

# Haces vectoriales sobre la esfera de Riemann

## Vector bundles on the Riemann sphere

Graciela Reyes-Ahumada<sup>1</sup> y Héctor Sotelo Carrillo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas, México

<sup>2</sup>Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

**RESUMEN.** En este artículo daremos una introducción al estudio de haces vectoriales sobre variedades analíticas complejas. Definiremos los haces vectoriales, así como sus morfismos y desarrollaremos los primeros ejemplos, con el fin de motivar preguntas de clasificación de haces. Nos concentraremos en estudiar los haces sobre la esfera de Riemann y demostraremos el famoso teorema de factorización de Grothendieck, el cual resuelve la clasificación de haces holomorfos sobre esta variedad, construiremos además su clasificación de haces estables y semiestables. Este artículo es una adaptación de la tesis [10].

**Palabras clave:** Haces vectoriales, Superficies de Riemann, Haces estables en curvas algebraicas.

**ABSTRACT.** In this paper we give an introduction to vector bundles on complex manifolds. We define vector bundles, their morphisms and we develop the first examples with the purpose of motivating questions on classification of bundles. We focus on the study of bundles on the Riemann sphere and we prove the famous Grothendieck's Factorization Theorem, which solves the classification of holomorphic bundles on this manifold. We also construct its classification of stable and semistable bundles. This paper is an adaptation of the thesis [10].

**Key words:** Vector Bundles, Riemann surfaces, Stable bundles on algebraic curves.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 14H60; Secondary 32G13.*

### 1. El problema de clasificar objetos

Los problemas de clasificación han aparecido siempre en prácticamente todos los quehaceres humanos, en particular en las ciencias y las matemáticas modernas no son

la excepción. Estudiando matemáticas uno se encuentra muy seguido con preguntas de clasificación, este tipo de problemas usualmente comienza con definir la categoría que nos interesa estudiar (por ejemplo: grupos abelianos, espacios vectoriales, espacios topológicos con ciertos invariantes, álgebras, módulos, etc.) para luego intentar describir *¿cuántos objetos no isomorfos hay en la categoría? ¿podemos dar una lista de los objetos no isomorfos?* Para ilustrar un ejemplo de cómo responder formalmente a este tipo de preguntas, empezaremos recordando la clasificación de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo  $k$ . Los primeros ingredientes que necesitamos para plantear un problema de clasificación son:

- **La categoría:** en nuestro ejemplo los **objetos** que nos interesan son los espacios vectoriales con dimensión finita sobre  $k$ . Los **morfismos** serán las transformaciones  $k$ -lineales entre espacios vectoriales.
- En esta categoría podemos definir un **isomorfismo** de espacios vectoriales como una transformación lineal biyectiva tal que su función inversa también es una transformación lineal.
- Podemos definir una **relación de equivalencia** en la clase de espacios vectoriales de dimensión finita,  $V \sim W$  si y sólo si existe un isomorfismo de espacios vectoriales  $V \cong W$ . Denotamos la clase de equivalencia de  $V$  como:

$$[V] = \{W | V \cong W\}.$$

Con la información anterior estamos listos para hacernos preguntas de clasificación del estilo:

1. ¿Cuántos espacios vectoriales de dimensión finita no isomorfos hay? O dicho de otra forma: ¿cuántas clases existen bajo esta relación de equivalencia?
2. Además si sólo nos interesa estudiar espacios de dimensión fija  $n$  podemos refinar nuestra pregunta a: ¿cuántas clases se corresponden con espacios de dimensión  $n$ ?

El lector seguramente podrá responder fácilmente a estas preguntas recordando su curso de álgebra lineal, en el cual se demostró que dos espacios vectoriales son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión, por lo que las respuestas a las preguntas anteriores son:

1. Existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de clases de equivalencia de espacios vectoriales de dimensión finita y los enteros no negativos, esta correspondencia está dada por

$$\begin{aligned} \{[V] | V \text{ es } k\text{-espacio vectorial con } \dim_k(V) < \infty\} &\longleftrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ [V] &\longleftrightarrow \dim_k(V). \end{aligned}$$

2. Existe una única clase de isomorfismo de espacios de dimensión  $n$  sobre  $k$ , que es la clase  $[k^n]$ .

En este mismo espíritu uno puede hacerse preguntas de clasificación como: ¿cuántos grupos abelianos finitos existen hasta isomorfismo de grupos? ¿cuántas  $k$ -álgebras finitamente generadas existen hasta isomorfismo? ¿cuántas superficies de Riemann compactas de género  $g$  existen hasta biholomorfismo? etc. Aunque nuestro ejemplo de espacios vectoriales parece decir que clasificar objetos es una tarea relativamente fácil o al menos realizable, la realidad es que casi siempre es un problema con muchas complicaciones e incluso a veces es imposible de resolver.

