Experiencias Docentes
Situaciones de contraejemplo en contexto escolar. Una propuesta de clasificación

Counterexample situations in a school context. A classification proposal

Edgardo Locia Espinoza

Armando Morales Carballo

Efrén Marmolejo Vega

Héctor Merino Cruz

Revista de Investigación

Volumen XIII, Número 1, pp. 071–098, ISSN 2174-0410
Recepción: 19 Oct'22; Aceptación: 28 Nov'22

1 de abril 2023

Resumen

Si se asume la ley del tercero excluido los contraejemplos tienen un estatus bien definido en las matemáticas. En contraste, en la enseñanza de las matemáticas tienen solo un rol modesto, poco representativo del que tienen en la actividad matemática profesional. En este artículo, proponemos una clasificación de situaciones de contraejemplo, la cual es producto de trabajos anteriores y de una amplia revisión de libros escolares y no escolares, numerosas observaciones de clases y entrevistas a profesores, futuros profesores y estudiantes de matemáticas. Ilustramos cada categoría de esta clasificación con ejemplos tomados de la matemática escolar pretendiendo con ello propiciar el uso de los contraejemplos, por los profesores y los estudiantes de universidad, en la enseñanza.

Palabras Clave: Situaciones de Contraejemplo, Razonamiento, Matemáticas, Enseñanza Universitaria.

Abstract

If the law of the excluded third party is assumed, then the counterexamples have a well-defined status in mathematics. In contrast, they have only a modest role in the teaching of mathematics, not very representative of that in professional mathematical activity. In this work, we propose a classification of the Counterexample Situations, which is the product of previous works and an extensive review of school and non-school books, numerous observations of classes and interviews with teachers, future teachers and students. We illustrate each category of this classification with examples taken from school mathematics, thereby seeking to encourage the use of counterexamples, by teachers and university students.

Keywords Counterexample Situations, reasoning, mathematics, university education

1. Introducción

Una de las características distintivas de las matemáticas como ciencia es su estructura axiomática en la cual, el razonamiento deductivo juega un papel muy importante. Diversos investigadores sostienen que la apropiación del razonamiento deductivo por parte de los estudiantes incluso de universidad resulta muy compleja pues se enfrenta al obstáculo del razonamiento que los individuos tienen en la vida cotidiana en donde muchas reglas lógicas, comunes en matemáticas, son asumidas de manera diferente [4]. En particular, la ley del tercero excluido, la cual es uno de los pilares de la matemática llamada clásica, no es una ley natural en la racionalidad cotidiana [1]. En efecto, esta ley fue objeto de numerosas discusiones filosóficas en el periodo de crisis de los fundamentos de las matemáticas e incluso, en la rama de la matemática llamada intuicionismo, no es aceptada de manera general. En la matemática clásica (es decir, no intuicionista) existen demostraciones no constructivas o indirectas de existencia, que los intuicionistas no aceptan, porque recurren a la ley del tercero excluido [9].

Una consecuencia de asumir esta ley, es la posibilidad de utilizar contraejemplos para refutar afirmaciones de la forma *para todo* x, $p(x)$, demostrando que *existe* x *tal que no* $p(x)$, mediante la exhibición de un objeto x_0, tal que no $p(x_0)$. Esto es así, desde que en la matemática clásica $\forall x\, P(x) \vee \neg(\forall x\, P(x)$, es equivalente a $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x)$. Por otro lado, Gelbaum y Olmsted [6] afirman que la actividad matemática consiste básicamente en dos tipos de procesos: la formulación de pruebas y la construcción de contraejemplos. En efecto, desde el origen de esta ciencia, la realización de conjeturas y los contraejemplos le acompañan en su desarrollo, recuérdense los diálogos de Sócrates, impulsando a descubrir vía la afirmación y el contraejemplo, constructos que resultan verdaderos o no en función de la suficiencia de las hipótesis de partida. En el mismo sentido, en su modelización de la construcción del conocimiento matemático, Lakatos [13] muestra la importancia de la lógica de la prueba y la refutación y el papel motor que tiene en ella el contraejemplo como un revelador de contradicciones. Esto muestra la gran importancia que tienen los contraejemplos en el trabajo del matemático profesional.

Esta práctica, de construir conjeturas y probarlas o refutarlas mediante contraejemplos, tiene un rol modesto en el ámbito de la enseñanza de la matemática, incluso en los cursos universitarios. En los niveles elementales de educación, el interés se centra más en el aspecto operatorio y algorítmico mientras que en el tratamiento de la demostración en cursos superiores de matemáticas, son predominantes los procedimientos deductivos, en concordancia con la estructura axiomática de las matemáticas, poniendo menos énfasis en la realización de conjeturas y, sobre todo, en el uso de contraejemplos, con los cuales puede promoverse la creatividad, el desarrollo del pensamiento crítico, el autorrespeto, la comunidad colaborativa en el aula de clases, la iniciativa, la originalidad, la lectura, la escritura, las habilidades auditivas y verbales, potenciando con ello el pensamiento matemático

El contraejemplo es consustancial a la búsqueda de la verdad. Balacheff [2] (p. 53), afirma que la verdad, es una actividad del emprendimiento matemático, en el que "las pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos- las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal". De aquí la importancia de la falsación, cuya mejor herramienta es el contraejemplo y juega un importante papel en la comprensión de la matemática. En los últimos años se han desarrollado diversas investigaciones relativas a la introducción del uso de contraejemplos en la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, Bustos y Zubieta [3], García y Morales [5], Knuth y Ko [11], Komatsu [12], Martínez y Detzel [16], Weber [19], Zazkis y Chernoff [20], coinciden en que los contraejemplos permiten profundizar en la comprensión conceptual, reducir o eliminar errores conceptuales comunes, mejorar las habilidades del pensamiento crítico y hacer que el aprendizaje sea más activo y creativo.

En este contexto, los autores del presente documento, han emprendido un trabajo de investigación encaminado a propiciar el uso de los contraejemplos en la enseñanza poniendo énfasis en su valor matemático y su virtud pedagógica. De manera más precisa, el trabajo que reportaron Locia, Morales, Merino y Marmolejo [15] sobre un estudio con profesores de nivel medio superior y de universidad permitió mostrar que algunos de ellos no solo reconocen a los contraejemplos cuando están completa y formalmente presentes en su forma lógica, sino que los reconocen en situaciones más amplias, menos rigurosas e incompletas, lo que evidencia una concepción didáctica diferente de la concepción lógica. Morales, Locia, Ramírez, Sigarreta y Mederos [17], muestran que los contraejemplos tienen un rol modesto en la enseñanza de la matemática, poco representativo del que tienen en la matemática profesional y ponen en evidencia cómo los contraejemplos permiten hacer una clasificación de conceptos que tienen ciertas relaciones entre sí. Hernández, Locia, Morales y Sigarreta [7], presentan una experiencia de construcción de definiciones en un contexto de debate entre estudiantes de universidad en el que el contraejemplo permitió ir afinando la definición de función convexa desde su versión intuitiva hasta llegar a la definición estándar aceptada en matemáticas. Locia y Antibi [14] proponen métodos para sistematizar la búsqueda de contraejemplos particulares partiendo de la constatación de que tradicionalmente, en los libros de texto y en los cursos de los profesores, los contraejemplos son exhibidos sin dar indicaciones ni procedimientos para encontrarlos.

Para la realización de los trabajos anteriores, fue necesario aplicar encuestas a profesores y estudiantes, realizar experimentos didácticos, observar directamente clases de matemáticas y revisar numerosos libros de matemáticas escolares y no escolares.

Más precisamente, en el debate entre estudiantes (de universidad que cursaban la asignatura de Cálculo IV de la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Guerrero, México) acerca de la definición de función convexa descrito en [7], los argumentos que daban los participantes incluían frecuentemente, conjeturas falsas que eran refutadas con contraejemplos exhibidos por sus pares. Las situaciones en las que aparecían estas conjeturas, fueron registradas y clasificadas. En segundo lugar, la encuesta aplicada en [15] (*¿qué se entiende por situación de contraejemplo?*) incluía la solicitud a los profesores participantes (de diferentes niveles educativos en el estado de Guerrero, México) de situaciones que se relacionaran con contraejemplos. Con los ejemplos que propusieron los participantes en estos dos experimentos didácticos se hizo una primera clasificación. En tercer lugar, en el marco de la asignatura Evaluación de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (dirigida a enseñantes de matemáticas en servicio de diferentes niveles para profesionalizar su práctica docente), se realizaron observaciones de sus cursos (de Cálculo y

Álgebra) poniendo especial interés al hecho de que si los profesores de bachillerato y de universidad, utilizan o no contraejemplos en sus clases. Estas. Por último, en la búsqueda de situaciones en las que se recurriera a contraejemplos en los textos de matemáticas, se revisaron, entre otros, los siguientes libros:

- *Análisis Matemático*, Tom M. Apostol [21],
- *Calculus*, volúmenes I y II, Tom M. Apostol [22],
- *A survey of Modern Algebra*, Garret Birkohff y Saunders Maclane [23],
- *Algèbre générale* , Adina Calvo y Bernard Calvo [24],
- *Algèbre linéaire*, Adina Calvo y Bernard Calvo [25],
- *Álgebra Abstracta, primer curso*, John Fraleigh. [26],
- *Counterexamples in analysis*, Bernard Gelbaum y John Olmsted [6],
- *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne [8],
- *Cálculo vectorial*, Jerrold Marsden y Anthony Tromba [27],
- *Calculus, Cálculo infinitesimal*. Michael Spivak, [28].

