*Preparación de Artículos revista Vínculos: Ciencia, Tecnología y Sociedad*

*Fecha de envío: 31/08/2021*

*Fecha de recepción: 27/09/2021*

*Fecha de aceptación: 04/01/2022*

# Estructuras topológicas asociadas a una categoría

# Topological structures associated with a category

**Gil Alberto de Jesús Donado-Núñez[1], Jorge Adelmo Hernández-Pardo [2], José Reinaldo Montañez- Puentes[3]**

*A la memoria del Maestro Carlos Javier Ruiz Salguero*

**Resumen:** En este trabajo se hace una introducción a la topología categórica. En particular se muestran algunas propiedades de las categorías topológicas y un método de construcción a través de su clasificador universal $O_p : \overline{O}re \to Ore$, del que se hace un estudio detallado. Al final, haciendo uso del funtor $O_p$, se muestran categorías topológicas asociadas a categorías arbitrarias.

**Palabras clave:** Cribas, Funtor topológico, Subobjetos, Topologías finales, Topologías iniciales.

**Abstract:** An introduction to categorical topology is presented. In particular, we show some properties of topological categories and some construction methods of topological categories trougth the universal clasificator $O_p : \overline{O}re \to Ore$ of which a detailed study is made. In the end, using the functor $O_p$, topological categories associated with arbitrary categories are shown.

**Keywords:** Sieves, Topological funtor, Subobjets, Final topologies, Initial topologies.

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Correo electrónico: adonado@pedagogica.edu.co

[2] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Fundación Universidad Autónoma de Colombia, Colombia. Correo electrónico: jahernandezp@udistrital.edu.co

[3] Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Correo.electrónico: jrmontanezp@unal.edu.co

## 1. Introducción

La topología categórica aparece como un ambiente categórico de trabajo para los topólogos, inspirado en la topología. En particular las categorías topológicas son una generalización del estudio del funtor olvido de estructura definido de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en particular de las propiedades relacionadas con las topologías iniciales y finales que tiene dicho funtor. Es de anotar que la topología categórica inicia con Bourbaki y es en su primer libro en donde aparecen las nociones que la inspiran como son las de topologías iniciales y finales. Trabajos muy completos y más recientes se encuentran en Preuss G. [4] y Adamek, J., Herrlich, H.,y Strecker [1].

En este documento se presentan ejemplos de categorías topológicas y algunas de sus propiedades. Para citar algunos ejemplos, las categorías de las colecciones, de los espacios completamente regulares, de los espacios uniformes y los espacios de proximidad son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos.

Ahora bien, el funtor $O_p : \bar{O}re \rightarrow Ore$, construido por C. Ruiz [5], es un funtor topológico muy especial que, como veremos, permite la construcción de funtores topológicos. Es de anotar que no necesariamente la categoría base de una categoría topológica es la de los conjuntos, en particular haciendo uso del funtor $O_p$ veremos ejemplos de categorías topológicas fibradas sobre otras categorías, para citar algunos ejemplos las categorías de las cribas y de los subobjetos.

## 2. La Topología como inspiradora de Categorías Topológicas

En esta sección, resaltaremos en la categoría de los espacios topológicos, aquellas propiedades que utilizaremos para identificar a las categorías topológicas.

### 2.1. Top(X) como retículo completo

En los espacios topológicos, la colección de todas las topologías sobre un conjunto $X$, notada $Top(X)$, es un conjunto ordenado por la relación de contenencia. Este orden coincide con el definido por la relación "ser más fina" definida así:

“Dados los espacios topológicos $(X,\tau)$ y $(X,\mu)$ decimos que la topología $\tau$ es más fina que la topología $\mu$ lo cual se escribe $\mu \leq \tau$, si la función identidad $i:(X,\tau)\rightarrow(X,\mu)$ es continua”.

La relación $(\leq)$ dota al conjunto $Top(X)$ de estructura de retículo completo. En efecto en $Top(X)$ el ínfimo es la topología grosera y el máximo la topología discreta. Adicionalmente, dada cualquier colección $C$ de topologías sobre $X$, existen los extremos inferior y superior de la colección, que corresponden en el primer caso, a la intersección de las topologías de la colección y en el segundo a la topología generada por la reunión de las topologías de la colección.

### 2.2. Existencia de topologías iniciales

En la categoría de los espacios topológicos siempre es posible resolver el siguiente problema:

Dada una función $f : X \rightarrow Y$ y una topología $\mu$ sobre el conjunto $Y$, hallar en $Top(X)$ la menor topología (topología inicial) que hace continua a la función $f$.

En efecto, al menos, la topología discreta sobre $X$ hace continua a cualquier función, ahora por ser $Top(X)$ un retículo completo, es posible encontrar el extremo inferior de todas las topologías que hacen continua a la función $f$.

Para que $f$ sea continua, se requiere que para todo $M \in \mu$, $f^{-1}(M)$ sea un abierto. Si consideramos al conjunto $\tau = \{f^{-1}(B) : B \in \mu\}$, esta es una topología sobre $X$, y si $C = \{\rho \in Top(X) : f : (X,\rho) \rightarrow (Y,\mu)$, es continua$\}$ entonces $\tau = \{f^{-1}(B) : B \in \mu\} = infC$.

En particular, dados $X \subseteq Y$ y como función, la inclusión $i : X \rightarrow Y$ que asocia a cada elemento $x \in X$ al elemento $i(x) = x$, para cada topología $\mu \in Top(Y)$ la topología inicial está dada por $\tau = \{i^{-1}(B) : B \in \mu\} = \{B \cap X : B \in \mu\}$ la cual corresponde a la topología de subespacio.