Los objetos que nos interesa estudiar en este escrito son los haces vectoriales sobre una variedad  $X$  que puede ser analítica, topológica o algebraica. Veremos que el cilindro y la banda de Möbius son haces sobre el círculo y también que los espacios tangentes a variedades son haces holomorfos. Nos concentraremos en el caso en que la variedad  $X$  es analítica, definiremos los haces vectoriales holomorfos y construiremos ejemplos, después daremos la noción de morfismo e isomorfismo de haces. Una vez definida la categoría de haces y motivados por el ejemplo de espacios vectoriales, uno puede plantearse naturalmente preguntas de clasificación como:

*¿Cuántos haces no isomorfos existen sobre la variedad  $X$ ?* (1)

*¿Podemos dar un representante de cada clase de isomorfismo de haces?*

Resulta ser que estas preguntas son bastante interesantes, de hecho hay toda una área de investigación dentro de la geometría algebraica que se dedica entre otras cosas a intentar responderlas.

La clasificación de haces vectoriales sobre variedades analíticas es un tema de investigación muy prolífico en la actualidad, la primera clasificación completa de haces sobre una variedad fue dada en el año 1957 y se le debe a Alexander Grothendieck, en su artículo titulado *Sur La Classification Des Fibrés Holomorphes Sur La Sphère de Riemann* [5], en el cual él clasifica hasta isomorfismo todos los haces sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . El objetivo de este artículo es estudiar los haces vectoriales sobre  $\mathbb{P}^1$  y demostrar este famoso teorema de Grothendieck, es decir, responderemos a las preguntas planteadas en (1) para el caso en que  $X$  es la esfera de Riemann, con el fin de dar una mirada panorámica al tipo de técnicas que se utilizan en esta interesante área de investigación. En las últimas secciones de este escrito hablaremos también de un tipo muy especial de haces que son los haces estables y semistables.

Gran parte de los resultados clásicos que se encuentran en la literatura sobre haces vectoriales utilizan el lenguaje técnico de gavillas y divisores, es por ello que con el fin de acercar este tema a un público más amplio, en este escrito nos concentramos en el caso analítico y en desarrollar la teoría para el caso de la esfera de Riemann.

## 2. La esfera de Riemann

A lo largo de este artículo todas las variedades serán analíticas complejas (no singulares, compactas, conexas), todos los morfismos serán de variedades analíticas (holomorfismos) y todos los espacios vectoriales serán considerados sobre  $\mathbb{C}$ ; a menos que se especifique lo contrario.

En este trabajo estudiaremos haces vectoriales sobre la esfera de Riemann con su estructura de variedad analítica, así que empezaremos por definir esta variedad.

Consideremos el conjunto  $\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$  y la relación de equivalencia  $\sim$  definida en este conjunto como

$$(x_0, x_1) \sim (y_0, y_1) \iff \text{existe } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \text{ tal que } (x_0, x_1) = \lambda(y_0, y_1).$$

La clase de equivalencia de un vector  $(x_0, x_1)$  en la relación  $\sim$  es el conjunto

$$[x_0 : x_1] = \{\lambda(x_0, x_1) \mid \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0\},$$

es decir,  $[x_0 : x_1]$  es casi la línea en  $\mathbb{C}^2$  que pasa por origen y el punto  $(x_0, x_1)$ , solamente le falta el punto  $(0, 0)$ . En este sentido podemos decir que los elementos  $[x_0 : x_1]$  parametrizan líneas en  $\mathbb{C}^2$  que pasan por el origen. La **esfera de Riemann**  $\mathbb{P}^1$  se define como el conjunto de estas clases de equivalencia:

$$\mathbb{P}^1 := \{ [x_0 : x_1] \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\} \}.$$

Este conjunto tiene una estructura de variedad analítica de dimensión uno, al considerar los abiertos

$$U_0 = \{ [x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0 \} \text{ y } U_1 = \{ [x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0 \}$$

y las cartas definidas como:

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbb{C} \\ [x_0 : x_1] &\mapsto \frac{x_1}{x_0} \\ \phi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ [x_0 : x_1] &\mapsto \frac{x_0}{x_1}. \end{aligned}$$

Recordemos que esta variedad es topológicamente una esfera, de hecho es la compactificación de  $\mathbb{C}$  (que topológicamente es  $\mathbb{R}^2$ ) que resulta de agregar el punto al infinito

$$\mathbb{P}^1 = U_0 \cup \{[0 : 1]\},$$

donde  $U_0$  se identifica con  $\mathbb{C}$  mediante  $\phi_0$  y  $[0 : 1]$  es el único punto en  $U_1 \setminus U_0$ .