Tales acciones tuvieron como producto integrador la presente propuesta de categorización de diferentes situaciones de contraejemplo, entendiendo por *Situación de Contraejemplo*, cualquier situación en la que se tiene una conjetura susceptible de ser refutada por un contraejemplo. Con esta clasificación se pretende mostrar a los profesores y estudiantes de universidad, que el contraejemplo adquiere sobre todo su valor pedagógico cuando está situado en una problemática que justifica su interés.

2. Diferentes tipos de situaciones de contraejemplo

Hemos agrupado en varias categorías los diferentes tipos de situaciones que hemos encontrado después de este análisis, en las cuales puede aparecer el contraejemplo.

2.1 ¿Recíproca verdadera?

Muchos teoremas son planteados bajo forma de implicación: "$p \Rightarrow q$". La pregunta ¿La recíproca es verdadera? puede dar lugar a una situación de contraejemplo.

Esta situación puede resultar muy útil y formadora sobre todo porque nos podemos dar cuenta de que, en nuestra enseñanza, numerosos son los estudiantes que no alcanzan a distinguir la diferencia entre una condición necesaria y una condición suficiente e incluso existen otros que consideran las implicaciones como equivalencias [4]. Esta opinión es compartida por algunos profesores de los niveles preuniversitario y universitario como lo hemos constatado en diversos seminarios y cursos para profesores en la Universidad Autónoma de Guerrero.

Ejemplo 1. En las notas de un curso de análisis dirigido a profesores en formación, se encontró lo siguiente: se demuestra en el curso que, si dos series son convergentes entonces su suma es convergente. Más precisamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ converge.}$$

Formulemos la afirmación recíproca:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge.}$$

¿Esta afirmación es verdadera? La respuesta es "NO ". Para demostrarlo es suficiente con dar un contraejemplo: $\sum \frac{1}{2(n+1)}$, no converge, $\sum -\frac{1}{2(n-1)}$, tampoco converge, pero

$$\sum\left(\frac{1}{2(n+1)} + \left(-\frac{1}{2(n-1)}\right)\right)$$

es convergente. En efecto,

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{n^2-1} \text{ y } \sum \frac{1}{n^2-1}$$

es convergente (un contraejemplo más sencillo sería con $\sum \frac{1}{\mathrm{n}}$ y $\sum -\frac{1}{\mathrm{n}}$).

Ejemplo 2. Consideremos el teorema siguiente: Sean a y b números reales tales que $a < b$ y sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b\{$

$$f' \to l \text{ cuando } x \to a \Rightarrow \text{ que } f \text{ es derivable por la derecha en } a \text{ y } f'_d(a) = l.$$

Esta regla es a veces muy cómoda para afirmar que una función posee en un punto una derivada a la derecha o a la izquierda. ¡Pero cuidado, la recíproca es falsa!: una función f puede ser derivable en un punto a sin que $f'(a)$ sea igual al límite de $f'(x)$ cuando x tiende a a. Dicho de otra manera, no hay ninguna razón para que la derivada de una función sea una función continua.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

En este caso:

- La función f es derivable sobre $]-\infty, 0[$ y para todo número x diferente de cero, se tiene $f'(x) = 2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
- Para todo $x \neq 0$, se tiene que $\left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq 1$ por lo tanto $|f(x)| \leq x^2$. Puesto que x^2 tiende a cero cuando $x \to 0$, se deduce que $f(x) \to 0 = f(0)$ cuando $x \to 0$. La función f es por lo tanto continua en cero.
- f es derivable en cero y $f'(0) = 0$, porque $\frac{f(x)}{x} \to 0$ cuando $x \to 0$.
- Sin embargo f' no tiene límite en cero porque $\cos \frac{1}{x}$ no tiene límite en cero.

Observaciones:

1. Para estar en posibilidad de formular la recíproca de una implicación, es necesario primero distinguir bien cuál es la hipótesis privilegiada en la escritura de esta implicación (la proposición p) y cuál es la conclusión (la proposición q). La mayor parte

de los teoremas o resultados cuentan con varias hipótesis (hipótesis específicas y no específicas) $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ que implican la conclusión q. Es decir, son de la forma (h_1y h_2 y … y h_k) $\Rightarrow q$. En un sentido estricto, la recíproca de tal implicación es $q \Rightarrow$ (h_1 y h_2 y … y h_k).

A menudo, para enfatizar un resultado importante del curso se hace jugar a una de las hipótesis, por ejemplo h_1, un rol más importante que las otras. En este caso, en la formulación del teorema, se dejan de lado las otras hipótesis y se pone énfasis sobre la implicación de q por h_1. Esto se manifiesta en la forma de redactar un teorema. Por ejemplo, en la redacción siguiente:

Sea h_2 y … y h_k. Demostrar que $h_1 \Rightarrow q$,

es sobre la hipótesis h_1 que se pone énfasis. En este caso la recíproca es

Sea h_2 y … y h_k. Demostrar que $q \Rightarrow h_1$.

Ejemplo: En varios libros de texto y notas de curso que analizamos, se encuentran diversas maneras para motivar el estudio de la convergencia uniforme de sucesiones de funciones. Ciertos autores, como Apostol [22] y Spivak [28], introducen primero la noción de convergencia simple y enseguida subrayan que, si se tiene una sucesión convergente de funciones continuas, la función límite puede no ser continua. El problema consiste en buscar condiciones que garanticen la continuidad del límite de una sucesión de funciones continuas. Se introduce entonces la noción de convergencia uniforme y se demuestra el teorema siguiente:

“Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas sobre X. Si la convergencia de f_n hacia f es uniforme sobre X, entonces f es continua sobre X”.

Tenemos dos hipótesis explícitas en este teorema:

a) h_1: (f_n) sucesión de funciones continuas,
b) h_2: (f_n) converge uniformemente a f sobre X,

y la conclusión: f es continua sobre X,

pero es claro que la redacción (y todo el contexto que acabamos de describir) pone énfasis sobre la implicación:

Convergencia uniforme de la sucesión $\Rightarrow$ Continuidad de la función límite.

Así, cuando se habla de la afirmación recíproca (a veces diciendo que la convergencia uniforme es una condición suficiente y preguntando si esta condición es necesaria para la continuidad de este límite), se hace referencia a la afirmación:

(1) Continuidad de la función límite $\Rightarrow$ Convergencia uniforme de la sucesión.

y se entiende implícitamente que la sucesión mencionada está constituida de funciones continuas (porque se ha fijado ya esta hipótesis). Sin embargo, como se dispone de dos hipótesis, se hubiera podido dar un peso mayor a la hipótesis h_2 y poner énfasis sobre la implicación:

Continuidad de las funciones $f_n \Longrightarrow$ Continuidad de la función límite,

dejando fija la hipótesis de que la convergencia de la sucesión f_n hacia f es uniforme. Así, se obtiene la afirmación recíproca:

(2) Continuidad de la función límite $\Longrightarrow$ Continuidad de las funciones f_n.

Las implicaciones (1) y (2) son ambas falsas. Para demostrarlo, es suficiente con exhibir un contraejemplo para cada una de ellas. Un contraejemplo para la implicación (1) será una sucesión (f_n) tal que su límite f sea continuo, con f_n continua, para todo n, pero tal que la convergencia de f_n hacia f no sea uniforme. El contraejemplo clásico es dado por la sucesión (f_n), $f_n: [0,1] \rightarrow [0,1]$, definidas $\forall n \in \mathbb{N}$, por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n} \\ -2nx + 2, & \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:

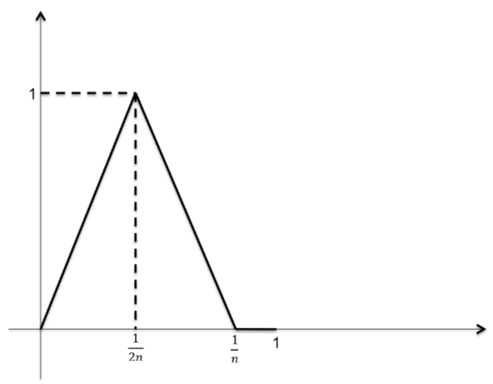

Figura 1: Convergencia uniforme y continuidad

y la función límite f es la función idénticamente nula. Vemos bien que cada f_n es continua, la función f es continua pero la convergencia no es uniforme. En efecto, una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme es que la sucesión numérica $(\sup|f_n(x) - f(x)|)$ tienda a cero (El sup es tomado sobre el conjunto [0,1]). En el ejemplo dado, $\sup|f_n(x) - f(x)| = 1$ para todo n, entonces, la sucesión no puede converger a cero por lo que la convergencia de la sucesión, (f_n) hacia f no puede ser uniforme.

