2(s)\rangle - k_3(s)\langle b_1(s), b_1(s)\rangle,
\end{aligned}
$$

con condición inicial:

$$\langle t(s_0), t(s_0)\rangle = \langle n(s_0), n(s_0)\rangle = \langle b_1(s_0), b_1(s_0)\rangle = \langle b_2(s_0), b_2(s_0)\rangle = 1,$$

y

$$\langle t(s_0), n(s_0)\rangle = \langle t(s_0), b_1(s_0)\rangle = \langle t(s_0), b_2(s_0)\rangle = \langle n(s_0), b_1(s_0)\rangle = \langle n(s_0), b_2(s_0)\rangle = \langle b_1(s_0), b_2(s_0)\rangle = 0.$$

La solución para ese sistema de ecuaciones diferenciables es única y es dada por las funciones:

$$\langle t(s), t(s)\rangle = \langle n(s), n(s)\rangle = \langle b_1(s), b_1(s)\rangle = \langle b_2(s), b_2(s)\rangle \equiv 1,$$

y

$$\langle t(s), n(s)\rangle = \langle t(s), b_1(s)\rangle = \langle t(s), b_2(s)\rangle = \langle n(s), b_1(s)\rangle = \langle n(s), b_2(s)\rangle = \langle b_1(s), b_2(s)\rangle \equiv 0.$$

En efecto, basta substituir estas funciones en el sistema de arriba para verificar que forman una solución del sistema.

Por lo tanto, la solución de (3.8) con la condición inicial (3.9) forma un referencial ortonormal. Definimos la curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} t(\xi)d\xi.$$

Como $\alpha'(s) = t(s)$, entonces α es una curva parametrizada por la longitud de arco s.

Afirmación 3.4. α es una curva regular de orden 4.

De hecho, primero observe que

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= t(s),\\
\alpha''(s) &= k_1(s)n(s),\\
\alpha'''(s) &= -k_1^2(s)t(s) + k_1'(s)n(s) + k_1(s)k_2(s)b_1(s),\\
\alpha^{(iv)}(s) &= -3k_1(s)k_1'(s)t(s) + (-k_1^3(s) + k_1''(s) - k_1(s)k_2^2(s))n(s)\\
&\quad +(2k_1'(s)k_2(s) + k_1(s)k_2'(s))b_1(s) + k_1(s)k_2(s)k_3(s)b_2(s).
\end{aligned}$$

Como $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ es un conjunto ortonormal, y siendo k_1, k_2 y k_3 no nulos, tenemos que el conjunto $\{\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{(iv)}(s)\}$ es linealmente independiente para todo $s \in I$.

También, se tiene

$$t_\alpha(s) = \alpha'(s) = t(s),$$

$$(k_1)_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \|k_1(s)t(s)\| = k_1(s),$$

$$n_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{(k_1)_\alpha(s)} = n(s),$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_\alpha(s) &= \frac{\alpha'''(s) - \langle\alpha'''(s), t_\alpha(s)\rangle t_\alpha(s) - \langle\alpha'''(s), n_\alpha(s)\rangle n_\alpha(s)}{\|\alpha'''(s) - \langle\alpha'''(s), t_\alpha(s)\rangle t_\alpha(s) - \langle\alpha'''(s), n_\alpha(s)\rangle n_\alpha(s)\|}\\
&= \frac{\alpha'''(s) - \langle\alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle\alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)}{\|\alpha'''(s) - \langle\alpha'''(s), t(s)\rangle t(s) - \langle\alpha'''(s), n(s)\rangle n(s)\|}\\
&= \frac{k_1(s)k_2(s)b_1(s)}{\|k_1(s)k_2(s)b_1(s)\|} = b_1(s),
\end{aligned}$$

$$(k_2)_\alpha(s) = \langle n_\alpha'(s), (b_1)_\alpha(s)\rangle = \langle n'(s), b_1(s)\rangle = k_2(s),$$

análogo al cálculo de $b_1(s)$, puede ser mostrado que

$$(b_2)_\alpha(s) = \frac{k_1(s)k_2(s)k_3(s)b_2(s)}{\|k_1(s)k_2(s)k_3(s)b_2(s)\|} = b_2(s)$$

así,

$$(k_3)_\alpha(s) = \langle (b_1)_A'(s), (b_2)_\alpha(s)\rangle = \langle b_1'(s), b_2(s)\rangle = k_3(s).$$