### 3. Los haces vectoriales y sus morfismos

Ahora daremos la definición de haz vectorial e intentaremos dar suficientes ejemplos para convencer al lector de que estos objetos aparecen de manera natural en diversas áreas de las matemáticas.

**Definición 1.** Sea  $X$  una variedad (analítica compleja). Un **haz vectorial** (holomorfo) de rango  $r$  sobre  $X$  es una variedad analítica  $E$  dotada con un morfismo llamado *proyección*  $\pi : E \rightarrow X$ , tal que existe una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$  que satisface las siguientes propiedades:

I) Para cada  $i \in I$  existe un isomorfismo  $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$  que cumple que

$$\pi \circ \psi_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_i$$

es la proyección a la primera coordenada.

II) Para cada  $i, j \in I$  y  $x \in U_{ij} := U_i \cap U_j$  existe un morfismo  $A_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$  tal que la composición

$$\varphi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}|_{U_{ij}} : U_{ij} \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^r$$

toma la forma

$$\varphi_{ij}(x, v) = (x, A_{ij}(x)v).$$

La función  $A_{ij}$  es llamada **función de transición** y dado un punto  $x \in X$  la matriz  $A_{ij}(x)$  es llamada **matriz de transición** en el punto  $x$ .

Por simplicidad, al hablar de haces vectoriales escribiremos únicamente la variedad  $E$  para referirnos al haz  $\pi : E \rightarrow X$ . El **rango** de un haz  $E$  usualmente se denota como  $\text{rank}(E) = r$  y la **fibra** en un punto  $x \in X$  se define como el conjunto  $E_x = \pi^{-1}(x)$ . Un haz de rango uno es llamado **haz lineal**.

Notemos que la definición de haz se puede adaptar fácilmente al caso en que la variedad  $X$  es topológica o algebraica, de esta manera podemos definir **haz vectorial topológico o algebraico**, considerando las variedades y los morfismos en la categoría correspondiente.

La primera propiedad de un haz nos dice que cada fibra  $E_x$  es isomorfa a la variedad  $\{x\} \times \mathbb{C}^r$  que a su vez se puede identificar naturalmente con  $\mathbb{C}^r$ , de este modo cada fibra puede ser dotada con una estructura de espacio vectorial de dimensión  $r$  y en este sentido podemos decir que un haz vectorial  $E$  es una familia de espacios vectoriales parametrizados por la variedad  $X$ . Por otro lado, la segunda propiedad de haces nos dice que las fibras varían mediante las transformaciones lineales  $A_{ij}(x)$  inducidas por las  $\{\psi_i\}$ , de hecho un haz vectorial  $E$  se caracteriza por sus matrices de transición  $\{A_{ij}(x)\}$ .

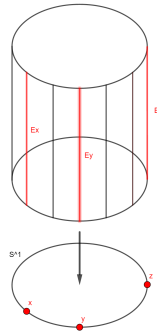
**Ejemplo 1.** Nuestro primer ejemplo es el **cilindro**, el cual con la proyección a la primera coordenada  $\pi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$  es un haz lineal topológico sobre el círculo  $S^1$ .

**Ejemplo 2.** Si  $X$  es una variedad (analítica, algebraica o topológica, sobre  $k = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ) entonces  $X \times k^r$  también es una variedad en la misma categoría y la proyección  $\pi : X \times k^r \rightarrow X$  además es un morfismo, de hecho, es un haz vectorial con la cubierta  $U_1 = X$  y con el morfismo identidad  $\psi_1 = Id_{X \times k^r}$ . Este haz es llamado el **haz trivial** de rango  $r$  y es denotado como  $\mathcal{O}_X^r$ ; el haz lineal trivial se denota como  $\mathcal{O}_X$ . Si  $X = S^1$  entonces el haz  $\mathcal{O}_{S^1}$  es precisamente el cilindro.