Para tener un contraejemplo para la implicación (2) necesitamos una sucesión (f_n) que converja uniformemente a una función continua f, pero tal que, al menos una de las funciones f_n no sea continua.

Sea $f_n: [0,1] \to [0,1]$,, definida para cada n por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cuya gráfica es:

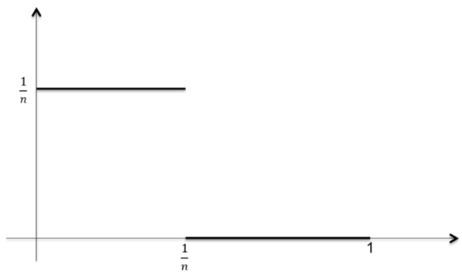

Figura 2: Convergencia uniforme y continuidad

Entonces f_n converge uniformemente a $f \equiv 0$ porque para toda n, $\sup|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n} \to 0$, pero para todo entero $n \geq 1$, f_n no es continua sobre $[0,1]$.

Observemos que para exhibir un contraejemplo hubiera sido suficiente que una sola función f_n fuera discontinua.

2. Frecuentemente, en los libros de texto o en las exposiciones de los profesores, ciertos teoremas son expresados recurriendo al lenguaje cotidiano. Por consiguiente, la identificación de los elementos de la implicación es a veces verdaderamente difícil. Por

ejemplo, en varios textos se encuentra el resultado siguiente formulado más o menos de la misma manera;

"no se modifica la naturaleza de una serie modificando un número finito de sus términos"

Presentado de esta forma, no se alcanza a distinguir la hipótesis y la conclusión. Si lo ponemos en forma de implicación, se tiene:

"Si se modifica un número finito de términos de una serie, entonces no se modifica su naturaleza"

En este caso ¿tiene sentido la recíproca?

En teoría, toda implicación debe tener una recíproca. El problema que se plantea aquí es que la implicación no está formulada de manera correcta. En los dos términos ("antecedente" y "consecuente") hay ciertos hechos que se consideran implícitos en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, el verbo "modificar" que aparece en los dos componentes significa implícitamente que una serie es sometida a una acción para dar nacimiento a otra serie, la cual tendrá la misma naturaleza que la primera. Con esas consideraciones se obtiene la formulación correcta:

"Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son tales que $u_n = v_n$ salvo para un número finito de términos, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son de la misma naturaleza"

y, a partir de ahí, se obtiene la recíproca:

"Si $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son de la misma naturaleza, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ son tales que $u_n = v_n$ salvo para un número finito de términos"

la cual es evidentemente falsa como lo muestra el contraejemplo $u_n = 2^{-n}$ y $v_n = 3^{-n}$. En efecto, las series $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}$ son de la misma naturaleza (convergentes), pero no tienen ningún término en común.

3. La cuestión de las recíprocas es una situación que se encuentra en varias ocasiones. Por ejemplo, la mayor parte de los teoremas que encontramos en análisis son teoremas que se refieren a condiciones suficientes (condiciones suficientes para la diferenciabillidad de funciones, para la integrabilidad, para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones, etc.). Se presenta también cuando se tiene que establecer la igualdad de dos conjuntos A y B. En efecto para demostrar que dos conjuntos A y B son iguales, a menudo se demuestra primero que $A \subset B$ y enseguida que $B \subset A$. En muchas ocasiones una de estas inclusiones no se verifica. A veces, para demostrar que dos series (o sucesiones) son de la misma naturaleza se analiza primero si la convergencia de la primera conlleva a la convergencia de la segunda y enseguida se analiza la implicación recíproca. Se encuentra una situación análoga cuando se pide establecer la equivalencia de dos normas. En este caso se sabe que dos normas definidas en un espacio vectorial E, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, son equivalentes si y solo si $\exists a > 0$ y $b > 0$ tales que $\|x\|_1 \leq a\|x\|_2$ y $\|x\|_2 \leq b\|x\|_1$, $\forall x \in E$. A menudo, una de estas desigualdades no es verdadera y para demostrarlo, se puede recurrir a un contraejemplo.

2.2 Restricción de definiciones

Frecuentemente, es necesario considerar varias definiciones cada vez más restrictivas para poder considerar resultados más precisos. Para comprender más estas definiciones es necesario mostrar que ciertas definiciones son efectivamente más restrictivas que otras dando ejemplos que verifiquen, por ejemplo, una de ellas solamente [8]. En algunos casos se llega a la situación de que las definiciones similares no guardan entre ellas ninguna relación de dependencia.

Ejemplo: Cuando en análisis se estudian las series de funciones, se introducen diferentes tipos de convergencia. Por ejemplo:

Sea $\sum u_n(x)$ una serie cuyo término general es una función de X en $\mathbb{C}$ (X conjunto cualquiera). Pongamos $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u_p(x)$ y $Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} |u_p(x)|$ (sumas parciales de rango n).

Convergencia simple: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge simplemente sobre X, si $(S_n(x))$ converge para cada x del conjunto X.

Convergencia absoluta: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge absolutamente sobre X, si $(Q_n(x))$ converge para cada x del conjunto X.

Convergencia uniforme: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge uniformemente sobre X, si $(S_n(X))$ converge uniformemente sobre X.

Convergencia normal: Se dice que la serie $\sum u_n(x)$ converge normalmente sobre X si existe una sucesión numérica (α_n), $\alpha_n \geq 0$, independiente de x, tal que $\sum \alpha_n$ converge y $\forall x \in X, |u_n(x)| \leq \alpha_n$, o de manera equivalente, en el caso en el que las funciones u_n sean acotadas sobre X, se dice que $\sum u_n(x)$ serie convergente, converge normalmente sobre X, si la serie numérica $\sum \|u_n\|_\infty$ es convergente. (donde $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$).

Saber qué relación guardan entre ellas estas nociones puede resultar muy formador. Diremos que una noción o propiedad p es más restrictiva que otra propiedad q, si todo objeto que posee la propiedad p, también posee la propiedad q y, existe al menos un objeto que posee la propiedad q que no posee la propiedad p (o de manera equivalente $p \Rightarrow q$ pero $q \nRightarrow p$).

Así, es posible demostrar que toda serie de funciones que es normalmente convergente es también absolutamente convergente y que toda serie de funciones absolutamente convergente, es también simplemente convergente. Por consecuencia toda serie de funciones normalmente convergente es simplemente convergente. De la misma manera, es posible demostrar que toda serie de funciones que es normalmente convergente es también uniformemente convergente y que toda serie de funciones uniformemente convergente es también simplemente convergente. Se pueden plantear las preguntas siguientes:

¿Toda serie uniformemente convergente es también absolutamente convergente?

¿Toda serie absolutamente convergente es también uniformemente convergente?

¿Toda serie uniformemente convergente es también normalmente convergente?

¿Toda serie que es absolutamente convergente es también normalmente convergente?

¿Toda serie simplemente convergente es también absolutamente convergente?

¿Toda serie simplemente convergente es también uniformemente convergente?

Las respuestas a todas estas preguntas es "NO" y es posible encontrar contraejemplos que lo demuestren.

Serie uniformemente convergente que no converge absolutamente. Sea $X = [-1,0]$; consideremos la serie de potencias $\sum \frac{x^n}{n}$. Es claro que esta serie converge simplemente (por el teorema de las series alternadas), pero no converge absolutamente, pues la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Mostraremos ahora que la serie converge uniformemente sobre X. Si denotamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

tenemos:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n} \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right|$$

pero puesto que $x \epsilon [-1, 0]$, la serie de término general $\frac{x^n}{n}$ es alternada, por lo tanto:

$$\left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Por la desigualdad

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{1}{k+1}$$

concluimos que la serie dada converge uniformemente sobre X.

