Lecturas Matemáticas
Volumen **43** (2) (2022), páginas 91-109
ISSN 0120-1980

Una introducción de la función de Lambert para bachillerato y primeros cursos universitarios de Cálculo

An introduction to the Lambert function for high school and first-year calculus college courses

Javier Cayetano Rodríguez[1] y José Manuel Sánchez Muñoz[2]

[1]Universidad Nacional de Educación a Distancia, España
[2]Universidad Politécnica de Madrid, España

RESUMEN. En este artículo analizaremos si, combinado con el uso de programas como GeoGebra, el introducir el estudio de la función de Lambert en bachillerato y primer curso de Cálculo de diferentes titulaciones universitarias podría ser provechoso para el alumnado, de cara a la adquisición de los conceptos matemáticos que habitualmente se espera que aprenda.

Hemos procurado hacer una exposición rigurosa y detallada que el alumnado pueda seguir de manera autónoma a partir de algunas indicaciones de su profesor, de manera que se pueda utilizar este artículo para una pequeña investigación en el aula.

***Palabras clave*:** Función de Lambert, enseñanza en bachillerato.

ABSTRACT. In this article we will analyze whether, combined with the use of programs such as GeoGebra, introducing the study of Lambert's function in High School and first year of Calculus of different university degrees could be beneficial for students, in order to acquire the mathematical concepts that they are usually expected to learn.

We have tried to make a rigorous and detailed exposition that students can follow autonomously based on some indications from their teacher, so that this article can be used for a small investigation in the classroom.

***Key words*:** Lambert's function, High school teaching.

2010 AMS Clasificación Matemática por Temas: 26A09, 26E05, 33B99, 33F99

1. Introducción

Sin unas consideraciones previas, es de esperar que descartásemos plantearnos la introducción del estudio de la función de Lambert en la iniciación al cálculo matemático, pues los temarios suelen estar ya de por sí bastante cargados. No hay tiempo para más.

Sin embargo, podemos pararnos a analizar si, el estudio de esta función, a través de sus propiedades y definición puede servir como apoyo a la competencia matemática: "conexiones entre bloques de conocimientos".

Además, al combinarlo con el uso de programas como GeoGebra, podemos evitar el dedicar tiempo a aquellas partes que quedan fuera del currículum de bachillerato, realizando esos cálculos con el ordenador, a la vez que trabajamos la competencia "pensamiento computacional".

Por otra parte, como beneficio, el alumnado conocerá una importante función en matemáticas que podrá resultarle sumamente útil o necesaria según el futuro académico que elija.

Así pues, para decidir si nos interesa introducir esta función en nuestras clases de bachillerato y primer curso de Cálculo de distintas titulaciones universitarias, procederemos a analizar cómo podríamos utilizarla en nuestra aula de matemáticas, y qué ventajas nos aporta.

2. En busca de la función de Lambert

En primer lugar, la propia forma de definir la función de Lambert, que suele denominarse W, nos servirá para, de entrada, analizar el concepto de función inversa. Para llegar a la función de Lambert, podemos analizar los tipos de ecuaciones que dan origen a esta función.

Concretamente, queremos resolver el siguiente problema, similar a los que habitualmente se proponen en bachillerato:

Problema 1. Estudie la función $f(x) = x \cdot e^x$. Indique si la función admite inversa en algún intervalo real[1].

Dependiendo de en qué momento del curso nos encontremos, nuestro análisis de la función podrá ser más o menos exhaustivo.

Normalmente, procederemos calculando:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes y signos de la función.
3. Continuidad y derivabilidad. Intervalos de monotonía.
4. Puntos críticos, intervalos de curvatura.

[1] Aunque suele ser la forma de plantear los problemas, notar que la función f no está bien definida, pues no se ha indicado para qué valores se aplica. Se suele sobreentender que esto es parte del problema: calcular el dominio de definición.

5. Cálculo de asíntotas.
6. Estudio de posibles simetrías.
7. Recorrido.
8. Esbozo de la gráfica de la función, donde se muestre la información recopilada.

Además, ya que se pide expresamente en el enunciado, analizaremos cuándo la función admite inversa.

Nuestro objetivo en el aula es introducir la función de Lambert precisamente como la inversa de la función anterior.

Pero simplemente con la búsqueda de esta función, ya se deben poner en marcha los conocimientos de análisis de funciones. En este caso, para un ejemplo que no reviste especial dificultad.

La solución resulta sencilla, hasta el momento de encontrar la inversa. Veamos cómo sería:

1. **Dominio**: $\mathbb{R}$, por ser producto de funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$.
2. **Signos** y **corte** con los ejes: como $e^x > 0$, el signo de la función coincide con el de $y = x$ y por tanto,
   - el único punto de corte con los ejes es el origen.
   - es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.
3. Es **continua** y **derivable** en todo $\mathbb{R}$ por ser producto de funciones continuas y derivables, tantas veces como queramos.
   - Utilizando la regla de la cadena, la derivada es

     $$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x.$$

     Notar que $f'(x) = e^x + f(x)$.
   - Igualmente, su segunda derivada es $f''(x) = e^x + (1 + x) \cdot e^x$.
     Nótese que $f''(x) = 2e^x + f(x)$.
   - ¿Cuál será su **derivada *n*–ésima**?
     Esta podría ser una cuestión para plantear a nuestros alumnos, cuya solución, a la vista de lo anterior, es fácil ver que $f^{(n}(x) = n \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + n) \cdot e^x$.

   Para estudiar los **puntos críticos**, calculamos cuándo se anula la derivada, resolviendo $(x + 1) \cdot e^x = 0$, cuya solución es $x = -1$, donde la función toma el valor $f(-1) = -e^{-1} = {}^{-1}\!/_{e}$.

   Estudiando los signos de la derivada, obtenemos que f es
   - decreciente en $(-\infty, -1)$,
   - creciente en $(-1, +\infty)$,
   - tiene un mínimo relativo (que es absoluto) en $(-1, {}^{-1}\!/_{e})$.