La existencia de los isomorfismos  $\{\psi_i\}$  de la definición de haz vectorial, nos dice que todo haz vectorial  $E$  es localmente trivial, es decir, existe una cubierta  $\{U_i\}$  de  $X$  donde la restricción de  $E$  es trivial:

$$E|_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \cong \mathcal{O}_{U_i}^r,$$

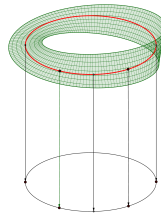
donde el último isomorfismo está dado por  $\psi_i$ . Es por esta razón que las  $\{\psi_i\}$  son usualmente llamadas **trivializaciones** de  $E$ . Notemos que si  $\{U_{\alpha_i}\}$  es un refinamiento de la



**Figura 1.** El cilindro es un haz lineal sobre  $S^1$ .

cubierta, con  $U_{\alpha_i} \subset U_i$  entonces  $\{\psi_i|_{U_{\alpha_i}}\}$  cumplen ser trivializaciones de  $E$  en la cubierta  $\{U_{\alpha_i}\}$ . En particular, dados dos haces siempre podemos considerarlos sobre la misma cubierta al tomar un refinamiento adecuado.

**Ejemplo 3.** La **banda de Möbius** también es un haz lineal topológico sobre el círculo  $S^1$ , considerando la proyección al círculo central.



**Figura 2.** La banda de Möbius es un haz lineal sobre  $S^1$

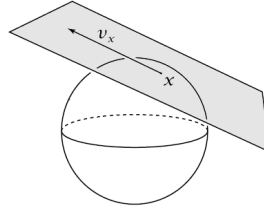
**Ejemplo 4.** Sea  $\mathbb{P}^1$  la esfera de Riemann y consideremos el espacio tangente a  $\mathbb{P}^1$  en un punto  $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ , que se define como el conjunto

$$T_x \mathbb{P}^1 = \{(x, v_x) | v_x \text{ es un vector tangente a } \mathbb{P}^1 \text{ en el punto } x\}.$$

Recordemos que el espacio tangente a  $\mathbb{P}^1$  es la unión

$$T_{\mathbb{P}^1} := \bigsqcup_{x \in \mathbb{P}^1} T_x \mathbb{P}^1.$$

La proyección a la primera coordenada  $\pi : T_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un haz lineal sobre  $\mathbb{P}^1$ ; este haz es llamado el **haz tangente** a  $\mathbb{P}^1$ .



**Figura 3.** El espacio tangente a un punto  $x \in \mathbb{P}^1$ .

*Demostración.* Notemos que la fibra de  $\pi$  en un punto  $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$  es precisamente  $T_x \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C}$ , que efectivamente es un espacio vectorial de dimensión uno. Ahora definamos las trivializaciones de este haz. Sea  $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$  el atlas de  $\mathbb{P}^1$  definido en la sección anterior, donde

$$\phi_i(x) = \frac{x_j}{x_i}.$$

La carta coordenada  $\phi_i$  induce un morfismo

$$\begin{aligned} T\phi_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times \mathbb{C} \\ (x, v_x) &\mapsto (x, \lambda), \end{aligned}$$

donde si  $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$  es una base del espacio vectorial  $T_p \mathbb{P}^1$  entonces  $\lambda$  denota el coeficiente  $v_x = \lambda \frac{\partial}{\partial \phi_i}$ . Además la composición

$$\pi \circ (T\phi_i)^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$$

es la proyección a la primera coordenada y para cada  $x \in \mathbb{P}^1$  el morfismo

$$(T\phi_i)_x : T_x \mathbb{P}^1 \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}$$

es un isomorfismo. Entonces  $\{T\phi_i\}$  cumple las propiedades de ser trivializaciones de  $T_{\mathbb{P}^1}$  en la cubierta  $\{U_i\}$ . Ahora calculemos las funciones de transición de este haz, en la doble intersección  $U_{ij}$ , consideremos la composición  $T\phi_j \circ T\phi_i^{-1}|_{U_{ij}}$ ,

$$\begin{aligned} (T\phi_j \circ T\phi_i^{-1})(x, \lambda) &= T\phi_j \left( x, \lambda \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \\ &= T\phi_j \left( x, \lambda \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_i} \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) = \left( x, \lambda \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_i} \right), \end{aligned}$$

por lo que la matriz de transición  $J_{ij}(x)$  de este haz en el punto  $x = [x_0 : x_1]$  es precisamente evaluar la matriz Jacobiana de cambio de coordenadas de pasar de la carta  $\phi_i$  a la carta  $\phi_j$  en el punto:

$$J_{ij}(x) = \frac{\partial \phi_j}{\partial \phi_i}(x) = \frac{\phi_i^{-1}}{\partial \phi_i}(x) = \frac{1}{\phi_i^2}(x) = \frac{x_i^2}{x_j^2}.$$

□

**Ejemplo 5.** En general, si  $X$  es una variedad de dimensión  $n$  con un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$ , se puede demostrar que su espacio tangente

$$T_X := \bigsqcup_{x \in X} T_x X,$$

es un haz vectorial de rango  $n$  y las matrices de transición de este haz son nuevamente la Jacobiana de cambio de coordenadas de la carta  $(U_i, \phi_i)$  a la carta  $(U_j, \phi_j)$ .