Pero el mismo problema puede resolverse si en vez de una función y una topología sobre un conjunto $Y$, tenemos una familia de espacios topológicos $(Y_\lambda, \mu_\lambda)_{\lambda \in L}$ donde $L$ es un conjunto de índices y por cada $\lambda \in L$ una función $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, y se busca encontrar la topología menos fina (topología inicial ) sobre el conjunto $X$ que haga continua simultáneamente a todas las funciones.

Si para todo $\lambda \in L$ la función $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, debe ser continua, entonces para todo abierto $M \in \mu_\lambda$ el conjunto $f_\lambda^{-1}(M)$ debe ser un subconjunto abierto de $X$. Como el conjunto $\delta = \{f_\lambda^{-1}(M) : \lambda \in L \text{ y } M \in \mu_\lambda\}$ no necesariamente es una topología sobre $X$, al considerarla como una subbase para una topología sobre $X$, podemos garantizar que la topología $\tau$, generada por $\delta$, $\tau = <\delta>$, es la topología inicial asociada a la familia de funciones

$\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda \in L}$.

Si $(X, \tau)$ es la topología inicial asociada a la familia de funciones $\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda \in L}$ entonces es posible caracterizar a todas las funciones continuas que tienen como recorrido a $(X, \tau)$, debido a que cumple la siguiente propiedad universal:

Una función $f : Z \to X$ es continua, si y solo si, $f_\lambda \circ f$ es continua para cada $\lambda \in L$.

Un caso particular de topología inicial asociada a un par de funciones es la topología producto. En efecto, si consideramos dos espacios topológicos $(X, \tau)$ y $(Y, \mu)$ y las proyecciones $P_X((x, y)) = x$ y $P_Y((x, y)) = y$ definidas del producto cartesiano $X \times Y$ en los conjuntos $X$ e $Y$ respectivamente, una subbase para la topología inicial está dada por

$\delta = \{P_x^{-1}(M) : M \in \tau\} \cup \{P_y^{-1}(N) : N \in \mu\}$.

Esta construcción de estructuras iniciales no puede hacerse en cualquier categoría. Por ejemplo en la categoría de los grupos, dados un grupo $(G, *)$ y un conjunto no vacío $H$ y la función constante $k : H \to G$ definida por $k(x) = a$, donde $a \in G$ y $a \neq e$ ($e$ el módulo de $G$), no es posible dotar al conjunto $H$ de una operación $(\circ)$ para que $k$ sea un homomorfismo de grupos.

## 2.3. Existencia de topologías fínales

Con un razonamiento dual al realizado en la sección anterior, en los espacios topológicos siempre es posible resolver el siguiente problema:

Dada una función $f : X \to Y$ y una topología $\tau$ sobre el conjunto $X$, encontrar en $Top(Y)$ la mayor topología (topología final) que hace continua a la función $f$ .

En este caso, al menos, la topología grosera sobre $Y$ hace continua a cualquier función y por ser $Top(Y)$ un retículo completo, es posible encontrar el extremo superior al escoger como abiertos aquellos subconjuntos $M$ de $Y$ tales que $f^{-1}(M)$ sea un abierto de $(X, \tau)$.

Como el conjunto $\{M : f^{-1}(M) \in \tau\}$, es una topología sobre $Y$, se verifica que si $C = \{\rho \in Top(Y) : f : (X, \tau) \to (Y, \rho)$ es continua$\}$ entonces $\{M : f^{-1}(M) \in \tau\} = supC$.

Un ejemplo típico se presenta cuando sobre un conjunto $X$ se define una relación de equivalencia ($\equiv$). Esta relación define el conjunto cociente ($X/\equiv$) y la función canónica $f : X \to X/\equiv$ definida por $f(x) = [x]$. Si $\tau \in Top(X)$, la topología que hereda el espacio cociente es la topología final asociada a $f$, esto es $\tau = \{M : f^{-1}(M) \in \tau\}$ conocida como la topología cociente.

Podemos visualizarlo en un caso particular. Si se considera a $X$ como el subconjunto del plano definido por $[0,1] \times [0,1]$ y la relación de equivalencia que identifica los puntos de la forma $(1, y)$ con los de la forma $(0, 1-y)$ y los demás se identifican consigo mismo, se determina el espacio denominado Cinta de Moebius".

Nuevamente, si en vez de una función y una topología sobre el conjunto $X$, se considera una familia de espacios topológicos $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in L}$ donde $L$ es un conjunto de índices y por cada $\lambda \in L$ una función $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ , y se busca la topología más fina (topología final) sobre el conjunto $Y$ que haga continua simultáneamente a todas las funciones, se puede probar que es la topología $\tau = \{M \subseteq Y : f_\lambda^{-1}(M) \in \tau_\lambda$

para todo $\lambda \in L\}$.

Como en el caso de las topologías iniciales, la siguiente propiedad universal que cumple la topología final, permite caracterizar a todas las funciones continuas que tienen como dominio a $(Y, \tau)$, en el sentido de que una función $f : X \rightarrow Z$ es continua, si y solo si, $f \circ f_\lambda$ es continua para cada $\lambda \in L$.