Serie absolutamente convergente que no converge uniformemente. La serie $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolutamente sobre $\mathbb{C}$, pero no converge uniformemente sobre $\mathbb{C}$. En efecto, $u_n(z) = \frac{z^n}{n!} \nrightarrow 0$ uniformemente sobre $\mathbb{C}$ porque si $z = x + iy$, $\|u_n\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \geq \sup_{x \geq 0} \frac{x^n}{n!} = +\infty$. Entonces, por la condición necesaria de convergencia uniforme de series, la serie no converge uniformemente.

Serie uniformemente convergente que no converge normalmente. Hemos visto en el ejemplo 1 una serie que converge uniformemente sin ser absolutamente convergente, y por lo tanto a fortiori, sin ser normalmente convergente.

Serie absolutamente convergente que no es normalmente convergente. En la serie del ejemplo 2 se tiene convergencia absoluta sin tener convergencia uniforme, y por lo tanto a fortiori, sin tener convergencia normal.

Serie simplemente convergente que no es absolutamente convergente. La serie del ejemplo 1 es una serie simplemente convergente (pues converge uniformemente) pero no converge absolutamente.

Serie simplemente convergente que no es uniformemente convergente. La serie del ejemplo 2 siendo absolutamente convergente, converge también simplemente, pero hemos visto que no converge uniformemente.

A partir de todas estas informaciones estamos en posibilidad de establecer las relaciones entre todas las nociones definidas al inicio. Podemos resumir la información en el diagrama siguiente.

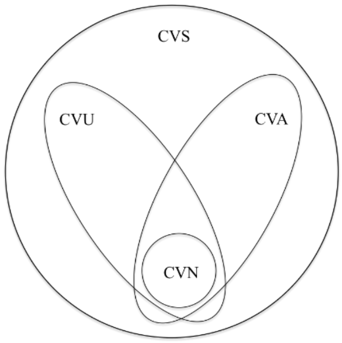

Figura 3: Diferentes tipos de convergencia

Vemos claramente que la noción de convergencia normal (CVN) es la más restrictiva. Las nociones de convergencia uniforme (CVU) y aquella de convergencia absoluta (CVA) no guardan este tipo de relación, incluso podemos decir que en cierto sentido son "laterales". La noción de convergencia simple (CVS) es la más amplia.

En matemáticas encontramos a menudo este tipo de relaciones entre diferentes nociones. Podríamos citar otros casos. Por ejemplo, las nociones de función continua, función uniformemente continua, función Lipschtziana y función absolutamente continua, en análisis. En álgebra, encontramos las nociones de grupo, anillo, anillo entero, cuerpos, espacios vectoriales, etc. en las que podríamos también determinar este tipo de jerarquización.

Observación. Esta categoría (restricción de definiciones) puede ser considerada como una forma de utilización de la categoría "recíproca de un teorema" que se presenta frecuentemente en la enseñanza de las matemáticas.

2.3 Ampliación del conjunto de validez

Se trata del proceso siguiente: se tiene una propiedad válida para cierto dominio A de objetos (una afirmación del tipo $\forall x \in A, p(x)$): se extiende o se amplía el dominio A a un dominio B ($A \subset B$) de tal manera que la escritura $p(x)$ tenga sentido para los x de B; se pregunta entonces si la propiedad continúa siendo cierta para todos los objetos de la clase B (¿$\forall x \in B, p(x)$?). En términos más breves, se pregunta si la propiedad continúa siendo cierta en un caso para el cual no ha sido establecida. En la enseñanza, este procedimiento es muy común. Se le encuentra, por ejemplo, cuando se introducen los diferentes sistemas de números.

más amplio nos preguntamos si encontramos las mismas propiedades que teníamos antes de prolongar.

Ejemplo 1: La noción de anillo en álgebra tiene por primer objeto generalizar los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ provistos de la adición y la multiplicación. Así, un anillo es un grupo conmutativo $(A,+)$ provisto de una segunda ley de composición interna denotada de manera multiplicativa, la cual es asociativa, distributiva en relación a la adición y que posee un elemento unidad denotado por 1. Se dice que el anillo es conmutativo si la multiplicación es conmutativa. Así, los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ provistos de la adición y de la multiplicación pertenecen a una clase especial de anillos conmutativos llamados *anillos íntegros* que tienen la propiedad siguiente: El producto de dos elementos es igual a cero si y solamente si, uno de ellos es cero. Ciertos resultados que nos son familiares para los conjuntos de números $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ y que son verdaderos también para cualquier anillo íntegro son puestos en duda en el caso general de un anillo conmutativo.

Por ejemplo, sobre cada anillo conmutativo no nulo A, se puede construir el anillo de los polinomios con coeficientes en A (denotado por $A[X]$). Si $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pertenece a $A[X]$, se dice que un elemento x de A es raíz de P si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ es cero. La aplicación $\tilde{P}$ de A en A que a cada x hace corresponder $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se llama aplicación polinomial asociada a P. Cuando el anillo de base es un anillo íntegro (por ejemplo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) se sabe que un polinomio de grado n, no puede admitir más de n raíces.

¿Esta propiedad continúa siendo cierta cuando se toma un anillo más general como anillo de base?

Para adecuarlo a nuestro esquema: Sea $\mathcal{A}$ la clase de todos los anillos conmutativos, $\mathcal{A}_I$ la clase de todos los anillos íntegros y $p(A)$ la propiedad, "todo polinomio de grado n que pertenece al anillo $\mathcal{A}[X]$ admite a lo más n raíces". Se sabe que la afirmación siguiente es verdadera: $\forall A \in \mathcal{A}_I, p(A)$. De acuerdo con la definición de anillo y de anillo íntegro se sabe que $\mathcal{A}_I \subset \mathcal{A}$. Con esta consideración planteamos la pregunta: ¿ $\forall A \in \mathcal{A}, p(A)$? La respuesta es "NO".

Para demostrarlo es suficiente con dar un ejemplo de anillo en el cual la propiedad no sea válida. Tomemos el anillo $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; la ecuación $x^2=4$ posee cuatro soluciones: $x_1=\bar{2}$, $x_2=\bar{4}$, $x_3=\bar{8}$ y $x_4=\overline{10}$. De la misma manera la ecuación $x^2+\bar{3}x+\bar{2}=\bar{0}$, posee cuatro soluciones $y_1=\bar{2}$, $y_2=\bar{7}$, $y_3=\overline{10}$, $y_4=\overline{11}$.

El resultado que afirma que a es raíz de P si y solamente si $X-a$ divide a P permanece válido, pero tenemos dos factorizaciones diferentes: $X^2+\bar{3}X+\bar{2}=(X-\bar{2})(X-\bar{7})=(X-\overline{10})(X-\overline{11})$.

Ejemplo 2. En esta categoría ubicamos también el procedimiento que consiste en generalizar resultados a partir de casos particulares. Por ejemplo, en Marsden-Tromba [27] hemos encontrado el procedimiento siguiente: se define primero la noción de derivadas parciales de orden superior a uno de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Se exhiben dos ejemplos de cálculo de todas las derivadas parciales de orden 2 de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de las cuales se presentan aquí las cuatro derivadas parciales mixtas. Las funciones son

$$f(x,y)=x^n y^n \quad \text{y} \quad \varphi(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$$

Las derivadas segundas mixtas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = mnx^{m-1}y^{n-1} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2y^2 - x^2}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Se constata que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Enseguida se plantea la pregunta: ¿Este resultado es verdadero en general, es decir, es verdadero para cualquier función real con dos variables, que admita derivadas parciales de orden 2? En este momento se presenta un contraejemplo a esta afirmación:

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{y} \quad f(0,0) = 0$$

Para esta función tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

En la búsqueda de las condiciones para que la igualdad sea verdadera se establece el teorema:

"Sea f una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Si f admite en el punto x derivadas parciales continuas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$"

No es difícil verificar, en el ejemplo anterior que las derivadas parciales de segundo orden no son continuas en el punto (0,0).

Observación. A veces cuando se amplía de esta manera la clase A, la propiedad considerada en el conjunto B no tiene sentido. Esto se debe al hecho de que ciertas nociones que se utilizan para formular la conjetura no pueden ser ampliadas al nuevo dominio B.

Ejemplo: Sea (x_n) una sucesión de elementos de $\mathbb{R}$. Se conoce el siguiente resultado:

(x_n) *acotada superiormente* $\Longrightarrow$ (x_n) *tiene una mínima cota superior.*

Se puede considerar el conjunto $\mathbb{R}$ como un subconjunto del conjunto $\mathbb{C}$. Pero la afirmación

(x_n) *acotada superiormente* $\Longrightarrow$ (x_n) *tiene una mínima cota superior,*

no tiene ningún sentido, porque no existe un orden en $\mathbb{C}$ comparable con aquel que existe en $\mathbb{R}$.