Debido a la estructura lineal de las fibras de los haces vectoriales podemos definir operaciones entre ellos de manera análoga a como lo hacemos en espacios vectoriales.

Sean  $\{\psi_i\}$  y  $\{\zeta_i\}$  trivializaciones de los haces  $E$  y  $F$  respectivamente, en una misma cubierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ . Sobre cada abierto  $\pi^{-1}(U_i)$  las trivializaciones tienen la forma  $\psi_i(p) = (x, v)$  y  $\zeta_i(p) = (x, w)$ , así que podemos definir puntualmente los morfismos

$$\begin{aligned}(\psi_i \otimes \zeta_i)(p) &:= (x, v \otimes w) \\ (\psi_i \oplus \zeta_i)(p) &:= (x, v \oplus w) \\ (\psi_i^*)(p) &:= (x, v^*)\end{aligned}$$

los cuales siguen siendo trivializaciones de un haz. Más precisamente:

**Definición 2.** Sea  $X$  una variedad y sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales sobre  $X$  de rangos  $n$  y  $m$  con trivializaciones  $\{\psi_i\}$  y  $\{\zeta_i\}$  respectivamente, sobre la misma cubierta  $\{U_i\}$  de  $X$ .

- Definimos la **suma directa**  $E \oplus F$  como el haz de rango  $n + m$  definido por las trivializaciones  $\psi_i \oplus \zeta_i$ . Notemos que las funciones de transición de este haz son precisamente

$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{bmatrix} \right\},$$

además las fibras tienen la forma  $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ .

- Definimos el **producto tensorial**  $E \otimes F$  como el haz de rango  $nm$  definido por las trivializaciones  $\{\psi_i \otimes \zeta_i\}$ . Las funciones de transición en este caso son  $\{A_{ij} \otimes B_{ij}\}$  y las fibras de este haz son de la forma  $(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x$ .
- Definimos el **haz dual**  $E^*$  como el haz definido por las trivializaciones  $\{\psi_i^*\}$ . Las funciones de transición de este haz son  $\{(A_{ij}^t)^{-1}\}$ , donde  $(A_{ij}^t)^{-1}$  denota la inversa de la traspuesta. Notemos que las fibras de  $E^*$  son los espacios vectoriales duales de las fibras de  $E$ , es decir,  $(E^*)_x = E_x^*$ .
- Sea  $X$  una variedad de dimensión  $\dim(X) = 1$ . Definimos el **haz canónico** de  $X$  como el dual del haz tangente  $T_X$ ; éste es un haz lineal que denotaremos como  $K_X = T_X^*$ .



Para terminar de definir la categoría de haces necesitamos hablar de sus morfismos:

**Definición 3.** Sean  $E$  y  $F$  haces vectoriales sobre  $X$ . Un **morfismo** de haces vectoriales es un morfismo de variedades  $\phi : E \rightarrow F$  tal que conmuta con las proyecciones

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & F \\ \pi_E \searrow & & \swarrow \pi_F \\ & X & \end{array}$$

y tal que los morfismos inducidos en las fibras  $\phi_x : E_x \rightarrow F_x$  son transformaciones lineales. Un **morfismo inyectivo** de haces será un morfismo  $\phi$  tal que  $\phi_x$  es inyectiva para todo  $x \in X$  y un **subhaz** de un haz  $F$  será la imagen de un morfismo inyectivo  $\phi : E \hookrightarrow F$ . Un **morfismo sobreyectivo** de haces es un morfismo que induce transformaciones lineales sobreyectivas en las fibras. Finalmente definimos un **isomorfismo** de haces como un morfismo de haces biyectivo tal que su función inversa también es morfismo de haces.

Notemos que dos haces isomorfos son dos variedades isomorfas con la propiedad extra de que el isomorfismo envía fibras a fibras mediante transformaciones lineales; de esta forma podemos argumentar que el cilindro y la banda de Möbius son haces topológicos no isomorfos sobre  $S^1$ , por ser variedades no isomorfas, ya que el cilindro es una variedad orientable y la banda de Möbius no es orientable.