Un ejemplo de una categoría donde no es posible hacer este tipo de construcciones se puede ver en la categoría *Met* de los espacios métricos con morfismos las funciones que son contracciones. En efecto, consideremos el espacio métrico usual de los números reales $R$ y al conjunto $X = \{0, 1, 2\}$. Una métrica $d$ sobre $X$ debe ser de la forma $d(0,0) = d(1,1) = d(2,2) = 0, d(1,2) = d(2,1) = a, d(1,0) = d(0,1) = b,$ $d(0,2) = d(2,0) = c$,donde $a, b$ y $c$ son números reales positivos sujetos a las condiciones $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ y $c \leq a + b$, es decir que $a, b$ y $c$ sean los lados de un triángulo.

Ahora consideremos la función la función $f : R \rightarrow X$ definida por $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x = 0$ y $f(x) = 2$ si $x < 2$. En tal caso tomando $x = \frac{a}{3}$ y $y = \frac{-a}{3}$ ,se debe tener que

$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2a}{3}$, es decir $a \leq \frac{2a}{3}$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, en la categoría *Met* mencionada no siempre es posible construir estructuras finales.

## 3. Noción de Categoría Topológica

**Definición 3.1.** *Sea* $F : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{D}$ *un funtor. Se dice que* $F$ *es un funtor topológico y que* C *es una categoría topológica relativa a* $F$ *y a* D*, si se cumplen las siguientes condiciones:*

*a)* *F es fiel.*

*b)* *F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.*

*c)* *Para cada objeto* $X \in \mathrm{D}$*, la fibra* $C(X) = \{A \in \mathrm{C} : F(A) \in \mathrm{D}\}$*, tiene estructura de retículo completo.*

A continuación, se discuten los elementos involucrados en la noción de funtor topológico. Ahora bien, es necesario advertir inicialmente que cuando no haya lugar a confusión, nos referiremos a la categoría topológica C sin mencionar al funtor $F$ y a la categoría D. En otras ocasiones diremos que $C$ es una categoría topológica sobre $D$ fibrada a través de $F$. Es de anotar que la definición de funtor topológico enunciada es equivalente a la dada en [1], probar esta equivalencia es un ejercicio propuesto en la misma referencia y su prueba se da en [2], allí se relaciona esta noción con la de constructo topológico dada en [4].

Antes de aclarar los conceptos involucrados en la noción de categoría topológica, para facilitar la comprensión de la definición, los objetos y morfismos de una categoría topológica los notaremos en negrilla y su imagen por el funtor los escribimos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos $\boldsymbol{f}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ simboliza una función continua y $f : X \rightarrow Y$ su función correspondiente en la categoría de los conjuntos.

Ahora bien, antes de empezar la discusión, es importante anotar que las nociones de estructura inicial y final generalizan la nociones de topología inicial y final y que el orden exigido en la fibra sobre cada objeto $X$ de D está dado por $\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{X}_2$, si y solamente si, existe $\mathbf{f} : \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{X}_1$ tal que $F(\boldsymbol{f}) = 1_X$.

Sea $F$ : C $\rightarrow$ D un funtor. Se dice que $F$ es fiel, si para todo par de morfismos $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ de C tales que, $F(\boldsymbol{f}) = F(\boldsymbol{g})$ se tiene que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$. Se dice que $F$ es pleno si para todo par de objetos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ de C y todo morfismo $k : X \rightarrow Y$ existe un morfismo $\boldsymbol{k}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ tal que $F(\boldsymbol{k}) = k$.

Sea $\boldsymbol{f}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ un morfismo de C. Se dice que $\boldsymbol{f}$ cumple la propiedad universal inicial relativa al funtor $F$ , si para, todo objeto $\mathbf{Z}$ de C, con $F(\boldsymbol{Z}) = Z$ y todo morfismo $g : Z \rightarrow X$, para el cual existe un morfismo $\boldsymbol{h}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ tal que $F(\boldsymbol{h}) = f \circ g$, existe un morfismo $\boldsymbol{g}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$ y $F(\boldsymbol{g}) = g$.

Un morfismo $f : X \to Y$ es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias si para, todo objeto $\mathbf{Y}$ de C, tal que, $F(\boldsymbol{Y})=Y$, existe un objeto $\mathbf{X}$ en C, con $F(\boldsymbol{X})=X$ y un morfismo $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ que cumple la propiedad universal inicial; en tal caso, se dice $\mathbf{X}$ es la estructura inicial relativa a $f$ y $\mathbf{Y}$ .

Se dice que $F$ es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias si todo morfismo de D es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias.

Sea $F : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ un funtor topológico. Una fuente relativa a $F$ está formada por una familia de morfismos $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$, junto con una familia de objetos $\{\boldsymbol{Y}_i\}_{i\in I}$ de C, tales que $F(\boldsymbol{Y}_i) = Y_i$ para cada $i \in I$, $I$ puede ser un conjunto o una clase y que notaremos $\{f_i : X \to \boldsymbol{Y}_i\}_{i\in I}$. Una estructura inicial para una fuente $\{f_i : X \to \boldsymbol{Y}_i\}_{i\in I}$, es un objeto $\mathbf{X}$ de C, tal que:

a) Para cada $i \in I$, existe un morfismo $\boldsymbol{f}_i : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}_i$ , tal que $F(\boldsymbol{f}_i) = f_i$.

b) Para cada objeto $\mathbf{Z}$ de C con $F(\boldsymbol{Z}) = Z$, y cada morfismo $h : Z \to X$, tal que para cada $i \in I$, existe un morfismo $\boldsymbol{k}_i : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}_i$ con $F(\boldsymbol{k}_i) = \boldsymbol{f}_i \circ h$, entonces existe un morfismo $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ con $F(\boldsymbol{h}) = h$.