4. Los signos de la segunda derivada, $f''(x) = (x+2) \cdot e^x$ determinan la **curvatura** de la función. De manera análoga al punto anterior, f'' se anula únicamente para $x = -2$, donde toma el valor $f(-2) = {}^{-2}\!/_{e^2}$. Por tanto, f
   - es **cóncava** (curvada con las ramas hacia abajo) en $(-\infty, -2)$,
   - es **convexa** (curvada con las ramas hacia arriba) en $(-2, +\infty)$,
   - su único punto de **inflexión** es $(-2, {}^{-2}\!/_{e^2})$.
5. Al ser producto de un polinomio y una función exponencial, f no tiene asíntotas verticales ni oblicuas, es decir, $\lim_{x \mapsto \infty} x \cdot e^x = +\infty$.

   Según los conocimientos de cálculo de nuestros alumnos, se puede hacer el cálculo de $\lim_{x \mapsto -\infty} x \cdot e^x = 0$ analíticamente, con la regla de L'Hôpital o bien "visualizarlo" con ayuda del ordenador, evaluando en $-1, -10, -100, -1000, \ldots$

   Con ello, concluimos que tiene una única **asíntota**, **horizontal**, $x = 0$ hacia $-\infty$.
6. Podemos hacer el estudio habitual de las **simetrías** par/impar de la función, que no presenta. Calculando $f(-x) = -x \cdot e^{-x}$, en general no coincide con $f(x)$ ó $-f(x)$.

   Pero también es posible razonar, sin cálculos, el hecho de que no puede presentar simetrías respecto a ningún eje ni respecto a ningún punto. Por ejemplo, a partir del hecho de tener una única asíntota, $y = 0$, y solamente hacia $-\infty$.

   Para razonarlo, bastaría preguntarse ¿con qué otro elemento se podría corresponder esta asíntota?

   Esto puede dar pie a una pequeña investigación matemática sobre qué debe ocurrir con los diferentes elementos que estudiamos en una función, si presenta algún tipo de simetría, aprovechando la potencia de programas como GeoGebra para obtener la visualización inmediata de diferentes ejemplos.

   Por ejemplo:
   - Si la función tiene un único extremo relativo (como la nuestra), tan solo podría tener simetría respecto un eje vertical: el que pasa por ese punto, y no podría presentar simetría central. ¿Cómo lo razonará nuestro alumnado?

     Además, nuestra función sirve como ejemplo de que puede haber un único mínimo relativo, pero no presentar simetría axial.
   - ¿Habría alguna forma de extender este razonamiento a varios extremos relativos?
7. Con lo anterior, el **recorrido** de la función es $({}^{-1}\!/_{e}, +\infty)$.
8. Utilizando los datos, la gráfica resultante debería ser similar a la de la figura 1.

Una vez analizada la función y obtenida la gráfica (figura 1), llegamos a la parte más interesante del problema: estudiar la existencia de inversa. En ocasiones, nos limitamos a obtener la inversa de fracciones racionales (hipérbolas) por métodos algebraicos. Este ejemplo servirá para que los alumnos interioricen mejor este concepto y otros relacionados.

Con la información que ya tenemos, la función es decreciente hasta $x = -1$, y creciente a partir de $x = -1$.

Esto hace que la función no sea inyectiva, y un buen ejercicio para nuestro alumnado el analizar cuándo no lo es, y qué ocurre con la inversa.

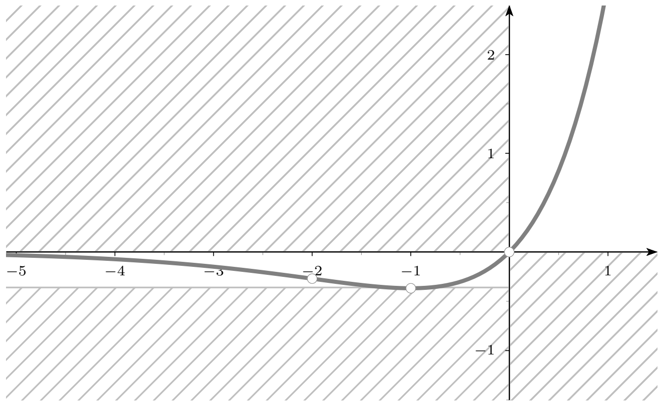

Figura 1. Representación de $f(x) = x \cdot e^x$

Concretamente:

- Todos los valores entre ${}^{-1}\!/_e$ y 0 se alcanzan dos veces:
  - Una vez en el tramo decreciente, y
  - otra vez en el creciente, en el intervalo $(-1, 0)$, pues a partir de $x = 0$, la función es positiva.
- al ser monótona en $(-\infty, -1)$, en ese tramo admite inversa, que denotaremos W_{-1}, utilizando el subíndice -1 para indicar que es la "rama" que llega hasta $x = -1$.
- Al ser monótona en $(-1, +\infty)$, también admite (otra) inversa en ese otro tramo. Denotamos esa función mediante W_0, haciendo notar que es la rama que pasa por el origen.

  Es frecuente utilizar la notación W para referirnos a las dos ramas a la vez. Esto será especialmente cómodo a la hora de resolver ecuaciones, donde podemos emplear la notación W en los cálculos (de forma análoga a la notación $\pm\sqrt{\ }$ con las raíces cuadradas), y comprobar al finalizar si pueden usarse las dos ramas, una, o ninguna.
- Así pues, la función no es biyectiva, por lo que no tiene inversa propiamente dicha. En estos casos podemos referirnos a la "inversa" utilizando dos funciones: W_{-1} y W_0, o una función con "dos ramas"[2]. Cuando vayamos a calcular la "inversa", habrá que especificar claramente cuál de las dos funciones utilizaremos.

  Esto no es algo novedoso o raro. Igual ocurre con la raíz cuadrada, inversa de la función cuadrática x^2. Al calcular su inversa, podemos considerar la "rama negativa": $-\sqrt{x}$, o bien la "rama positiva": $\sqrt{x}$.

[2] Además, podemos aprovechar para indicar que hay quien, para admitir la inversa como una única función, se refiere a ella como función "bivaluada".

Definición 1. Denominaremos función "W de Lambert" o "log–producto" a la función inversa de $f(x) := x \cdot e^x$ definida anteriormente (en realidad, las dos ramas W_0 y W_{-1})[3].

En particular, si para ciertos x, k números reales, ocurre

$$x \cdot e^x = k, \quad \text{entonces} \quad x = W_0(k), \text{ y/o } \quad x = W_{-1}(k),$$

según k esté en el dominio de la función correspondiente. Estudiamos los dominios en la sección § 4.1, dedicada a las propiedades de W_0 y W_{-1}. En la figura 2 (pág. 98) se muestran las gráficas de ambas funciones.