2.4 Necesidad de las hipótesis

Un teorema en general tiene varias hipótesis. Para comprender bien su mecanismo y visualizar mejor su campo de aplicación es a menudo interesante saber si ninguna de ellas es superflua [8]. Si suprimimos algunas de ellas, estamos ante un nuevo "teorema", del cual hay que decir si es verdadero o falso. Eso da lugar a una situación de contraejemplo.

Ejemplo 1

Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas, simplemente convergentes hacia f sobre X.

Teorema: Si f_n converge uniformemente sobre X a f, entonces f es continua.

¿Es que la hipótesis de la convergencia uniforme es superflua? La respuesta es "no".

Un contraejemplo lo proporciona la sucesión de funciones (f_n) definida por, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = x^n, x \in [0,1].$$

Se tiene, para $x \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$ y, si $x = 1$, $\lim_{n\to+\infty} 1^n = 1$. Entonces, la sucesión converge simplemente, pero no uniformemente, a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

la cual, es una función discontinua.

Ejemplo 2 [8]. La convergencia simple no implica la convergencia uniforme pero el teorema de Dini nos da condiciones suficientes para que la convergencia simple hacia f de una sucesión (f_n) de funciones numéricas sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ implique la convergencia uniforme. Esas condiciones son:

1. f_n es continua.
2. A es compacto.
3. $\forall x \in A$, la sucesión $(|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Mostremos que cada una de estas tres condiciones es necesaria para el establecimiento del teorema de Dini.

Supresión de la condición 2: Definamos $f_n:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Entonces para x fijo la sucesión $\left(\frac{1}{nx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece y converge a 0, lo que muestra la convergencia simple de la sucesión (f_n) a 0. Las condiciones 1 y 3 del teorema de Dini se verifican, pero la convergencia de (f_n) no es uniforme pues $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ para todo n por lo tanto la sucesión (a_n) en donde $a_n = \sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$, no tiende a 0.

Supresión de la condición 3: Definamos, para $n \geq 2$, $f_n(x) = (n+1)x$, para $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = -(n+1)x + \frac{2(n+1)}{n}$, para $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ y $f_n(x) = 0$ para $x \in [\frac{2}{n}, 1]$.

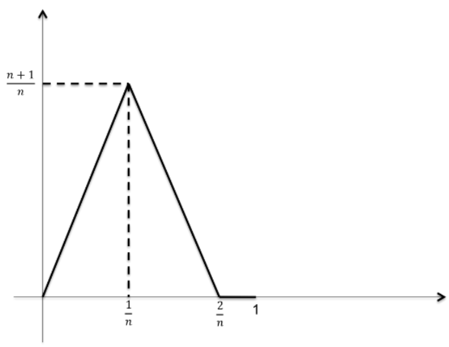

Figura 4: Supresión de la condición 3

Para $x > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{2}{N} \leq x$ entonces para $n \geq \mathrm{N}$, $f_n(x) = 0$, lo que muestra que la sucesión $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Como $f_n(0) = 0$, la sucesión de funciones (f_n) converge sobre el compacto [0,1] a la función nula. Por otra parte, $a_n = \sup\limits_{x\in]0,1[} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} \geq 1$ por lo tanto la convergencia de la sucesión (f_n) no es uniforme, aunque las condiciones 1 y 2 del teorema de Dini se verifiquen así como una condición ligeramente diferente de 3 que es que la sucesión $(\sup|f_n(x) - f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente; su límite 1 es evidentemente no nulo.

Supresión de la condición 1: El conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ es numerable. Llamemos x_1, x_2, x_3,…, sus elementos y definamos para $n \in \mathbb{N}$, f_n, por $f_n(x) = 0$, si $x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $f_n(x) = 0$ si $x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, y $f_n(x_q) = 1$ si $q > n$.

Para $x \notin \mathbb{Q}$, la sucesión $(f_n(x))_n$ es nula y convergente a 0; para x racional, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $x = x_q$ y si $n \geq q$ se tiene que $f_n(x) = f_n(x_q) = 0$, lo que muestra que la sucesión $(f_n(x))_n$ converge a 0: la sucesión de funciones (f_n) converge a la función nula. Sin embargo, la convergencia no es uniforme puesto que $f_n(x_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ aunque las condiciones 2 y 3 del teorema de Dini se verifiquen.

Observaciones.

- Un análisis similar puede hacerse, por ejemplo, a las hipótesis de teoremas como el de Rolle, del valor medio o de Cauchy.
- Desde el punto de vista matemático, esta categoría "Necesidad de las hipótesis" es equivalente a la extensión de propiedades o ampliación de conjunto. En el ejemplo del teorema de Dini, cada vez que se suprime una de las hipótesis el campo en el que se quiere aplicar el resultado es ampliado. En el ejemplo de los anillos y de los anillos íntegros cuando se tienen las propiedades, tratadas primero en los anillos íntegros y enseguida en los anillos en general, es porque se suprime la condición de integridad. La distinción se da en el ámbito didáctico.

2.5 "Cota" de una definición

Cuando se formula la definición de una noción, nos situamos primero en un conjunto de objetos. Una vez se formula la definición para el conjunto A, A se divide en dos partes disjuntas. En la primera están todos los objetos del conjunto A que satisfacen la definición; en la otra están todos los objetos que no satisfacen esta definición. A menudo se presentan ejemplos pero se exhiben también objetos que no satisfacen la definición (contraejemplos) contribuyendo así a una mejor comprensión. En efecto según Lakatos [13], para conocer verdaderamente en profundidad cierta noción debemos estudiarla no solamente en su forma normal, usual, común sino en sus estados críticos. Si se quiere, por ejemplo, comprender la noción de una función continua, es necesario considerar igualmente funciones discontinuas. Así, una función discontinua es un contraejemplo de la noción de función continua. Estos contraejemplos actúan como cotas de la definición y contribuyen a precisar mejor el sentido.

Por ejemplo, cuando se define la noción de sucesión convergente nos situamos en el conjunto A de todas las sucesiones (numéricas, por ejemplo) y se explicitan todas las características que una sucesión debe tener para que sea convergente (es decir para todo $\varepsilon > 0, \exists N \geq 0$: ...), pero la definición es considerada muy abstracta y es necesario exhibir un ejemplo, es decir, una sucesión que satisfaga la definición. Este ejemplo servirá para volver más clara la definición, pero ella adquirirá mucho más sentido si se toma conciencia de que existen sucesiones que no son convergentes.

Ejemplo: La sucesión cuyo término general es $(-1)^n$ no es convergente (se dice que es oscilante). Una sucesión que no es convergente se llama divergente.

De la misma manera la noción de anillo íntegro toma más sentido cuando se sabe que existen anillos que no son íntegros; se comprende mejor la utilidad de la noción de función cuando se sabe que existen relaciones que no son funciones; un alumno que nunca ha encontrado funciones no derivables podrá pensar que todas las funciones son derivables, etc. Así, cada vez que se está en presencia de una definición, se tiene la posibilidad de tener una situación de contraejemplo preguntándonos si existen objetos que no satisfacen la definición que se acaba de formular.

2.6 ¿Propiedad análoga verdadera?

La analogía es un procedimiento muy utilizado en matemáticas. Se pueden constatar que la historia de los conocimientos matemáticos, los matemáticos más creadores y fecundos han puesto en evidencia el papel eminente de la analogía para el descubrimiento de nuevas verdades [10] (Knobloch, 1991) y [18] (Polya 1958). En la enseñanza este procedimiento es una herramienta frecuentemente empleada para explicar mejor las significaciones de las nociones y el funcionamiento de las propiedades. Sobre todo, cuando se considera que las nociones puestas en juego son de un nivel de abstracción muy elevado.

La analogía puede también dar lugar a situaciones de contraejemplo de la manera siguiente: se tienen ciertas propiedades válidas para una clase de objetos A ($\forall x \in A, p(x)$). Se observa cierta analogía entre los objetos de la clase A y los objetos de otra clase B. Se pregunta si los objetos de la clase B poseen las propiedades válidas en A (¿($\forall x \in B, p(x)$?).