Desarrollando el razonamiento dual, se define propiedad universal final y funtor apto para construcción de estructuras finales para un sumidero relativo a $F$ .

**Proposición 3.1.** *[1] Sea* $F : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *un funtor topológico.* C *es completa (cocompleta), si y solamente si,* D *es completa (cocompleta).*

**Proposición 3.2.** *[1] En una categoría topológica* C *toda fuente tiene estructura inicial y todo sumidero tiene estructura final.*

## 3.1. Ejemplos

### 1. La categoría de los espacios topológicos Top

Sea O : $Top \to Conj$ el funtor olvido definido por O$((X, \tau)) = X$, y O$(\mathbf{f}) = f$ . O es un funtor topológico y $Top$ una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos. Este es el ejemplo que motiva la definición de categoría topológica. En efecto, O es fiel, O es apto para construir estructuras iniciales de fuentes unitarias, debido a que para toda función $f : X \to Y$ y para todo objeto $\mathbf{Y} = (Y, \mu)$ de $Top$, tal que, $F(\mathbf{Y}) = Y$, existe un objeto $\mathbf{X}$ en $Top$ definido por $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, \tau)$ donde $\tau$ es la topología inicial asociada al espacio topológico $(Y, \mu)$ por la función $f$, la cual hace de $f$ un morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ con propiedad universal inicial, como se vio en la sección 2.

Similarmente O es apto para construir estructuras finales para sumideros unitarios, considerando topologías finales.

Finalmente, como lo anotamos en la sección anterior, para cada objeto $X \in Conj$ , la fibra $Top(X)$ es un retículo completo.

### 2. La categoría de las relaciones simétricas *Rels*

Antes de presentar la categoría *Rels* es necesario tener presente a la categoría de las relaciones *Rel*. Ahora bien, el par $(X, R)$, formado por un conjunto $X$ y una relación $R \subseteq X \times X$, es una relación binaria interna. Vemos la definición de la categoría *Rel*

*a)* $Obj(Rel)$ es la colección de relaciones binarias internas.

*b)* Para $A, B \in Obj(Rel)$, si $A = (X, R)$ y $B = (Y, S)$, la colección de morfismos está dada por $Mor(A, B) = \{f : A \to B \mid f \text{ respeta las relaciones}\}$, $f : A \to B$ respeta las relaciones, si y solo, si para todo $x, y \in X$, $(x, y) \in R \to (f(x), f(y)) \in S$.

*c)* Para $f \in Mor(A,B)$ y $g \in Mor(B,C)$, $A, B, C \in Obj(Rel)$, $g \circ f$ es la composición usual de funciones, para la cual se puede verificar que si dos funciones respetan las relaciones, la compuesta también lo hace, esto es, $g \circ f \in Mor(A,C)$ y que satisfacen:

i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para $h \in Mor(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$ y $f \in Mor(C,D)$.

ii) Para cada $A \in Obj(Rel)$, si $1_A(x) = x$, se tiene que $1_A$ respeta las relaciones y que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$ para cada $f \in Mor(A,B)$ y $g \in Mor(B,A)$.

La categoría de las relaciones simétricas *Rels*, es una subcategoría de *Rel*, donde los objetos son pares $(X, S)$, con $S \subseteq X \times X$, una relación simétrica. Esto es, para todo $x, y \in X$, si $(x,y) \in S$ entonces $(y,x) \in S$. Los morfismos *Rels* son como en la categoría *Rel*. El funtor olvido O : *Rels* $\rightarrow$ *Conj* definido por $O((X, S)) = X$, para cada $A = (X,S) \in Obj(Rels)$ y $O(\mathbf{f}) = f$ para cada $\mathbf{f} \in Mor(A,B)$; le da el carácter de categoría topológica a *Rels*.

## 3. La categoría de las colecciones *Col*

El par $(X, \alpha)$, formado por un conjunto $X$ y una colección $\alpha$ de subconjuntos de $X$, lo llamaremos un $\alpha$ - espacio.

En cada $\alpha$ - espacio $(X, \alpha)$, y para cada subconjunto $A$ de $X$, es posible asignarle su interior así:

$$A^{\circ} = \{x \in A : (\exists T \in \alpha)(x \in T \subseteq A)\}$$

Notaremos $\Lambda_\alpha$ a la colección formada por todos los conjuntos que coinciden con su interior, a quienes llamaremos abiertos, esto es:

$$\Lambda_\alpha = \{A \subseteq X : A = A^{\circ}\}$$

cabe resaltar que $\Lambda_\alpha$ es siempre estable por intersecciones y contiene al conjunto $\emptyset$.

*a)* $Obj(Col)$ es la colección de $\alpha$ - espacios.

b) Para $A, B \in Obj(Col)$, si $A = (X, \alpha)$ y $B = (Y, \beta)$, la colección de morfismos está dada por $Mor(A, B) = \{f : A \to B \mid f \text{ es continua}\}$.

$f : X \to Y$ es continua si y solo si $B \in \Lambda_\beta$ implica que $f^{-1}(B) \in \Lambda_\alpha$.