Finalmente, mostremos (b). Unicidad: Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dos curvas parametrizadas por la longitud de arco tales que

$$\begin{gathered}
(k_1)_\alpha = (k_1)_\beta = k_1,\ (k_2)_\alpha = (k_2)_\beta = k_2,\ (k_3)_\alpha = (k_3)_\beta = k_3,\\
\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P_0,\ \alpha'(s_0) = \beta'(s_0) = V_1,\ \alpha''(s_0) = \beta''(s_0) = k_1(s_0)V_2,\\
\alpha'''(s_0) = \beta'''(s_0) = -k_1^2(s_0)V_1 + k_1'(s_0)V_2 + k_1(s_0)k_2(s_0)V_3,\\
\alpha^{(iv)}(s_0) = \beta^{(iv)}(s_0) = -3k_1(s_0)k_1'(s_0)V_1 + (-k_1^3(s_0) + k_1''(s_0) - k_1(s_0)k_2^2(s_0))V_2\\
+(2k_1'(s_0)k_2(s_0) + k_1(s_0)k_2'(s_0))V_3 + k_1(s_0)k_2(s_0)k_3(s_0)V_4.
\end{gathered}$$

Entonces, $n_\alpha(s_0) = n_\beta(s_0) = V_2$, $(b_1)_\alpha(s_0) = (b_1)_\beta(s_0) = V_3$ y $(b_2)_\alpha(s_0) = (b_2)_\beta(s_0) = V_4$. Como $\{t_\alpha, n_\alpha, (b_1)_\alpha, (b_2)_\alpha\}$ y $\{t_\beta, n_\beta, (b_1)_\beta, (b_2)_\beta\}$ son soluciones del sistema (3.8) con condición inicial $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, tenemos que $\alpha = \beta$.

Existencia: Dados $P_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y V_1, V_2, V_3, V_4 vectores ortonormales, el sistema (3.8) tiene una única solución $\{t(s), n(s), b_1(s), b_2(s)\}$ con condición inicial $t(s_0) = V_1,\ n(s_0) = V_2,\ b_1(s_0) = V_3$ y $b_2(s_0) = V_4$. Note que

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} t(\xi)d\xi + P_0$$

es una curva parametrizada por la longitud de arco, con

$$\alpha(s_0) = P_0,\ t_\alpha(s) = t(s),\ n_\alpha(s) = n(s),\ (b_1)_\alpha(s) = b_1(s),\ (b_2)_\alpha(s) = b_2(s)$$

$$(k_1)_\alpha(s) = k_1(s),\ (k_2)_\alpha(s) = k_2(s) \quad \text{y} \quad (k_3)_\alpha(s) = k_3(s),$$

para todo $s \in I$. □

ORCID and License
Víctor Arturo Martínez León https://orcid.org/0000-0002-2082-6665
Newton Mayer Solórzano Chávez https://orcid.org/0000-0001-5492-2068
Alexis Rodríguez Carranza https://orcid.org/0000-0002-0290-165X
Karen Liseth Gaviria Rojas https://orcid.org/0000-0002-8783-9102

4. Conclusiones. Este trabajo estudio la geometría de las curvas matriciales de orden 2×2 con coeficientes reales. Usamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para generar un referencial móvil conveniente. Así, obtenemos las fórmulas de Frenet-Serret. Finalmente, probamos una versión del teorema fundamental de las curvas matriciales de orden 2×2.

Referencias

[1] Benazic R. Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Lima: UNI; 2007.
[2] Coddington EA. An introduction to ordinary differential equations. New York: Dover Publications; 1989.
[3] De Almeida Junior RV. Estimadores de curvaturas para curvas no $\mathbb{R}^4$. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro; 2011. Dissertação de mestrado.
[4] Friedberg SH, Insel AJ, Spence LE. Linear algebra. 4th ed. New Delhi: Pearson New International Edition; 2013.
[5] Lang S. Linear algebra. Undergraduate Texts in Mathematics. 3th ed. New York: Springer; 1987.
[6] Tenenblat K, Introdução à geometria diferencial. 2. ed. São Paulo: Blucher; 2008.