3. Cronología histórica de la función de Lambert

En 1758, el alemán de origen francés Johann H. Lambert (Mülhausen, 1728 – Berlín, 1777) sacaba a la luz en la prestigiosa publicación *Acta Helveticae*... un trabajo con el título «Observationes variae in mathesin puram», en el que consideró la solución de la ecuación

$$x^a - x^b = (a - b)\, c\, x^{a+b}$$

conocida hoy día como *ecuación trascendental de Lambert* (consúltese [7]).

El suizo Leonhard Euler (Basilea, 1707 – San Petersburgo, 1783) tuvo noticias de los trabajos de Lambert al respecto en 1764, año en el que Lambert se mudó de Zurich a Berlín. Entre 1770 y 1771, ambos tuvieron varias discusiones privadas acerca de la expansión en series de algunas funciones. En 1783, Euler publicó un trabajo sobre la ecuación trascendental de Lambert en el que introducía un caso especial que se reducía a $w \cdot a^w = \ln x$, el cual resulta prácticamente la definición de la función $W(x)$, aunque Euler propuso una definición más parecida a $-W(-x)$. Euler consideró soluciones mediante series en este trabajo, en el primer párrafo, cita a Lambert específicamente como el primer en considerar dicha ecuación.

La ecuación trinomial considerada por Euler era $x = x^m + q$, que transformó aplicando un sencillo cambio de variable. Euler proponía una solución a estas ecuaciones que consistía en desarrollos en series de potencias. Una vez resuelta la ecuación, el genio suizo consideró el caso particular de la ecuación trascendental de Lambert en el que $a = b$. Tomando límites, obtuvo la siguiente expresión

$$\ln x = c\, x^a.$$

Considerando entonces $a = 1$, llegó a una solución expresada en forma de serie convergente para la ecuación resultante, expresando la variable x en términos de c. Tras considerar sucesivas manipulaciones respecto de la variable x se obtiene la forma estándar de la

[3] Al igual que ocurre con la función logaritmo, la función de Lambert puede definirse para los números complejos. Pero, como el objeto de este artículo es la didáctica durante la iniciación al cálculo, nos ceñiremos siempre al caso real.

función de Lambert (consúltese [5]). El suizo llegó finalmente a la expresión de una nueva función, conocida como función T.

$$T(z) = \sum_{n \geq 1} n^{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

En 1844, el alemán Gotthold Eisenstein (Berlín 1823 – 1852) consideró la serie de infinitas potencias de potencias (consúltese [4])

$$h(z) = z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

que podía expresarse de manera cerrada teniendo en cuenta la función de Lambert como

$$h(z) = -\frac{W(-\ln z)}{\ln z}$$

En 1925, los húngaros George Pólya (Budapest, 1887 – Palo Alto, 1985) y Gábor Szegö (Kunhegyes, 1895 – Palo Alto, 1985) describieron la inversa de $W \cdot e^W$, además de ser los primeros en utilizar $W(x)$ como notación de la función de Lambert (consúltese [9]).

Sin embargo, la verdadera importancia de dicha función no se produjo hasta finales del siglo XX. En 1993, los estadounidenses Tony C. Scott, J. F. Babb, A. Dalgarno y J. D. Morgan descubrían la relación de la función de Lambert con la mecánica cuántica, en particular da una solución exacta a los valores propios de la energía del sistema cuántico correspondiente al modelo descrito por el operador de Dirac para duplicar así para el caso de igualdad de cargas, un problema fundamental en el campo de la física (consúltese [10]).

En 1993, el editor jefe de la *Maple Transactions*, el canadiense Robert M. Corless, junto al equipo de desarrolladores del sistema computacional de álgebra Maple realizaron una prospección bibliográfica y descubrieron que esta función aparece en un gran número de aplicaciones prácticas (consúltese [2]).

En el año 2000, Banwell y Jayakumar descubrían que la función de Lambert sirve para relacionar el voltaje, la corriente y la resistencia en un diodo (consúltese [1]).

En 2004, Packel y Yuen aplicaron la función de Lambert a estudios de trayectorias balísticas de proyectiles con resistencia por fricción del aire (consúltese [8]). Se han descubierto aplicaciones en campos tan dispares como la mecánica estadística, química cuántica, combinatoria, cinética de enzimas, fisiología de la visión, hidrología o análisis de algoritmos (consúltese [6]).

4. Análisis de la función de Lambert

Una vez que hemos definido nuestra función, nos gustaría hacer un análisis similar al realizado para $f(x) = x \cdot e^x$.

Quizás, un primer intento empezaría por encontrar la expresión algebraica de esta inversa. Sin embargo, puede demostrarse que no es posible expresarla como combinación de funciones elementales.

Así pues, tendremos que hacer todo el análisis de las funciones W_0 y W_{-1} exclusivamente a partir del hecho de ser inversas de la función $x \cdot e^x$, teniendo en cuenta que se va a hacer un abuso del lenguaje en tanto en cuanto no existe una inversa propiamente dicha, pues la función $x \cdot e^x$ no es inyectiva en todo su dominio.

Este es precisamente uno de los motivos por el que es interesante estudiar la función de Lambert con nuestro alumnado.

Para comenzar, como conocemos que la gráfica de la función inversa es la simétrica respecto la diagonal del primer y tercer cuadrante, podemos obtener directamente la gráfica de las dos ramas de la función de Lambert, que es uno de los objetivos del estudio de la función, y a la vez nos servirá para ir comprobando las propiedades que obtendremos a continuación.

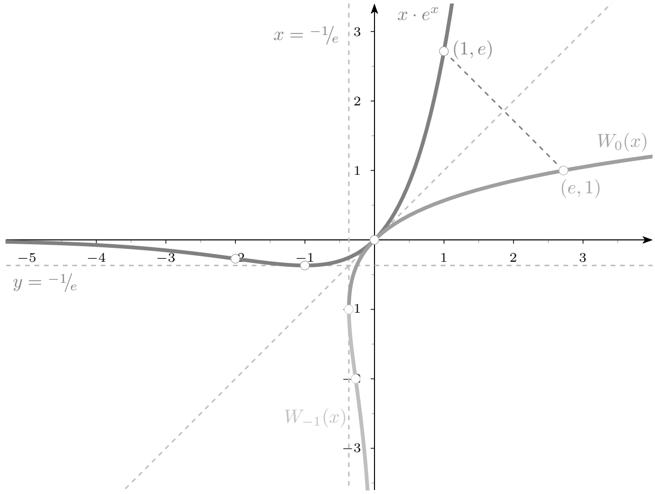

Figura 2. Representación de las dos ramas de la función de Lambert; W_0 y W_{-1}.