*d)* Para $f \in Mor(A,B)$ y $g \in Mor(B,C)$, $A,B$ y $C \in Obj(Col)$, $g \circ f$ es la composición usual de funciones, para la cual se puede verificar que como la compuesta de funciones continuas resulta ser continua, $g \circ f \in Mor(A,C)$ y que satisfacen:

i) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para $h \in Mor(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$ y $f \in Mor(C,D)$.

ii) Para cada $A \in Obj(Col)$, si $1_A(x) = x$, se tiene que $1_A$ es continua y que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$ para cada $f \in Mor(A, B)$ y $g \in Mor(B, A)$

El funtor olvido $\mathrm{O} : Col \to Conj$ definido por $\mathrm{O}((X, \alpha)) = X$, para cada $A = (X, \alpha) \in Obj(Col)$ y $\mathrm{O}(\mathbf{f}) = f$ para cada $\mathbf{f} \in Mor(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, le da el caracter a *Col* de categoría topológica. Un trabajo alrededor de la *Col* puede encontrarse en A. Donado [3].

## 4. La categoría de los espacios bornológicos B*or*

En el conjunto de los números reales R con su orden usual, la colección de sus subconjuntos acotados verifican las siguientes propiedades:

Los conjuntos unitarios son acotados, un subconjunto de un acotado es acotado. Y la unión finita de acotados es acotado. Este hecho motiva la noción de espacio bornológico.

**Definición 3.2.** *Una bornología sobre un conjunto $X$ es una colección* B *de subconjuntos de $X$, a los que se denominan acotados, que satisfacen los siguientes axiomas:*

*e)* $\{x\} \in \mathrm{B}$ *para todo* $x \in X$.

*f) Si* $A \in \mathcal{B}$ *y* $B \subset A$ *entonces* $B \in \mathcal{B}$.

*g) Si* $A, B \in \mathcal{B}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{B}$.

*Al par* $(X, \mathcal{B})$ *se le llama espacio bornológico.*

Una función acotada entre dos espacios bornológicos $(X, \mathcal{B}_X)$ y $(Y, \mathcal{B}_Y)$ es una función $f : X \rightarrow Y$ que envía acotados en acotados, esto es, para todo $A \in \mathcal{B}_X$ , $f(A) \in \mathcal{B}_Y$ . La composición de funciones acotadas es acotada y para cada espacio bornológico la función identidad es acotada.

Los espacios bornológicos y las funciones acotadas definen la categoría de los espacios bornológicos notada $\mathcal{B}or$.

De nuevo, el funtor olvido de $\mathcal{B}or$ en $Conj$ hace ver que $\mathcal{B}or$ es una categoría topológica.

## 4. La categoría Ore y el clasiftcador de las categorías topológicas

Un hecho importante en el estudio de las categorías topológicas es que cada una de ellas es construida a partir de un funtor topológico universal, $O_p : \widetilde{Ore} \rightarrow Ore$, del que haremos una completa descripción, no sin antes mencionar que este funtor fue presentado por el profesor Carlos Javier Ruiz S. en el VII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, evento realizado en la Universidad Pedagógica Nacional en el año 1992, [5] . En este trabajo se hace una descripción detallada de este funtor, que advertimos no aparece desarrollado completamente en la literatura.

### 4.1. El funtor olvido $O_p : Top \rightarrow Conj$ y su funtor asociado $F : Conj \rightarrow Top$

Veamos inicialmente como se recupera el funtor Olvido $O_p : Top \rightarrow Conj$.

Para cada conjunto $X$ consideremos el conjunto de topologías sobre $X$, $Top(X)$ el cual es un retículo completo. Dada una función $f : X \rightarrow Y$ consideremos el par adjunto $(s, d) : Top(X) \rightarrow Top(Y)$ donde $s(Y, \alpha)$ es la topología inicial para $f$ y $(Y, \alpha)$, $s(Y, \alpha)$ puede caracterizarse como $inf\ \{\tau : f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \alpha)$

$es\ \ continua\}$ de forma dual se define $d(X, \tau)$ como $sup\{\tau : f : (X,\tau) \rightarrow (Y,\alpha)\ es\ continua\}$.

En otras palabras, dada una función $f : X \rightarrow Y$, entre los retículos completos $Top(X)$ y $Top(Y)$ se determina el par adjunto $(s, d)$, $s$ adjunto a izquierda de $d$, donde $d : Top(X) \rightarrow Top(Y)$ se define a través de topologías finales y $s : Top(Y) \rightarrow Top(X)$ se define a través de topologías iniciales. Veamos que $s$ es adjunto a izquierda de $d$.

**1.** Supongamos $Y \leq d(X)$ y veamos que $s(Y) \leq X$.

a) Dados $f : X \rightarrow Y$ y $X$ sobre la fibra de $X$, se determina la topología final $d(X)$ tal que $f : X \rightarrow d(X)$ es continua.

b) Puesto que por hipótesis $d(X)$ y $Y$ son comparables, $d(X)$ y $Y$ están sobre la fibra de $Y$ y la función identidad $i : d(X) \rightarrow Y$ es continua.

c) De a y b se determina la función continua $iof : X \rightarrow d(X) \rightarrow Y$.

d) Ahora, dadas $f : X \rightarrow Y$ y $Y$, sobre la fibra de $Y$ se determina la topología inicial $s(Y)$ tal que$f : s(Y) \rightarrow Y$ es continua.

e) haciendo uso de c y d, $iof$ es continua, $iof : X \rightarrow Y$ y puesto que $s(Y)$ es la topología inicial, considerando$f : s(Y) \rightarrow Y$ por propiedad de la topología inicial se tiene que $i : X \rightarrow s(Y)$ es continua.

f) Por lo tanto $s(Y) \leq X$.