**Ejemplo 6.** Si  $E$  es un haz de rango  $n$  sobre  $X$  con trivializaciones  $\{\psi_i\}$  y  $\mathcal{O}_X$  es el haz lineal trivial. El haz  $E \otimes \mathcal{O}_X$  tiene trivializaciones  $\psi_i \otimes 1 = \psi_i$  y además tiene las mismas funciones de transición de  $E$ . Para cada  $p \in \pi^{-1}(U_i)$  definimos el morfismo  $\phi(p) := (\psi_i \otimes 1)^{-1} \circ \psi_i(p)$ . Entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E \otimes \mathcal{O}_X \\ \searrow & & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

conmuta y  $\phi$  es un isomorfismo con inversa  $\phi^{-1}(p) := (\psi_i^{-1} \circ \psi_i \otimes 1)(p)$ .

#### 4. Haces lineales sobre $\mathbb{P}^1$

En esta sección clasificaremos hasta isomorfismo todos los haces lineales sobre  $\mathbb{P}^1$ , así que empezaremos por construir más ejemplos de ellos. Un ejemplo que será importante en nuestra clasificación es el haz tautológico, construido a continuación:

**Ejemplo 7.** Consideremos el conjunto

$$E = \{(x, p) \mid p \in l_x\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$$

donde  $l_x \subseteq \mathbb{C}^2$  es la línea definida por un punto  $x \in \mathbb{P}^1$ , veamos que con la proyección a la primera coordenada  $E$  es un haz lineal. Este haz será llamado el **haz tautológico** de

$\mathbb{P}^1$  y se denota como  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$  o simplemente  $\mathcal{O}(-1)$ . Notemos que la fibra en un punto  $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$  es un espacio vectorial de dimensión uno ya que es la línea  $l_x \subset \mathbb{C}^2$ . Ahora veamos que este conjunto es efectivamente un haz lineal. Sea  $\{U_0, U_1\}$  la cubierta abierta de  $\mathbb{P}^1$  dada anteriormente por las cartas

$$U_i = \{[x_0 : x_1] \mid x_i \neq 0\}.$$

Sean  $x \in \mathbb{P}^1$  y  $p \in l_x$  de la forma  $x = [x_0 : x_1]$  y  $p = (p_1, p_2)$ . Definimos las trivializaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi_0 : \pi^{-1}(U_0) &\rightarrow U_0 \times \mathbb{C} \\ ([x_0 : x_1], (p_1, p_2)) &\mapsto (x, p_1) \\ \psi_0^{-1} : U_0 \times \mathbb{C} &\rightarrow \pi^{-1}(U_0) \\ ([x_0 : x_1], c) &\mapsto \left( [x_0 : x_1], \left( c, \frac{x_1}{x_0} c \right) \right). \end{aligned}$$

Estos morfismos están bien definidos pues si  $x \in U_0$  entonces  $x_0 \neq 0$  y si cambiamos el representante  $[x_0 : x_1] = [\lambda x_0 : \lambda x_1]$  obtenemos:

$$\frac{x'_1}{x'_0} = \frac{\lambda x_1}{\lambda x_0} = \frac{x_1}{x_0}.$$

Análogamente definimos  $\psi_1$  como

$$\begin{aligned} \psi_1 : \pi^{-1}(U_1) &\rightarrow U_1 \times \mathbb{C} \\ ([x_0 : x_1], (p_1, p_2)) &\mapsto (x, p_2) \\ \psi_1^{-1} : U_1 \times \mathbb{C} &\rightarrow \pi^{-1}(U_1) \\ ([x_0 : x_1], c) &\mapsto \left( [x_0 : x_1], \left( \frac{x_0}{x_1} c, c \right) \right), \end{aligned}$$

por lo que se cumple la primera condición de la definición de haz. Para ver la segunda parte consideremos

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= \psi_1 \circ \psi_0^{-1} : U_{01} \times \mathbb{C} \rightarrow U_{01} \times \mathbb{C} \\ \varphi_{01}([x_0 : x_1], c) &= \left( [x_0 : x_1], \frac{x_1}{x_0} c \right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \psi_0 \circ \psi_1^{-1} : U_{10} \times \mathbb{C} \rightarrow U_{10} \times \mathbb{C} \\ \varphi_{10}([x_0 : x_1], c) &= \left( [x_0 : x_1], \frac{x_0}{x_1} c \right). \end{aligned}$$

De este modo las funciones de transición son  $A_{10} = \frac{x_0}{x_1}$  y  $A_{01} = \frac{x_1}{x_0}$ , que son funciones holomorfas en la doble intersección. Podemos concluir que  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1$  es un haz lineal.