4.1. Propiedades de la función de Lambert

Con la gráfica en mente, y considerando las propiedades de la función inversa, podemos proceder a hacer el estudio de la función:

1. Como al calcular la inversa, dominio y recorrido intercambian sus papeles, podemos concluir directamente que:
   - El **dominio** de W_0 es $[-1/e, +\infty)$ y su **recorrido** $[-1, +\infty)$, pues la función $x \cdot e^x$ es creciente en el intervalo $[-1, +\infty)$ y, en ese intervalo, alcanza todos los valores entre $-1/e$ y $+\infty$.
   - El dominio de W_{-1} es $[-1/e, 0)$ y su recorrido $(-\infty, -1]$, pues $x \cdot e^x$ es decreciente en $(-\infty, -1]$ y, en ese intervalo, valora entre 0 y $-1/e$, aunque sin alcanzar el 0.

- Como curiosidad notar que, siempre que podamos calcular $W_{-1}(x)$, también será posible calcular $W_0(x)$. Aproximadamente, ${}^{-1}\!/_e \approx -0{,}368$.

2. La función W_0 es **negativa** en $(^{-1}\!/_e, 0)$ y **positiva** en $(0, +\infty)$. Corta a los ejes en el origen.

   La función W_{-1} es siempre negativa y no corta a los ejes.

3. Como la inversa de una función **continua** y **diferenciable** también lo es (en su dominio, obviamente), resulta que las funciones W_0 y W_{-1} son continuas y diferenciables; de hecho, podemos derivarlas tantas veces como queramos.

   Sin embargo, abusando del lenguaje, en el análisis de este tipo de funciones reales es habitual indicar ciertos tipos de "discontinuidad", que no resultan de discontinuidad en el sentido topológico, pero son útiles a la hora de entender la función. Concretamente:

   - Como tanto W_0 como W_{-1} están definidas en $x = {}^{-1}\!/_e$, pero no a la izquierda de ese punto, se dice que tienen una ***discontinuidad*** **esencial** en $x = {}^{-1}\!/_e$.
   - Además, al hacer la simetría, la asíntota horizontal $x = 0$ de $x \cdot e^x$ se corresponde con una **asíntota vertical** $y = 0$ de W_{-1}, y se dice que W_{-1} tiene una ***discontinuidad*** **de salto infinito**[4] en $x = 0$.

   Derivada de W.

   Calcular la derivada de nuestra función es también un ejercicio interesante para nuestro alumnado, pues exige aclararse con los conceptos de función inversa y derivada de la función inversa.

   Considerando que para $y = x \cdot e^x$, $y' = (x+1) \cdot e^x$ y $x \overset{def}{:=} W(y)$, utilizando la derivada de la función inversa,

$$W'(y) = \frac{1}{(1+x)e^x} = \frac{1}{(1+x) \cdot \frac{y}{x}} = \frac{x}{(1+x) \cdot y}$$
$$= \frac{W(y)}{\big(1 + W(y)\big) \cdot y}.$$

   Una vez expresada $W'(x) = \frac{W(x)}{x \cdot \left(W(x)+1\right)}$, podemos obtener las siguientes derivadas de la manera habitual (derivada de una función racional).

   Notar que el cálculo es válido tanto para W_0 como para W_{-1}.

   Podemos aprovechar para comprobar que en el punto $x = {}^{-1}\!/_e$, la recta tangente a la gráfica es vertical.

   - En primer lugar, pues para la recta $y = {}^{-1}\!/_e$, que es la tangente a $x \cdot e^x$ en $(-1, {}^{-1}\!/_e)$, su simétrica es la vertical $x = {}^{-1}\!/_e$, tangente a las gráficas de W_0 y W_{-1} en $(^{-1}\!/_e, -1)$.

[4] Nótese el abuso de lenguaje, pues la función ni siquiera está definida en dicho punto.

- En segundo lugar, a través del cálculo de

$$\lim_{x\mapsto -1/e^{+}} W_0'(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\mapsto -1/e^{+}} W_{-1}'(x) = -\infty,$$

para el que basta analizar el signo del factor $W(x)+1$ en el denominador de la derivada, que tiende a 0.

- Notar, una vez más, la analogía con la raíz cuadrada, donde el origen se corresponde con el mínimo de $y = x^2$ y la tangente en el origen a la gráfica de $y = \pm\sqrt{x}$ es vertical.
  Una pregunta que surge de modo natural en el aula es: ¿podríamos generalizar este hecho?

4. Para el estudio de la monotonía de la función, basta considerar que la inversa de una función creciente es creciente, y la de una función decreciente, también es decreciente[5].

   Por tanto W_0 es **monótona creciente** y W_{-1} es **monótona decreciente** y ninguna de ellas presenta extremos relativos.

   Aún así, es importante hacer ver que el punto $(-1/e, -1)$ es **mínimo absoluto** de W_0 y **máximo absoluto** de W_{-1}. Igualmente es importante notar que no ha sido necesario estudiar la expresión de la derivada para obtener estas propiedades.

   La gráfica de estas funciones (figura 2), que obtuvimos anteriormente, facilitará enormemente la comprensión de estas propiedades que acabamos de deducir.

5. De igual forma, podemos estudiar la **curvatura** de ambas funciones.

   Si una función es cóncava en un intervalo, su inversa es convexa en el intervalo correspondiente, y viceversa.

   Para razonarlo, basta considerar que si la gráfica de la función está por debajo de la recta que une dos puntos, al hacer la simetría respecto la diagonal $y = x$, esta situación se invierte, pasando a estar por encima[6].