**2.** Supongamos que $s(Y) \leq X$ y veamos que $Y \leq d(X)$.

a) Dadas $f : X \rightarrow Y$ y $Y$ sobre la fibra de $Y$, se determina la topología inicial $s(Y)$ tal que $f : s(Y) \rightarrow X$ es continua.

b) Puesto que por hipótesis $s(Y)$ y $X$ son comparables, están sobre la fibra de $X$ y la función identidad $i : X \rightarrow s(Y)$ es continua.

c) De a y b se determina la función compuesta $foi : X \rightarrow Y$.

d) Ahora, dada $f : X \rightarrow Y$ y $X$ sobre la fibra de $X$ se determina la topología final $d(X)$ tal que $f : X \rightarrow$

$d(X)$ es continua.

e) Haciendo uso de c y d, $foi$ es continua, $foi : X \to Y$ y puesto que $d(X)$ es la topología final, considerando$f : X \to d(X)$ y dada $i : d(X) \to Y$ , puesto que $foi = f = iof$ es continua se tiene que $i : d(X) \to Y$ es continua.

f) Por lo tanto $Y \leq (X)$.

g) Ahora bien, nuevamente, dada $f : X \to Y$ esta determina un par adjunto $(s, d)$. Dados $(X, \tau)$ y $(Y, \alpha)$ si $s(\alpha)$ es la topología inicial para $f$, entonces la misma $f$, donde $f : (X, \tau) \to (Y, \alpha)$ es continua, si y solamente si, $s(\alpha) \leq \tau$ , en forma equivalente si la función de inclusión $i : \tau \to (X, s(\alpha))$ es continua. Es de anotar que de otro modo, $f$ es continua, si y solamente, si $\alpha \leq d(\tau)$ es decir $\alpha$ es menos fina que la estructura final para $f$ y $(X, \tau)$ o de otra forma $s(\alpha) \leq \tau$ es decir si $\tau$ está es mas fina que la estructura inicial par $f$ y $(Y, \alpha)$; obteniéndose de esta manera una caracterización de una función continua a través de topologías iniciales y finales.

Con el ánimo de generalizar esta situación podemos rescribir la pareja $(X, \tau)$ como $(Top(X), \tau)$y tener en mente que sobre el retículo completo Top $(X)$ se ha tomado una topología, de otro modo sobre el retículo completo $Top(X)$ se ha seleccionado un punto. De esta manera sobre el retículo completo $Top(X)$ se ha puesto una fibra formada por todas las parejas $(Top(X), \tau)$. Nótese que, intuitivamente se está diciendo que una función $f$ es continua si como función determina un par adjunto $(s, d)$ de tal manera que $s(\alpha) \leq \tau$ o $\alpha \leq d(\tau)$, es decir la función continua $f$ se identifica con un par adjunto especial. De nuevo, dada una función $f : X \to Y$ , esta determina un par adjunto $(s, d)$, pensando en que en la categoría de los retículos completos,$(s, d) : Top(X) \to Top(Y)$ es un morfismo, en la categoría de los retículos completos punteados, la pareja $(s, d) : Top(X, \tau) \to Top(Y, \alpha)$ es un morfismo, siempre y cuando $s(\alpha) \leq \tau$ o en forma equivalente $\alpha \leq d(\tau)$.

De una manera, un poco informal, todo esto se ha hecho pensando en reconstruir el funtor olvido $O : Top \to Conj$, a partir de un funtor $F$ de $Conj$ en $Top$, definido por $F(X) = Top(X)$ y $F(f) = (s, d)$, y de un funtor de una categoría C en $Top$, donde intuitivamente C contiene a todos los objetos de la forma $(Top(X), \tau)$, una especie de $Top^{*}(X)$ variando el conjunto $X$. Con todo esto se quiere decir que la esencia de una categoría topológica son las estructuras iniciales y finales definidas en retículos completos. Estos hechos motivan la noción de la categoría $Ore$ y $\widetilde{Ore}$ y la construcción de un par de funtores cuyo producto fibrado generan categorías topológicas.

## 4.2. Las categorías Ore y $\bar{O}re$

La categoría $Ore$ tiene por objetos las clases con estructura de retículo completo. En $Ore$ un morfismo con dominio $(X, \leq)$ y codominio $(Y, \leq)$, consiste de un par $(s, d)$, donde $d : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ y $s : (Y, \leq) \to (X, \leq)$ son funciones monótonas no decrecientes y $d$ es adjunto a derecha de $s$. Dados dos morfismos $(s,d) : (X,\leq) \to (Y,\leq)$ y $(f,g) : (Y,\leq) \to (Z,\leq)$ su composición se define como el morfismo $(f, g) \circ (s,d) := (s \circ f, g \circ d)$.

A partir de la categoría $Ore$, se determina la categoría $\bar{O}re$, cuyos objetos son de la forma $(X, \leq, x_0)$, siendo $(X, \leq)$ un objeto de $Ore$ y $x_0$un elemento de $G(X)$. En $\bar{O}re$ un morfismo con dominio $(X,\leq,x_0)$ y codominio $(Y,\leq,y_0)$, consiste de un par $(s,d)$ donde $(s,d) : (X,\leq) \to (Y,\leq)$ es un morfismo de $Ore$ y $s(y_0) \leq x_0$. La composición en los morfismos de $\bar{O}re$ se define de igual manera que en la categoría $Ore$.