Ejemplo 1: En un curso de análisis matemático la introducción de la integral generalizada, o integral impropia de la forma

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

puede hacerse después de haber estudiado las series. Se puede entonces apoyar sobre una cierta analogía entre estas dos nociones. Se trata entonces de determinar qué propiedades verdaderas en el caso de las series pueden ser transferidas por analogía a las integrales generalizadas de este tipo. Se hace primero una lista de las principales propiedades (válidas para las series no necesariamente de términos positivos):

1. Modificación de número finito de términos: No se modifica la naturaleza de una serie modificando un número finito de sus términos.
2. Criterio de Cauchy: Toda serie que verifica el criterio de Cauchy es convergente.
3. Operaciones sobre las series convergentes: La suma de dos series convergentes es convergente. El producto de un número por una serie convergente es convergente.
4. Series absolutamente convergentes: Si una serie es absolutamente convergente, es convergente (ver la definición de convergencia absoluta en el ejemplo del apartado 1.2 en la pag. 10).
5. Condición necesaria de la convergencia:

$$\sum a_n \text{ es convergente } \Longrightarrow a_n \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Para cada una de estas propiedades se pregunta o se pide encontrar una propiedad análoga para las integrales generalizadas. Antes de responder a esta pregunta es necesario primero saber en qué términos esas propiedades deben ser formuladas. Es decir, precisar bien qué nociones que se relacionan con integrales jugarán el rol análogo a aquellas de las series. Así, por ejemplo, la propiedad análoga a la propiedad de la modificación de un número finito de términos se expresa por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ y } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ son de la misma naturaleza,}$$

la condición del criterio de Cauchy es formulada por: Sea $F(X) = \int_a^X f(x)dx$, $X \in [a, +\infty[$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists X_0 \in \mathbb{R}, \forall X, Y \geq X_0\ |F(X) - F(Y)| \leq \varepsilon)$$

Pero de hecho es solamente la condición necesaria de convergencia la que plantea la utilización de un contraejemplo, todas las otras son propiedades verdaderas en el caso de las integrales generalizadas. En efecto, la propiedad análoga para las integrales puede ser formulada de la manera siguiente:

$$\text{Si } \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ existe, entonces } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La pregunta que se plantea es: ¿Esta propiedad es verdadera? Es posible demostrar con la ayuda de un contraejemplo que la respuesta a la pregunta es “ NO”.

Por ejemplo, tomemos f como en la figura siguiente.

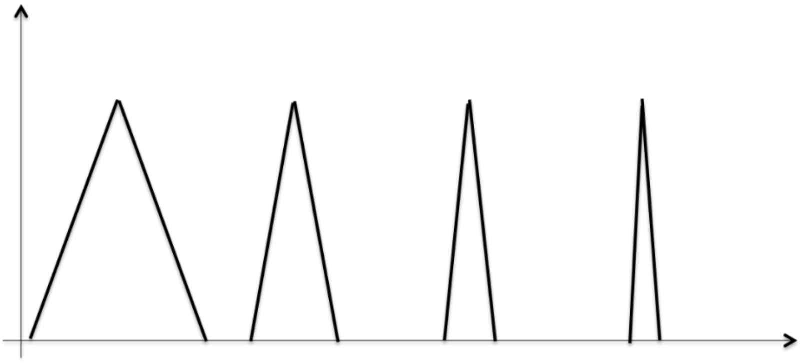

Figura 5: Integral impropia convergente y $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$

Esta función es no negativa, su integral es convergente (si las bases de los triángulos son adecuadamente elegidas, por ejemplo 2^{-n}) y no tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$.

Se termina esta parte del curso diciendo que este resultado es verdadero si se agrega la condición de la existencia del límite de la función en el infinito, es decir:

$$\text{Si} \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ existen, entonces } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Ejemplo 2: Se dota al espacio $\mathbb{R}^2$ del *orden lexicográfico*, denotado por $\leq_L$ y definido por la relación: $(a,b) \leq_L (c,d) \Leftrightarrow (a < c)$ o $(a = c, b \leq d)$. Es posible demostrar que $\leq_L$ es una relación de orden total sobre $\mathbb{R}^2$. En este sentido esta relación de orden es análoga a la relación de orden tradicional para $\mathbb{R}$. Ahora bien, en $\mathbb{R}$ se tiene la propiedad de que todo subconjunto acotado superiormente admite una mínima cota superior. ¿Esta propiedad continúa siendo verdadera para los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dotado del orden lexicográfico? La respuesta es " NO".

Tomemos el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por la igualdad $P =]-1,1[\times \{0\}$. Mostremos que el conjunto de cotas superiores es igual al conjunto $M = \{(x,y): x \geq 1\}$. Sea (x,y) una cota superior de P; tenemos que, si $a \in]-1,1[$, $(a,0) \leq_L (x,y)$, lo cual se escribe $a < x$ o ($a = x$ y $0 \leq y$). Si $x < 1$ se tendrá una contradicción eligiendo un elemento a de $]-1,1[$ tal que $x < a < 1$, por lo tanto $x \geq 1$.

Recíprocamente, es claro que todo elemento de M es una cota superior de P. Mostrar ahora que P no admite mínima cota superior es lo mismo que probar que M no tiene un elemento más pequeño.

Supongamos que (x,y) sea el elemento más pequeño de M; entonces como $(x,y-1)$ es un elemento de M, $(x,y) \leq_L (x,y-1)$, lo que implica que $y \leq y-1$. Se obtiene una contradicción: por lo tanto M no admite un elemento más pequeño y P no tiene mínima cota superior.

2.7 Efecto de sorpresa

Ciertas nociones después de su primer estudio dan la impresión de que un resultado debe ser verdadero. A veces ese resultado resulta falso. Si esta íntima convicción surge, es que la noción intuitiva que se tiene es errónea [8]. Este tipo de situación tiene un carácter subjetivo, porque de un lado las intuiciones no son de la misma naturaleza para cada individuo y, por otro lado, depende también de la familiaridad que se tiene con la noción en cuestión. En muchas ocasiones, exhibir algunos contraejemplos a estas ideas preconcebidas permite rectificar esta intuición errónea. Cuando se revisan tareas o exámenes encontramos en muchas ocasiones este tipo de situación. Ciertos alumnos que estudian análisis piensan, por ejemplo, que una sucesión positiva decreciente debería tender a cero.

Ejemplo 1: Consideremos la afirmación: "Toda función continua en 0 es continua sobre una vecindad de 0".

Muchas personas tienen la impresión de que esta afirmación es verdadera, porque la noción intuitiva que se tiene de continuidad de una función a menudo hace referencia a una noción geométrica que se asimila al hecho de poder dibujar su gráfica sin despegar el lápiz del papel. Sin embargo, la afirmación es falsa.

Contraejemplo: Definamos f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$, si x es racional y $f(x) = 0$, si no. Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $|f(x)| \leq |x|$ por lo tanto para $\varepsilon > 0$, si $|x| < \varepsilon$ entonces $|f(x)| < \varepsilon$, lo que prueba la continuidad de f en 0. Por otro lado, si $a \neq 0$, f no es continua en a y esto se demuestra de la manera siguiente. Se quiere mostrar que f no es continua en $a \neq 0$, es decir

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \; y \; |f(x) - f(a)| > \varepsilon$$

Se conoce la propiedad "entre dos reales existe un racional y un irracional". Sea $a \in \mathbb{Q}$ y $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Entonces, existe $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ y $x \notin \mathbb{Q}$; se tiene entonces, $|x - a| < \varepsilon$ y $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Se opera de igual manera con $a \notin \mathbb{Q}$ considerando un racional $x \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Ejemplo 2. Este ejemplo ha sido planteado en muchas ocasiones a muchos futuros profesores de matemáticas: Si (f_n) converge uniformemente a f sobre $]\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 0$ ¿(f_n) converge uniformemente a f sobre $]0, +\infty[$?

La gran mayoría de los estudiantes están convencidos de que la respuesta a esta pregunta es "SI". Siempre resultan sorprendidos cuando se les exhibe el contraejemplo siguiente:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + n^2x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, no es difícil demostrar que la sucesión cuyo término general es la función presentada converge simplemente a 0 sobre $\mathbb{R}$ y uniformemente sobre $]\alpha, +\infty[$, $\forall \alpha > 0$. Sin embargo, no converge uniformemente sobre $]0, +\infty[$ (para detalles, ver el ejemplo 2 del epígrafe 2.9. "Otras situaciones").

2.8 ¿Estabilidad?

Se trata de una situación que se presenta muy frecuentemente en todos los dominios de las matemáticas. Se tiene un conjunto de objetos que tienen cierta propiedad, y sobre este conjunto se define cierta operación (suma, producto, composición, etc.) o bien una "transformación" de sus elementos (derivación de funciones, transformaciones geométricas del plano. etc.). En muchos casos los objetos resultantes conservan la propiedad de los objetos de partida (la suma de dos sucesiones convergentes es una sucesión convergente, la unión de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto, la derivada de una función polinómica es una función polinómica, una homotecia conserva la medida de los ángulos y el paralelismo, un isomorfismo entre dos conjuntos ordenados conserva la relación de orden, etc.) pero existen también muchos casos en los que las propiedades no son estables para ciertas operaciones o transformaciones.