   Por tanto (obsérvese figura 2, pág. 98):

   - W_0 es una función **cóncava** (curvada con las ramas hacia abajo).
   - W_{-1} es **convexa** en el intervalo $(-1/e, -2/e^2)$, y **cóncava** en $(-2/e^2, 0)$.
     El punto $(-2/e^2, -2)$ es de **inflexión** de W_{-1}.
   - Por último, como $y = x \cdot e^x$ no presentaba simetrías, las funciones W_0 y W_{-1} tampoco.

   Con esto, hemos terminado un análisis completo, que incluye la gráfica, de la función de Lambert; una función que no es posible expresar como combinación de funciones elementales, y cuyo cálculo para valores concretos resulta complicado.

[5] Si estos hechos no se han visto con el alumnado previamente, es un buen momento para hacerlo, acompañándolo de diferentes ejemplo visualizados en el ordenador.

[6] Igual que con el caso anterior, el estudio de la función de Lambert nos lleva, de manera natural, a investigar y razonar sobre propiedades sencillas de las funciones inversas, y recordar propiedades globales de las funciones sin necesidad a recurrir a los cálculos explícitos.

Esto resultará muy positivo para el alumnado, ayudándole a separar los conceptos teóricos del algoritmo de cálculo que suela emplear.

Este es un hecho importante para destacar a nuestro alumnado, pues muestra la capacidad de las matemáticas para obtener conclusiones simplemente con el razonamiento, sin necesidad de realizar complicados cálculos.

4.2. Valores de la función

Una vez que hemos definido esta nueva función, puede que a los estudiantes les inquiete un poco su manejo.

Algo que puede preocuparles es el hecho de saber calcular valores suyos de manera exacta. Sin embargo, estamos en la misma situación de las funciones trigonométricas, o de la función logaritmo. Tan solo conoceremos valores exactos en casos muy concretos. Los demás, pueden obtenerse evaluando la función directamente con programas como GeoGebra, de igual forma que utilizamos la calculadora para evaluar las funciones trigonométricas o logaritmos.

En el caso de GeoGebra, nuestras funciones están predefinidas como `LambertW(x)` y `LambertW(x,-1)`.

Si los alumnos han aprendido métodos de aproximación de soluciones; por ejemplo, el método de la bisección, también es un buen momento para aproximar algunos valores de W como solución de $x \cdot e^x = k$, y contrastarlos con los valores ofrecidos con GeoGebra, o los casos particulares que estudiaremos a continuación.

Resultará muy útil redactar una tabla de valores a partir de la función $y = x \cdot e^x$, que nos ayudará a afianzar el concepto de función inversa. Para ello, bastará ir evaluando la función en un conjunto de puntos, y luego intercambiar los valores de x e y.

Además, el cálculo de ciertos valores de la función de Lambert es un buen ejercicio para que nuestro alumnado practique con las propiedades de exponenciales y logaritmos, acotando sus valores para determinar a qué rama corresponden los datos obtenidos.

Una vez obtenidos valores concretos, resulta muy gratificante para el alumnado comprobar utilizando GeoGebra que, efectivamente, el valor que ellos obtienen para la función, es el correcto.

Por ejemplo, tomemos el parámetro $k > 0$ para evaluar $y = xe^x$.

- Como $ke^k > 0$, por definición $W(ke^k) = k$.
  En particular, $W_0(0) = 0, W_0(e) = 1, W_0(2e^2) = 2$.
  Igualmente, considerando el recorrido de W_0 y W_{-1},
  $$W_0(-ke^{-k}) = -k, \quad \text{si } 0 \leq k \leq 1$$
  $$W_{-1}(-ke^{-k}) = -k, \quad \text{si } \ k \geq 1.$$
  Por ejemplo, $W_{-1}\left(-1/e\right) = -1, W_{-1}\left(-2/e^2\right) = -2, W\left(-1/2\sqrt{e}\right) = -1/2$.
- Para $\ln(k)$, como $\ln(k) \cdot e^{\ln(k)} = k\ln(k)$, Como $\ln(k) \geq -1$, para $k \geq 1/e \approx 0{,}368$:
  $$W_0\big(k\ln(k)\big) = \ln(k), \quad \text{si } \ k \geq 1/e \approx 0{,}368$$
  $$W_{-1}\big(k\ln(k)\big) = \ln(k), \quad \text{si } 0 \leq k \leq 1/e \approx 0{,}368.$$

Expresado mediante $\frac{1}{k}$ y usando las propiedades de los logaritmos

$$W_0\left(-\frac{\ln(k)}{k}\right) = -\ln(k), \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq e$$
$$W_{-1}\left(-\frac{\ln(k)}{k}\right) = -\ln(k), \quad \text{si} \quad k \geq e.$$

Con esto en mente, podemos derivar algunas cuestiones para que el alumnado razone sobre las funciones logarítmica y exponencial. Por ejemplo:

Ejercicio 1. Utilizar las igualdades anteriores para resolver los siguientes cálculos:

1. Calcula $W_0\big(2\ln(2)\big)$ y $W_{-1}\left(-\frac{\ln(3)}{3}\right)$.
2. Calcula y simplifica $W\big(375\ln(5)\big)$.
3. Comprueba que $W_{-1}\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right) = -4\ln(2)$.
4. $W_0(1) = e^{-W_0(1)} = -\ln\big(W_0(1)\big)$.
   Indicación: utilizar que de $W(x)e^{W(x)} = x$, resulta $W(x) = xe^{-W(x)}$, y de $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$, resulta $W(x) = \ln(x) - \ln\big(W(x)\big)$.

Soluciones:

1. Directamente, $W_0\big(2\ln(2)\big) = \ln(2)$, tomando $k = 2 > 1/e$.
   Como $3 > e$, $W_{-1}\left(-\frac{\ln(3)}{3}\right) = -\ln(3)$.
2. Para resolverlo, habrá que tener en mente tanto la factorización de números como las propiedades de los logaritmos.
   En este caso, $W\big(375\ln(5)\big) = W\big(3\cdot 5^3\ln(5)\big) = W\big(5^3\ln(5^3)\big)$, por lo que solo puede calcularse la rama $W_0\big(5^3\ln(5^3)\big) = \ln(5^3) = 3\ln(5)$.
3. Este ejercicio hará que nuestros alumnos tengan que probar y experimentar con diferentes potencias de 2. Como pista, se puede sugerir que prueben con exponentes negativos.
   Para $k = 1/2^4 < 1/e$, tenemos $\frac{1}{2^4}\ln\left(\frac{1}{2^4}\right) = -\frac{4}{2^4}\ln(2) = -\frac{\ln(2)}{4}$.
   Por tanto $W_{-1}\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right) = W_{-1}\left(\frac{1}{2^4}\ln\left(\frac{1}{2^4}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2^4}\right) = -4\ln(2)$.
   Nótese que, aunque $W_0(-\ln(2)/4)$ sí está definida, no podemos aplicar los razonamientos anteriores. ¿Por qué?
4. Según la indicación, $W(x) = xe^{-W(x)}$, y $W(x) = \ln(x) - \ln\big(W(x)\big)$.
   Valorando en $x = 1$, tenemos las igualdades $W_0(1) = e^{-W_0(1)} = -\ln\big(W_0(1)\big)$.