Entonces, se determina el funtor $O_p : \bar{O}re \to Ore$, que olvida el punto, esto es que se asigna a cada objeto $(X, \leq, x_0)$ el objeto $(X, \leq)$ y a cada morfismo $(s, d)$ el mismo $(s, d)$; el cual resulta un funtor topológico, cuya prueba sigue los lineamientos estudiados en el funtor olvido $O_p : Top \to Conj$.

Veamos ahora la manera como se genera un funtor topológico a partir de $O_p$ y de un funtor $G$ : D $\to$ $Ore$.

El funtor $G : D \to Ore$ asigna a cada objeto $X$ de $D$ un retículo $G(X)$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ un par adjunto (s,d): $G(X) : D \to G(Y)$, donde $s(y) \leq x$, si y solamente si, $y \leq d(x)$. En tal caso se define una categoría $C$ cuyos objetos se determinan así: para cada objeto $X$ de $D$ su fibra en $C$ será

$G(X)$, cuyos objetos por notación serán parejas $(X, x_o)$ donde $x_o$ es un objeto de $G(X)$, la primera componente $X$ se escribe para no olvidar su procedencia e imitar el trabajo en $Top$. Ahora bien, hay un morfismo $f$ entre $f : (X, xo) \to (Y, yo)$ si hay un morfismo $f : X \to Y$ en $D$ y $s(y_o) \leq x_0$ o $y_o \leq d(xo)$, hechos que imitan lo elaborado en $Top$.

Entonces, se determina un funtor un funtor $F : C \to D$ asi: $F(X, x_o) = X$, y $f : (X, x_o) \to Y\,(Y, y_o)$ $F(f) = f$. Veamos que $F$ es un funtor topológico.

En primer lugar y por la forma en que se define $F$ , este resulta fiel. Ahora, para cada objeto $X$ de $C$ su fibra, por construcción, es un retículo completo.

Veamos ahora como se construyen las estructuras iniciales. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de $D$ y $(Y, y_o)$ un objeto sobre la fibra de $Y$ . La estructura inicial es $s(y_0)$. En efecto, $s(y_o) \leq s(y_o)$ por lo tanto $f : (X, s(y_0)) \to (Y, y_o)$ es morfismo. Veamos ahora que se cumple la propiedad universal. Sea$(Z, z_0)$ un objeto de $C$ y $g : Z \to X$ un morfismo de $D$ supongamos que $g$ determina por el funtor $G$ el par adjunto $(k, h) : G(Z) \to G(X)$ . Supongamos que $fog$ es morfismo en $C$, $fog : (Z, z_o) \to (Y, y_o)$ . Nótese que $kos(y_o) \leq z_0$ de lo cual se sigue que $k(s(y_o) \leq z_0$, que es la condición para que $g : (Z, z_o) \to (X, s(y_o))$ sea morfismo.

Veamos como se construyen las estructuras finales. Sea $f : X \to Y$ un morfismo de $D$ y $(X, x_o)$ un objeto sobre la fibra de $X$. La estructura inicial es $d(x_0)$. En efecto, $d(x_o) \leq d(x_o)$ por lo tanto $f : (X, x_o) \to (Y, d(x_0))$ es morfismo. Veamos ahora que se cumple la propiedad universal. Sea $(Z, z_0)$ un objeto de $C$ y $g : Y \to Z$ un morfismo de $D$ supongamos que $g$ determina por el funtor $G$ el par adjunto $(k, h) : G(Y) \to G(Z)$ . Supongamos que $gof$ es morfismo en $C$, $gof : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ . Nótese que $z_0 \leq hod(x_0)$ de lo cual se sigue que $z_0 \leq h(d(x_0)$ que es la condición para que $g : (Z, z_0) \to (X, s(y_o)$ sea morfismo.

Veamos ahora el recíproco de la construcción anterior, esto es dado $F$ , construir $G$.

$F : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ se determina un funtor $G : \mathrm{D} \to Ore$ que asigna a cada objeto $X$ el objeto $G(X) = Fib(F,$

$X$), es decir la fibra de $X$ según $F$ , y a cada morfismo $f : X \to Y$ el morfismo $(f^{\#}, f_{\#}) : Fib(F, X) \to Fib(F, Y)$ siendo $f^{\#}$ y $f_{\#}$ las funciones que se describen a continuación. La función $f^{\#} : Fib(F, Y) \to Fib(F, X)$ asigna a cada objeto $\mathbf{Y}$ el objeto $f^{\#}(Y) := X$, donde $\mathbf{X}$ es la estructura inicial para la fuente $\{f : X \to Y\}$. La función $f_{\#} : Fib(F, X) \to Fib(F, Y)$ asigna a cada objeto $\mathbf{X}$ el objeto $f_{\#}(X) := Y$, donde $\mathbf{Y}$ corresponde a la estructura final para el sumidero $\{f : X \to Y\}$. Sea $(C_0, F_0, H_0)$ el producto fibrado de los funtores $O_p$ y G. Entonces, $F_0 : C_0 \longrightarrow D$ es un funtor topológico y $C_0$ resulta isomorfa a C.

## 5. Categorías topológicas asociada a una categoría

### 5.1. La categoría topológica asociada a los subobjetos en una categoría

Sea C una categoría con imágenes inversas e intersecciones. Entonces, para cada objeto $X$ de C la colección de los subobjetos de $X$, que se nota $Sub(X)$, resulta un retículo completo con el orden dado por : "$\overline{f} \leq \overline{g}$, si y solamente si, existe un morfismo $h$ tal que $f \circ h = g$". Entonces, se determina el funtor $Sub$ : $C \to Ore$ que asigna a cada objeto $X$ la colección $Sub(X)$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ el par adjunto $(f^{\#}, f_{\#}) : Sub(X) \to Sub(Y)$, donde $f_{\#}$ es la función que asigna a cada subobjeto $A$ de $X$ su imagen directa por $f$ y $f^{\#}$ la función que asigna a cada subobjeto $B$ de $Y$ la imagen recíproca por $f$, donde las funciones $f_{\#}$, $f^{\#}$ resultan monótonas no decrecientes.