Ejemplo 1. ¿El producto de dos elementos de orden finito de un grupo es de orden finito? Sean f y g los elementos de $S_{\mathbb{Z}}$ (grupo de permutaciones de $\mathbb{Z}$) definidas por

$f(m) = m + 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$ $\qquad$ $g(m) = m - 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$

$f(m) = m - 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$ $\qquad$ $g(m) = m + 1$ si $m \in 2\mathbb{Z}$

Se tiene entonces $f \circ f = g \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$ por lo tanto, f y g son elementos de orden 2 de $S_{\mathbb{Z}}$, pero para todo entero k se tiene que $(g \circ f)^k(0) = 2k$, por lo tanto, el subgrupo $\langle g \circ f \rangle$ es infinito.

Ejemplo 2. ¿La imagen de un conjunto cerrado por una función continua, es un conjunto cerrado?

Contraejemplo: La función continua arctan envía el conjunto cerrado $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ el cual no es cerrado.

Se pueden citar numerosas situaciones de ese tipo: ¿La suma de dos sucesiones divergentes es divergente? ¿El producto de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente? ¿En $\mathbb{C}[X]$, la suma de dos polinomios irreducibles es irreducible?¿En un espacio vectorial, la intersección de dos familias linealmente dependientes es linealmente dependiente?

Observación: Inversión del orden de paso al límite en relación a otras operaciones.

La cuestión de saber si es posible invertir el paso al límite en relación a otras operaciones se presenta en numerosas ocasiones. En realidad, se trata de cierto tipo de estabilidad que se podría llamar *estabilidad por paso al límite*. El interés primordial es responder a preguntas del tipo siguiente: si cada una de las funciones de una sucesión (f_n) posee cierta propiedad (por ejemplo, continuidad, diferenciabilidad o integrabilidad), ¿la propiedad es transferida a la función límite f? A veces se obtienen propiedades que son verdaderas, pero en muchos casos los resultados obtenidos son falsos.

Ejemplo 1. Sea f una función (de un espacio métrico en otro espacio métrico) y x_0 un elemento del dominio de f ¿Para toda sucesión (x_n) convergente a x_0, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$? O de manera equivalente; ¿tenemos la propiedad $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$? En este caso, la propiedad en cuestión es la caracterización por sucesiones de la noción de continuidad en un punto. Entonces se puede afirmar que la propiedad es verdadera si y solamente si, la función f es continua en x_0.

Ejemplo 2. Sea (f_n) que converge simplemente a f ¿La continuidad de cada una de las funciones f_n en x_0, implica la continuidad de la función f en x_0? O bien ¿$\forall n, \lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$? Sin hipótesis suplementarias (como la convergencia uniforme), estamos obligados a responder no a la pregunta planteada de esta forma tan general. Podríamos encontrar un contraejemplo en el ejemplo 1 del epígrafe "*Necesidad de la hipótesis*".

Ejemplo 3. Sea (f_n) una sucesión que converge a f ¿$\forall n, \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$? o bien ¿$\forall n, \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx$?

De nuevo, la respuesta a la pregunta es negativa. Construimos un contraejemplo considerando una sucesión de funciones f_n: $[0,1] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica tiene el aspecto siguiente:

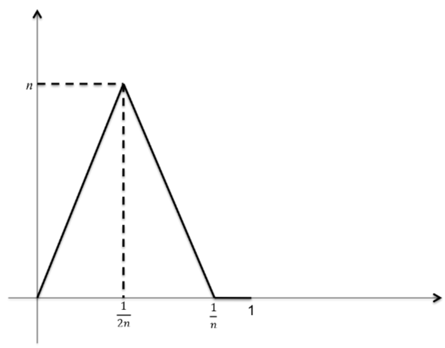

Figura 6: Convergencia e integración

No es difícil mostrar que tal sucesión tiene por límite la función nula por lo que la integral de la función límite es 0. Pero la integral de cada función de la sucesión es igual a $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, en este caso, no se puede invertir el paso al límite con la integración de funciones.

Observación: Durante todo el siglo XVIII, la tesis de que el límite de cualquier sucesión de funciones continuas es una función continua, era considerada verdadera. Se consideraba un caso especial del "principio de continuidad" de Leibniz y, en particular, del principio según el cual, si una cantidad variable posee en todos sus grados cierta propiedad su límite poseerá esta misma propiedad. Cauchy fue el primero (1821) que intentó hacer la demostración de que toda serie convergente de funciones continuas tiene siempre una función límite continua. La existencia de contraejemplos a la afirmación de Cauchy (proporcionados fundamentalmente por Fourier: $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$) demostró su falsedad y dio lugar a un debate en el cual participaron matemáticos tales como Abel y Dirichlet. Seidel, veintiséis años después de la "prueba" de Cauchy, resolvió finalmente el problema con el descubrimiento de la convergencia uniforme [13].

Ejemplo 4. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$, con valores en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, y sea x_0 un punto de la adherencia de I en $\mathbb{R}$. Supongamos que para cada x de I, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge a $f(x)$, y que para cada n, $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. ¿Podemos decir entonces que, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, y que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$? Dicho de otra manera ¿podemos decir que $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$? La respuesta es negativa (por lo menos sin hipótesis suplementarias). Tomemos por ejemplo $I =]-1,1[$, $f_n(x) = (-1)^n x^n$ y $x_0 = 1$. Entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x}$ y $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = (-1)^n$. No podemos entonces invertir en este caso la suma con el paso al límite.

2.9 Otras situaciones

Agrupamos en esta rúbrica, las situaciones que no entran en ninguna de las ocho rúbricas anteriores. Por ejemplo, cuando se pregunta si una aplicación es inyectiva de E en E, se puede, para demostrar que no lo es, encontrar elementos a y b de E distintos, tales que, $f(a) = f(b)$. Cuando se procede así, la terminología "contraejemplo" es raramente utilizada. Sin embargo, en el plano estrictamente matemático y en el plano de la heurística, la situación es del mismo tipo que las ocho anteriores.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ ¿Es f inyectiva? Este problema es equivalente a:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - x$¿Es verdadera la siguiente propiedad $P: \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$? Para demostrar que esta propiedad es falsa, es suficiente encontrar un par (x,y) de números reales tal que $f(x) = f(y)$ pero $x \neq y$: Sean $x = 1$, $y = -1$. Observamos que $f(1) = 0 = f(-1)$ pero $1 \neq -1$. En realidad, la propiedad P de la que se trata en el problema es la definición de función inyectiva.

Existen en matemáticas definiciones que pueden dar lugar a este tipo de situaciones. Podemos mencionar, por ejemplo: Sea $f: A \to B$

- f inyectiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall (x,y) \in A^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- f sobreyectiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\left(\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)\right)$,
- f creciente (respectivamente, decreciente) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall (x,y) \in A^2, x \leq y \ \Rightarrow f(x) \leq f(y))$ (respectivamente, $f(x) \geq f(y)$).

El caso es similar cuando se dispone de caracterizaciones (condiciones equivalentes) o de condiciones necesarias para que un objeto posea cierta propiedad. Por ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- f continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.
  La caracterización por sucesiones es:

$$\forall (x_n) \text{ de elementos de } A, \left(\left(\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)\right)\right)$$

- f_n converge uniformemente hacia f en $A \Rightarrow \forall (x_n)$ de elementos de A, $\lim_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$
- f admite un límite l en x_0 $\Rightarrow \forall V$ vecindad de x_0, la restricción φ de f a V, admite también a l como límite en el punto x_0.
- (a_n) converge a $l \Rightarrow$ $\forall (a_{n_k})$ subsucesión de (a_n), a_{n_k} converge a l.
- A acotado $\Rightarrow \forall (x_n)$ de elementos de A, x_n no tiende a $+\infty$.

Podríamos mencionar muchos más, pero nos limitaremos a dar algunos ejemplos clásicos que pueden incluirse en esta categoría.

Ejemplo 1. "¿La función $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ es continua en 0?"

Observamos que la respuesta es "NO" y para demostrarlo es suficiente encontrar una sucesión (x_n) de números reales, tal que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ pero $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq 0$.

Se demuestra así que la propiedad. "$\forall (x_n)$ de números reales, $x_n \to 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$" es falsa.

Ejemplo 2. Sea (f_n) definida por, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{1 + n^2 x^2}$, ¿Esta sucesión converge uniformemente a la función cero sobre $\mathbb{R}$?

La respuesta es " NO " y para demostrarlo, es suficiente encontrar una sucesión (x_n) de números reales tal que $|f_n(x_n)|$ no tiende a cero (condición necesaria para la convergencia uniforme).

En este caso es suficiente tomar $x_n = \frac{1}{n}$ pues $f_n(x_n) = \frac{\operatorname{sen}(1)}{2}$ no tiende a cero.

Ejemplo 3. Otro ejemplo muy clásico de ese tipo de situación es:

$$f: \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

"¿f tiende a cero en (0,0)?" Si esto fuera verdadero. Para toda recta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$, que pasa por el origen tendríamos $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D}} f(x,y) = 0$. Ahora bien, si $y = \lambda x$, $f(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Ahora bien $\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq 0$ si $\lambda \neq 0$, por ejemplo, si $\lambda = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la función f no tiende a 0 en (0,0).