Normalmente, no podremos expresar los valores de W mediantes funciones elementales salvo en casos similares a los del ejercicio anterior.

5. Aplicación a la resolución de ecuaciones

Además de la importancia en sí para asentar conocimientos en el alumnado al deducir las propiedades de la función de Lambert, podemos mostrar su utilidad para resolver ecuaciones en las que se mezclan funciones exponenciales y polinómicas.

La función de Lambert nos permite resolver ecuaciones del tipo $x \cdot e^x = k$, que tendrán $0, 1$ o 2 soluciones, según k pertenezca al dominio de las ramas de W.

Por ejemplo, $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución, $x \cdot e^x = 1$ tiene una única solución, $W_0(1)$ y $x \cdot e^x = {}^{-2}\!/_{e^2}$ tiene las soluciones $x_1 = W_0({}^{-2}\!/_{e^2}) \approx -0,41$ y $x_2 = W_{-1}({}^{-2}\!/_{e^2}) = -2$.

Existe una gran variedad de ecuaciones, en las que interviene una parte polinómica y otra exponencial o bien logarítmica, que pueden transformarse en una expresión como la anterior y, por tanto, ser resueltas.

En la bibliografía podemos encontrar la expresión genérica, con parámetros, de muchas de ellas. Pero como puede resultar demasiado abstracto para el alumnado, vamos a analizar algunos casos particulares que sirvan para ilustrar el procedimiento general.

5.1. Ecuaciones de la forma $x \cdot a^x = b$

Hemos definido la función de Lambert como inversa de $y = x \cdot e^x$, pero igualmente podríamos pensar en dar la inversa para un producto del tipo $y = x \cdot 2^x$, del mismo modo que elegimos la base de la exponencial en los logaritmos.

Pero ya con los conocimientos adquiridos con el estudio de los logaritmos, sabemos que esto no es estrictamente necesario, pues siempre se puede hacer un cambio de base y expresar cualquier exponencial de base positiva como una exponencial con base el número e.

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}.$$

Interiorizar este hecho nos proporcionará una buena base para definir, en un futuro , la función exponencial compleja.

La clave para resolver todo este tipo de ecuación será transformar las expresiones en la forma $x \cdot e^x = k$, de manera que, por definición de W, sea $x = W(k)$.

Ejemplo 1. Encontrar las soluciones reales de $x \cdot 5^x = 375$.

Este es un ejemplo sencillo que puede resolverse mentalmente, pero servirá para ilustrar el proceso genérico en que queramos resolver, por ejemplo, $x \cdot 5^x = 10$.

Para resolverlo, basta hacer el cambio de base en la potencia, escribiendo la ecuación como $x \cdot e^{x\ \ln(5)} = 375$ y multiplicar por $\ln(5)$ para que el factor coincida con el exponente y poder aplicar la definición de W.

$$x\ \ln(5) \cdot e^{x\ \ln(5)} = 375\ln(5).$$

Como $375\ln(5) > 0$, solamente podemos aplicar W_0 (y no W_{-1}).

Por tanto, considerando los valores de W_0 (véase sección § 4.2 y el ejercicio 1),

$$x\ln(5) = W_0\big(375\ln(5)\big) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{W_0\big(375\ln(5)\big)}{\ln(5)} = 3.$$

5.2. Ecuaciones tipo $a^x = bx + c$

Resulta útil plantear este tipo de ejercicios a nuestro alumnado, para ayudarles a distinguir la diferencia del cambio de signo en un factor y en el exponente de una potencia, en un contexto donde les servirá de ayuda en la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 2. Encontrar los puntos de corte de la exponencial $y_1 = 2^x$ con la recta $y_2 = 4x$.

Se trata de resolver $2^x = 4x$. Una de sus soluciones, $x = 4$, podría hallarse mentalmente. Por otra parte, es un buen ejercicio para el alumnado que se inicia en el análisis matemático el comprobar, con los teoremas matemáticos que conocen, que debe existir otra solución entre 0 y 1.

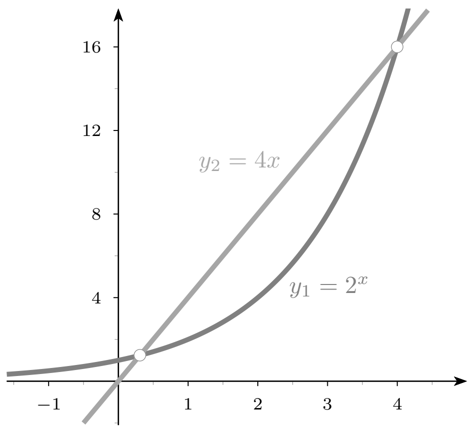

Figura 3. Representación de $y_1 = 2^x$ y $y_2 = 4x$.

Para encontrar las soluciones, ya conocemos la posibilidad del cambio de base para expresar la ecuación en la forma $x \cdot e^x = k$. Así pues, bastará usar las propiedades de las potencias, multiplicando por 2^{-x}, para tener la parte lineal y exponencial en el mismo miembro.

$$\begin{aligned}
4x \cdot 2^{-x} &= 1 && \text{multiplicando por } 2^{-x} \\
xe^{-x\ln(2)} &= \frac{1}{4} && \text{cambiando de base} \\
-x\ln(2)e^{-x\ln(2)} &= -\frac{\ln(2)}{4} && \text{ajustando a la forma } x \cdot e^x \\
-x\ln(2) &= W\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right) && \text{aplicando } W
\end{aligned}$$

$$x = -\frac{W\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right)}{\ln(2)} \qquad \text{despejando } x.$$

Como el argumento de W,

$$-\frac{\ln(2)}{4} \approx -0{,}17 > -\frac{1}{e},$$

podemos aplicar tanto W_0 como W_{-1}, que nos darán las dos soluciones que sabemos existían. Además, una de ellas es un entero (véase sección § 4.2 y el ejercicio 1):

$$x_1 = -\frac{W_0\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right)}{\ln(2)} \approx 0{,}31 \quad , \quad x_2 = -\frac{W_{-1}\left(-\frac{\ln(2)}{4}\right)}{\ln(2)} = 4.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $3x + 6 = e^{-x}$.