Recordando la sección pasada donde definimos el producto tensorial y el dual de haces, podemos construir los siguientes haces lineales a partir de  $\mathcal{O}(-1)$ : sea  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos como  $\mathcal{O}(-n)$  el haz definido como

$$\mathcal{O}(-n) := \underbrace{\mathcal{O}(-1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(-1)}_{n\text{-veces}}$$

y definimos

$$\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(-n)^*.$$

Finalmente definimos  $\mathcal{O}(0) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ . Notemos que en esta notación el haz tangente  $T_{\mathbb{P}^1}$  es precisamente  $\mathcal{O}(2)$ .

**Observación 1.** El producto tensorial define una operación de grupo en el conjunto

$$\langle \mathcal{O}(-1) \rangle := \{\mathcal{O}(k) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Además este grupo es isomorfo a  $\mathbb{Z}$

*Demostración.* De la definición de  $\mathcal{O}(k)$  y de la asociatividad del producto tensorial se sigue que  $(\langle \mathcal{O}(-1) \rangle, \otimes)$  es un grupo donde el elemento identidad es el haz trivial  $\mathcal{O} := \mathcal{O}(0)$ . Veamos ahora el isomorfismo: consideremos la función

$$\begin{aligned} \phi : \langle \mathcal{O}(-1) \rangle &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \mathcal{O}(k) &\mapsto k. \end{aligned}$$

Para ver que es homomorfismo de grupos, sean  $\mathcal{O}(k), \mathcal{O}(l) \in \langle \mathcal{O}(-1) \rangle$ , entonces  $\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l) = \mathcal{O}(k+l)$ , por lo que

$$\phi(\mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(l)) = \phi(\mathcal{O}(k+l)) = k+l = \phi(\mathcal{O}(k)) + \phi(\mathcal{O}(l))$$

y  $\phi$  es homomorfismo. Claramente es sobreyectivo, ya que si  $k \in \mathbb{Z}$  entonces  $\phi(\mathcal{O}(k)) = k$ . Por otro lado,  $\phi(\mathcal{O}(k)) = 0$  si y sólo si  $k = 0$ , y se sigue la inyectividad.  $\square$

Sea  $X$  una variedad y consideremos el conjunto de haces lineales

$$\mathcal{L}_X = \{L | L \text{ es haz lineal sobre } X\}.$$

Podemos definir una relación de equivalencia en  $\mathcal{L}_X$  mediante isomorfismo de haces, es decir,  $L_1 \sim L_2 \iff L_1 \cong L_2$ . Denotaremos como  $[L]$  a la clase del haz  $L$  y al conjunto de clases de equivalencia como  $\mathcal{L}_X / \sim := \{[L] | L \in \mathcal{L}_X\}$ . Análogamente, podemos definir las clases de isomorfismo para haces de rango  $r \geq 1$  y denotaremos como  $[E] = \{T | T \cong E\}$ .

**Definición 4.** El producto tensorial dota a  $\mathcal{L}_X / \sim$  con una estructura de grupo abeliano, donde el elemento identidad es la clase del haz trivial  $\mathcal{O}_X$  y los inversos están dados por el dual. Este grupo es llamado el **grupo de Picard de  $X$**  y es denotado como  $\text{Pic}(X)$ .

Si  $X = \mathbb{P}^1$  es la esfera de Riemann, por la observación 1 podemos concluir que el conjunto de clases  $\{[\mathcal{O}(k)] | k \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo del grupo  $\text{Pic}(\mathbb{P}^1)$ .

**Lema 1.** Sean  $k_1, k_2$  enteros, entonces  $[\mathcal{O}(k_1)] = [\mathcal{O}(k_2)]$  si y sólo si  $k_1 = k_2$ .

*Demostración.* Asumiremos que  $\mathcal{O}(k) \cong \mathcal{O}$  si y sólo si  $k = 0$  (este hecho se sigue del lema 4 que demostraremos más adelante). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $k_1 > k_2$ , entonces  $k_1 - k_2 > 0$  y  $\mathcal{O}(k_1) - \mathcal{O}(k_2) = \mathcal{O}(k_1) \otimes \mathcal{O}(k_2)^* = \mathcal{O}(k_1 - k_2) \not\cong \mathcal{O}$ , por lo que  $\mathcal{O}(k_1) \not\cong \mathcal{O}(k_2)$ .  $\square$