Al efectuar el producto fibrado de los funtores $Sub$ y $O_p$ se obtiene la categoría de los subobjetos de C, $Sub$(C). Un objeto de $Sub$(C) es una pareja $(X, (A, h))$ donde $(A, h)$ es un subobjeto de $X$ y un morfismo $\varphi_f : (X, (A, h)) \to (Y, (B, k))$ está determinado por un morfismo de $f : X \to Y$ que verifica la condición $f^{\#}(k) \leq h$, siendo este el orden natural definido en $Sub(X)$. Finalmente se determina el funtor topológico $O_{Sub} : Sub(C) \to C$ que asigna a cada objeto $(X, (A, h))$ el objeto $X$ y a cada morfismo $\varphi_f$ el morfismo $f$ .

Veamos algunos ejemplos particulares. Si C es la categoría de los conjuntos, en la categoría topológica que se determina, la fibra sobre cada conjunto corresponde a sus subconjuntos, un morfismo, entre dos subconjuntos A y B, en esta categoría corresponde a una función entre los conjuntos subyacentes que envía por imagen recíproca B en A y por imagen directa A en B.

Finalmente nótese que categorías, aparentemente ajenas a la topología, como espacios vectoriales, monoides, grupos etc dan origen por el método descrito a categorías topológicas relacionadas con los subobjetos de un objeto dado.

### 5.2. La categoría topológica asociada a las cribas de una categoría

Sean C una categoría y $X$ un objeto de C. Una Criba sobre $X$ es una familia $S$ de morfismos con codominio $X$, tal que para todo morfismo $f$ de $S$ y todo morfismo $g$ de C, para el cual esté definido $fog$, se tiene que $fog$ pertenece a $S$. La colección de todas las cribas sobre $X$ la notaremos $Crib(X)$. En $Crib(X)$, la relación de inclusión define una relación de orden, la cual hace de $Crib(X)$ un retículo completo, siendo los ínfimos y los máximos determinados por la intersección y la unión de cribas. En particular, en $Crib(X)$, el máximo corresponde a la colección de todos los morfismos con codominio $X$ y el mínimo a la criba vacía. Si $f : X \to Y$ es un morfismo de C se determinan las siguientes funciones: $f^{\#}$: $Crib(Y) \to Crib(X)$ definida por: $f^{\#}(S) := \{g : fog \in S\}$, , $f_{\#} : Crib(X) \to Crib(Y)$ definida por $f_{\#}(T) := \{foh | h \in T\}$ Las funciones $f^{\#}$ y $f_{\#}$ están bien definidas, son monótonas no decrecientes y $f^{\#}$ es el adjunto a izquierda de $f_{\#}$. Entonces, se determina el funtor $Crib : \mathrm{C} \to Ore$, que asigna a cada objeto $X$ de C la colección de las cribas sobre $X$ $Crib(X)$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ de C el morfismo $(f^{\#}, f_{\#})$ : $Crib(X) \to Crib(Y)$.

Al efectuar el producto fibrado de los funtores $Crib : \mathrm{C} \to Ore$ y $O_p : Ore \to Ore$ se obtiene la categoría de las cribas de C, $Crib(C)$. Un objeto de $Crib$(C) es una pareja $(X, T)$, donde $X$ es un objeto de C y $T$ es una criba sobre $X$. Un morfismo $\varphi_f : (X, T) \to (Y, S)$ está determinado por un morfismo $f : X \to Y$

sujeto a la condición $f^{\#}(S) \subset T$ . Finalmente se determina el funtor topológico, $O : Crib(C) \rightarrow C$ que asigna a cada objeto $(X, T)$ el objeto $X$ y a cada morfismo $\varphi_f$ el morfismo $f$.

## 6. Conclusiones

Como se puede observar la topología categórica sigue ofreciendo temas de trabajo. Para el caso que nos ocupa, el trabajo realizado enriquece la topología en aspectos poco conocidos y que giran alrededor de las topologías iniciales y finales, a su vez al mostrar que estás teorías no son exclusivas de los espacios topológicos enriquece la teoría de categorías.

**Agradecimientos**

Los autores agradecemos de manera muy especial al profesor Carlos Javier Ruiz Salguero el habernos introducido en estos temas con sus valiosas discusiones en el seminario del grupo Vialtopo.

## Referencias

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. Strecker, “Abstract and Concrete Categories”, New York: John Wiley and Sons Inc, 2000.

[2] V. Ardila, J. Montañez, C. Ruiz, “Nociones equivalentes de Categorías Topológicas”, Boletín de Matemáticas, Nueva serie, vol. 7, no. 1, pp. 19-27, 2000.

[3] A. Donado, C. Luque, J. Paez, “Topología y colecciones”, Notas de Matemática y Estadística, vol. 39, pp. 31-48, 1999.

[4] G. Preuss, “Theory of Topological Structures”, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2859-6

[5] C. Ruiz, “El clasificador universal de las categorías topológicas”, Memorias del “Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones”, 1992.