Procediendo como en el caso anterior, habrá que dividir por el coeficiente de x para llegar a una expresión de la forma xe^x, y habrá que multiplicar por una potencia de e para ajustar el exponente.

$$\begin{aligned} (3x+6)e^x &= 1 && \text{multiplicando por } e^x \\ (x+2)e^x &= \frac{1}{3} && \text{dividiendo entre } 3 \\ (x+2)e^{x+2} &= \frac{e^2}{3} && \text{multiplicando por } e^2 \\ x+2 &= W\left(\frac{e^2}{3}\right) && \text{aplicando } W. \end{aligned}$$

Como $\frac{e^2}{3} > 0$, no se puede aplicar W_{-1}, por lo que la única solución es

$$x = W_0\left(\frac{e^2}{3}\right) - 2 \approx -1{,}05.$$

Cabe comentar para concluir, que pueden trabajarse otro tipo de ecuaciones como por ejemplo $x^a \cdot b^{cx} = k$, $x^{ax^c} = b$, o $ax^c \ln(x) = b$, entre otras.

6. Aplicaciones prácticas de la función de Lambert

La vigencia actual de la función de Lambert se debe fundamentalmente al amplio espectro de aplicaciones prácticas que tiene dicha función en distintas ramas de la ciencia.

A partir de la última década del siglo XX, su presencia se hizo mucho más notable, y muchos investigadores empezaron a utilizarla como herramienta de resolución de una gran cantidad de problemas. Por ejemplo se utiliza en mecánica de fluidos, para describir los frentes y depósitos de flujo granular y de escombros, y los frentes de fluidos viscosos en sucesos naturales y en experimentos de laboratorio mediante la función omega de

Lambert–Euler, o en la formulación explícita de la ecuación de Colebrook para encontrar el factor de fricción de Darcy que se utiliza con la finalidad de determinar la caída de presión a través de un tramo recto de tubería cuando el flujo es turbulento.

En ingeniería mecánica se utiliza en el estudio del flujo dependiente del tiempo de fluidos newtonianos que se produce entre dos yacimientos con diferentes niveles de superficie libre cuando se utilizan bombas centrífugas, de manera que proporciona una solución exacta para el caudal de fluido tanto en régimen laminar como turbulento.

La función de Lambert se empleó en el campo de la neuroimagen para vincular los cambios en el flujo sanguíneo cerebral y el consumo de oxígeno dentro de un vóxel cerebral, con la correspondiente señal dependiente del nivel de oxigenación de la sangre.

Se empleó en el campo de la ingeniería química para modelar el espesor de la película del electrodo poroso en un supercondensador basado en carbono vítreo para el almacenamiento de energía electroquímica. Resultó ser la solución exacta de un proceso de activación térmica en fase gaseosa en el que el crecimiento de una película de carbón y la combustión de la misma película compiten entre sí.

La función de Lambert se empleó en el campo del crecimiento de la película epitaxial en la determinación del espesor de la película de inicio de dislocación crítica. Este es el espesor calculado de una película epitaxial donde debido a principios termodinámicos, dicha película desarrollará dislocaciones cristalográficas para minimizar la energía elástica almacenada en ella. Con anterioridad a la aparición de la función de Lambert, el espesor crítico tenía que determinarse resolviendo una ecuación implícita. Dicha función convierte el problema en una ecuación explícita que simplifica el manejo analítico del problema.

Dentro del campo de la matemática, se utiliza en la generación de las funciones de los números de Bernoulli y el género de Todd mediante la ecuación

$$Y = \frac{X}{1 - e^X}$$

que puede resolverse mediante las dos ramas reales W_0 y W_{-1}:

$$X(Y) = \begin{cases} W_1(Ye^Y) - W_0(Ye^Y) = Y - W_0(Ye^y) & \text{para } Y < -1, \\ W_0(Ye^Y) - W_{-1}(Ye^Y) = Y - W_{-1}(Ye^Y) & \text{para } -1 < Y < 0, \end{cases}$$

Esta aplicación muestra que la diferencia de rama de la función W se puede emplear para resolver otras ecuaciones trascendentales.

También es utilizada para las trayectorias ortogonales de elipses reales. Dada la familia de elipses centradas en el origen de coordenadas y excentricidad ε

$$x^2 + (1 - \varepsilon^2)y^2 = \varepsilon^2$$

las trayectorias ortogonales de dicha familia se obtienen mediante la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$

cuya solución general resulta la familia

$$y^2 = W_0\left(x^2\, e^{-2C-x^2}\right)$$

Existen muchos más campos y ramas de la ciencia en las que dicha función resulta fundamental. Por nombrar algunas, soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger, soluciones exactas de las ecuaciones del vacío de Einstein, equilibrio termodinámico, separación de fases en mezclas de polímeros, epidemiología, determinación del tiempo de vuelo de proyectiles o propagación de ondas electromagnéticas de superficie entre muchos otros.

7. Conclusiones y valoración

A lo largo de las secciones anteriores, hemos visto que el estudio de la función de Lambert no presentaría, de manera intrínseca, nuevas dificultades para el alumnado. Todas las cuestiones planteadas se resuelven mediante aplicación de los conocimientos de bachillerato y primer curso de Cálculo de distintas titulaciones universitarias, añadiendo la aplicación de la definición de W en la conclusión.