3. Consideraciones finales

En la enseñanza de las matemáticas el profesor no sólo debe comunicar los conocimientos matemáticos sino que debe hacerlos producir, al menos en parte, como resultantes de una actividad humana a la cual se quiere iniciar a los estudiantes. Sin embargo, en la presentación axiomática, los contraejemplos son borrados de la historia de la construcción de los conocimientos. Una vez que el trabajo de construcción está terminado, el andamiaje de los contraejemplos desaparece del texto; este sólo puede ser restablecido -al menos en parte- por el lector (profesor o estudiante), como actividad de interrogación y de comprensión del texto. Esta restauración, evidentemente es muy parcial. Desde este punto de vista, si los procesos de producción matemática por los alumnos deben parecerse (aunque sea en lo mínimo) a los utilizados por los matemáticos, entonces no se parecerán mucho a los textos por los cuales las matemáticas se manifiestan a ellos y a sus profesores. Por consecuencia, provocar, manejar e interpretar actividades matemáticas de los estudiantes, exigirá de sus profesores dos tipos de conocimientos irreductiblemente muy diferentes, uno relativo a los textos y el otro relativo al proceso de construcción de los conocimientos matemáticos. La clasificación de las situaciones de contraejemplo presentada en este trabajo, pretende aportar elementos en ese sentido a los profesores y estudiantes de universidad.

Por otro lado, es conveniente separar, por una parte, el aspecto puramente matemático y lógico y, por otra las situaciones de enseñanza en las que aparece el contraejemplo. Esta separación ilustra el interés de la didáctica de la matemática que otorga una importancia especial en nuestra enseñanza a las situaciones en las cuales se desarrolla la transmisión del saber. En este sentido, todas las categorías que acabamos de definir en este documento, pueden ser consideradas englobadas en la misma situación matemática o lógica. Desde el punto de vista didáctico, hemos hecho la distinción tomando en cuenta el funcionamiento en el contexto de la enseñanza. Sin embargo, esta categorización no es ni exhaustiva ni disjunta. Podríamos considerar otras más. Además, una situación dada puede ser clasificada en más de una de estas categorías. Por ejemplo, hay situaciones que pueden clasificarse en la categoría "ampliación de conjunto" pero también en la categoría "necesidad de las hipótesis". De la misma manera, la categoría "restricción de definiciones" puede considerarse un caso particular de la categoría "recíproca de un teorema", pero la aparición de definiciones cada vez más restrictivas para acotar resultados más precisos es una situación que aparece frecuentemente en la enseñanza de las matemáticas, por lo que hemos querido hacer una categoría aparte. Otro ejemplo está relacionado con el siguiente enunciado *¿Todo límite de una sucesión de funciones continuas es también una función continua?* Podemos presentar este problema:

- Insistiendo sobre la estabilidad de la continuidad por paso al límite. La situación puede ser ahora asociada a la rúbrica *"¿estabilidad?"*,
- Insistiendo sobre el hecho sorprendente de que incluso si todas las funciones son continuas el límite no es forzosamente una función continua. La situación puede ser entonces asociada a la rúbrica "*efecto de sorpresa*".

Referencias

[1] ARSAC, Gilbert, MANTE, Michel. Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), pp. 247-280, Springer, Holanda, 1997.

[2] BALACHEFF, Nicolas. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Ed Una Empresa Docente, Bogotá, 2000.

[3] BUSTOS, Álvaro y ZUBIETA, Gonzalo. Descubrimiento de Conocimiento Matemático Mediante la Reformulación de Conjeturas Falsas en un Ambiente de Pruebas y Refutaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), pp. 117-136, RACO, España, 2015.

[4] DURAND-GUERRIER, Viviane. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education* 40, pp. 373–384, Springer, Holanda, 2008. DOI 10.1007/s11858-008-0098-8

[5] GARCÍA, Orlando y MORALES, Luisa. El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13, pp. 161-175, FISEM, España, 2013. http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/35/archivo14.pdf

[6] GELBAUM, Bernard y OLMSTED, John. *Counterexamples in analysis*. Holden Dav, Inc, Estados Unidos, 1964.

[7] HERNÁNDEZ, Juan, LOCIA, Edgardo, MORALES, Armando y SIGARRETA, José María. El Contraejemplo en la Elaboración de la Definición de Función Convexa por Estudiantes Universitarios. *Información tecnológica*. 30(1), pp. 185-202, CIT, Chile, 2019. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642019000100185

[8] HAUCHECORNE, Bertrand. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses Edition Marketing, Francia, 2007

[9] KLEENE, Stephen. *Introduction to Metamathematic*s.: North-Holland Publishing Company, Holanda, 1997.

[10] KNOBLOCH, Eberhard, (1991) L'analogie et la pensée mathématique. *Mathématiques et philosophie. De l'antiquité à l'age classique*. Pp. 217-237, Editions du CNRS, Francia, 1991.

[11] KNUTH, Eric J. y KO, Yi-Yin. Validating Proofs and Counterexamples Across Contente Domains: Practices of Importance for Mathematics Majors. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32, pp. 20-35. Springer, Estados Unidos, 2013.

[12] KOMATSU, Kotaro. Counter-examples for Refinement of Conjectures and Proofs in

Primary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), pp. 1-10, Springer, Estados Unidos, 2010.

[13] LAKATOS, Imre. *Pruebas y refutaciones: Ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático*. Cambridge University Press, Madrid, 1976.

[14] LOCIA, Edgardo y ANTIBI, André. Resolución de problemas de existencia de objetos que verifican una propiedad dada y de búsqueda de contraejemplos. *La demostración en contexto escolar*. Pp. 65-89 Universidad Autónoma de Guerrero, México, 2019.

[15] LOCIA, Edgardo; MORALES, Armando; MERINO, Héctor y MARMOLEJO, Efrén. Situación de contraejemplo y su utilidad en la actividad de enseñanza de la matemática. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 17(61), pp. 1-17, FISEM, España, 2021.

[16] MARTÍNEZ, Rosa y Patricia DETZEL. El Lugar que Ocupa el Contraejemplo en la Enseñanza de la Matemática, *III Reunión Pampeana de Educación Matemática,* Volumen III, pp. 531-537 Santa Rosa, La Pampa, Argentina, 2010.

[17] MORALES, Armando; LOCIA, Edgardo; RAMÍREZ, Melvis; SIGARRETA, José María y MEDEROS, Otilio. The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology*. 9, pp. 1510-1517, Kalsha Publications, India, 2018.

[18] POLYA, George. *Les mathématiques el le raisonnement plausible*. Gauthier.Villars. París, 1958.

[19] WEBER, Keith. How Syntactic Reasoners can Develop Understanding, Evaluate Conjetures, and Generate Counterexamples in Advanced Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior,* 28, pp. 200-208, Springer, Estados Unidos, 2009.

[20] ZAZKIS, Rina. Y CHERNOFF, Egan. What Makes a Counterexample Exemplary? *Educational Studies in Mathematics,* 68, pp. 195-208, Springer, Holanda, 2008.

Libros revisados para la búsqueda de Situaciones de Contraejemplo

[21] APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático*. Reverté Ediciones. España, 1972

[22] APOSTOL, Tom. *Calculus*, volúmenes I y II. Reverté Ediciones. España, 1999

[23] BIRKOHFF, Garrett y MACLANE, Saunders. *A survey of Modern Algebra*. Mac Millan Company. Estados Unidos, 1970.

[24] CALVO, Adina y CALVO Bernard. *Algèbre générale*. Masson, Francia, 1996

[25] CALVO, Adina y CALVO Bernard. *Algèbre linéaire*. Masson, Francia, 1995

[26] FRALEIGH, John. *Álgebra Abstracta*, primer curso. Adison Wesley Iberoamericana. Estados Unidos, 1988.

[27] MARSDEN, Jerrold y TROMBA, Anthony. *Cálculo vectorial*. Adison Wesley Iberoamericana. Estados Unidos, 1991

[28] SPIVAK, Michael. *Calculus, Cálculo infinitesimal*. Reverté Ediciones. España, 1992

Sobre el/los autor/es:

Nombre: Edgardo Locia Espinoza
Correo Electrónico: lociae999@hotmail.com

Institución: Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Nombre: Armando Morales Carballo
Correo Electrónico: armando280@hotmail.com
Institución: Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Nombre: Efrén Marmolejo Vega
Correo Electrónico: efrenmarmolejo@yahoo.com
Institución: Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Nombre: Héctor Merino Cruz
Correo Electrónico: hmerinoc@gmail.com
Institución: Universidad Autónoma de Guerrero, México.