Pero, en el proceso de estudio de esta función y su aplicación a la resolución de ecuaciones, vamos haciendo un **repaso** de los diferentes conocimientos de **análisis matemático** que debe alcanzar un estudiante de bachillerato y primer curso de Cálculo de diferentes titulaciones universitarias. Además, con la ventaja de ir continuamente interconectando unas áreas específicas con otras. Así,

- Como hemos visto en la sección § 2, recordaremos el **análisis completo de una función** y el estudio de su **gráfica** para poder definir la función W.
- El análisis de la función de Lambert, mostrado al comienzo de la sección § 4, y en § 4.1, nos lleva a repasar todas las propiedades de las **funciones inversas**, desde la obtención de la gráfica hasta su derivada, pasando por el cálculo del dominio, recorrido, monotonía y curvatura.
- Obtener una tabla de valores para una función puede parecer un ejercicio trivial en bachillerato. Sin embargo, el cálculo de valores de W en la sección § 4.2 sirve para hacer un repaso detallado de las propiedades de **logaritmos y exponenciales**, así como para razonar con desigualdades.

  Incluso, si queremos, puede servirnos para repasar los métodos que conozca el alumnado para **aproximación de soluciones**.

Igualmente, la aplicación de la función de Lambert a la resolución de ecuaciones, vista en los ejemplos de la sección § 5 no supone añadir dificultades sino repasar la aplicación de las **técnicas habituales** para resolución de **ecuaciones** y, una vez más, propiedades de exponenciales y logaritmos. Así, comprobamos cómo, de manera natural,

- se hace necesario aplicar con soltura cambios de base, tanto en logaritmos como en exponenciales,

- hacemos uso de comparaciones y desigualdades, para comprobar si es posible aplicar W_0 y W_{-1}.
- aplicamos teoremas de análisis matemático para justificar la existencia de raíces en un intervalo, o unicidad de soluciones, pero también las calculamos explícitamente, como en el ejemplo 2.
- utilizamos las propiedades de las exponenciales para transformar sus exponentes.

En todo proceso educativo, suele resultar conveniente utilizar distintos enfoques para asegurar el óptimo aprendizaje por parte del alumnado. En este caso, como hemos mencionado, el uso de la función de Lambert nos dará un nuevo enfoque, englobando e interconectando gran parte de los conocimientos necesarios al iniciarse en el análisis matemático, sin añadir mayores obstáculos para el aprendizaje.

Es por ello que consideramos una buena apuesta didáctica el introducir este estudio como parte de la práctica docente en bachillerato o primer curso de Cálculo de distintas titulaciones universitarias. No tanto como contenidos evaluables, sino como otro medio más para que el alumnado alcance, o compruebe que ha alcanzado, los conocimientos necesarios en esta etapa.

Este estudio puede plantearse bien como actividades de aula, o bien como un pequeño trabajo de investigación. Por ejemplo, proporcionando este artículo e invitando al alumnado a la comprensión del mismo y resolución de los ejemplos incluidos u otros similares. Así pues, consideramos que utilizar la función de Lambert en niveles de bachillerato o primer curso de Cálculo en titulaciones universitarias, sería beneficioso para nuestra labor docente.

Referencias

[1] Banwell, T.C. & Jayakumar, A. (2000). «Exact analytical solution for current flow through diode with series resistance», *Electronics Letters*, Vol. 36, Issue 4, 17 February 2000, pp. 291–292. En línea, consultado 15 jun. 2022: https://biturl.top/INnYrq

[2] Corless, R.M.; Gonnet, G.H.; Hare, D.E.G. & Jeffrey, D.J. (1993). «Lambert's W Function in Maple», *The Maple Technical Newsletter*, 9, spring 1993, pp. 12–22. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/YFnQri

[3] Dence, T.P. (2013). «A Brief Look into the Lambert W Function», *Applied Mathematics*, 4(6), jun, 2013, pp. 887–892. Scientific Research Open Access. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/EBRjU3

[4] Eisenstein, G. (1844). «Entwicklung von $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 28, pp. 49–52. Göttinger Digitalisierungszentrum Ein Service der SUB Göttingen. En línea: consultado 11 jun. 2022: https://biturl.top/MZRVZr

[5] Euler, L. (1783). «De serie Lambertina Plurimisque eius insignibus proprietatibus». *Acta Acad. Scient. Petropol*, 2, pp. 29–51. Reimpreso en Euler, L. Opera Omnia, Series Prima, Vol. 6: Commentationes Algebraicae. Leipzig, Germany: Teubner, pp. 350–369, 1921. En línea, consultado 11 jun. 2022: https://biturl.top/nM7BFn

[6] Hayes, B. (2005). «Why W?». *American Scientist*, 93, pp. 104–108. The Scientific Research Society. En línea, consultado 11 jun. 2022: https://biturl.top/Zvqyem

[7] Lambert, J.H. (1758). «Observationes variae in mathesin puram», *Acta Helveticae physico-mathematico-anatomico-botanico-medica*, Band III, pp. 128–168. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/iaaqQb (facsímil).

[8] Packel, E.W. & Yuen, D.S. (2004). «Projectile Motion with Resistance and the Lambert W Function», *The College Mathematics Journal*, 35(5), nov. 2004, pp. 337–350. The Mathematical Association of America. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/rUzU3q

[9] Pólya, G. & Szegö, G. (1925). *Aufgaben und Lehrsätze der Analysis*. Berlin, 1925. Reimpreso como *Problems and Theorems in Analysis I*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. En línea, consultado 11 jun. 2022: https://biturl.top/vM7VZn

[10] Scott, T.C.; Babb, J.F.; Dalgarmo, A. & Morgan, J.D. (1993). «The calculation of exchange forces: General results and specific models», *The Journal of Chemical Physics*, 99(4), aug. 1993, pp. 2841–2854. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/2YJFry

[11] Stewart, S. (2005). «A new elementary function for our curricula?», *Australian Senior Mathematics Journal*, 19(2). The Petroleum Institute, United Arab Emirates. En línea, consultado 10 jun. 2022: https://biturl.top/Rvu2Qj

Recibido en junio de 2022. Aceptado para publicación en agosto de 2022.

Javier Cayetano Rodríguez
Director del Instituto GeoGebra Extremeño (IGEx)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Extremadura, España
e-mail: `javiercayetano@educarex.es`

José Manuel Sánchez Muñoz
Grupo de Innovación Educativa «Pensamiento Matemático»
Universidad Politécnica de Madrid (UPM)
Madrid, España
e-mail: `jmanuel.sanchez@educarex.es`