El lema anterior nos dice que el homomorfismo de grupos dado al tomar la clase de isomorfismo

$$\begin{aligned} \iota : \langle \mathcal{O}(-1) \rangle &\rightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}^1) \\ \mathcal{O}(k) &\mapsto [\mathcal{O}(k)] \end{aligned}$$

es inyectivo y además, por la observación 1, su imagen es isomorfa a  $\mathbb{Z}$ . Se puede demostrar que este morfismo no sólo es inyectivo, sino que además es sobreyectivo (no demostraremos la sobreyectividad en este escrito pero esta demostración puede verse en [10] 2.1.4 pág. 30), por lo que  $\iota$  es un isomorfismo de grupos.

**Teorema 1.** El grupo de Picard de la esfera de Riemann es

$$\text{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \langle \mathcal{O}(-1) \rangle.$$

En particular  $\text{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$ .

**Observación 2.** El teorema anterior resuelve la clasificación de haces lineales sobre  $\mathbb{P}^1$ : existen tantas clases de equivalencia de isomorfismo de haces lineales como elementos en  $\mathbb{Z}$  y además un representante de cada clase es  $[\mathcal{O}(k)]$ .

**Definición 5.** Dado un haz lineal  $L$  sobre  $\mathbb{P}^1$  por el teorema 1,  $L \cong \mathcal{O}(k)$  para un único  $k \in \mathbb{Z}$ . Definimos el **grado** de  $L$  como  $\deg(L) := k$ . En particular  $\deg(L^*) = -\deg(L)$ . Además como el haz tangente  $T_{\mathbb{P}^1}$  es  $\mathcal{O}(2)$  entonces  $\deg(T_{\mathbb{P}^1}) = 2$  y  $\deg(K_{\mathbb{P}^1}) = -2$ .

## 5. Las secciones de un haz

Una parte importante que refleja la geometría de un haz vectorial sobre una variedad es la estructura de su espacio de secciones, la cual estudiaremos a continuación.

**Definición 6.** Sea  $\pi : E \rightarrow X$  un haz vectorial sobre  $X$ . Una **sección** de  $E$  es un morfismo  $s : X \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id_X$ .

**Ejemplo 8.** Sea  $\pi : E \rightarrow X$  un haz de rango  $r$  con trivializaciones

$$\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r\},$$

y con funciones de transición  $A_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ . Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} s_i : U_i &\rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r \\ x &\mapsto (x, 0), \end{aligned}$$

donde 0 denota al origen de  $\mathbb{C}^r$ . Para un elemento en la doble intersección  $x \in U_{ij}$  se tiene que

$$\varphi_{ij}(s_i(x)) = \psi_j \circ \psi_i^{-1} s_i(x) = \psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, 0) = (x, A_{ij}(x)0) = (x, 0) = s_j(x),$$

ya que multiplicar por una matriz  $A_{ij}(x)$  preserva el origen. La ecuación anterior nos dice que se satisface la igualdad  $\psi_i^{-1}(s_i(x)) = \psi_j^{-1}(s_j(x))$ , por lo que la siguiente función es un morfismo bien definido

$$\begin{aligned} s_0 : X &\rightarrow E \\ x &\mapsto \psi_i^{-1}(s_i(x)), \end{aligned}$$

para  $x \in U_i$ . Notemos que  $\pi \circ s_0(x) = \pi \circ \psi_i^{-1}(s_i(x)) = \pi \circ \psi_i^{-1}(x, 0) = x$ , entonces  $s_0$  es por definición una sección de  $E$ ; esta sección es llamada la **sección cero** o idénticamente cero.

El ejemplo anterior nos dice que todo haz tiene al menos una sección que es la sección cero. Ahora veremos que pueden existir haces que solamente tienen a la sección cero. Para esto utilizaremos la siguiente caracterización de las funciones meromorfas en la esfera de Riemann, que se puede consultar en la página 32 de [8]:

**Observación 3.** Toda función meromorfa en  $\mathbb{P}^1$  es de la forma

$$\sigma(x_0, x_1) = \frac{p(x_0, x_1)}{q(x_0, x_1)},$$

donde:

- i)  $p$  y  $q$  son polinomios homogéneos del mismo grado.
- ii) El único cero en común de  $p$  y  $q$  es el  $(0, 0)$ .

En particular, si  $\sigma$  es holomorfa en la carta  $U_i$ , es decir, si no tiene polos en  $U_i$  entonces debe ser de la forma

$$\sigma(x_0, x_1) = \frac{p(x_0, x_1)}{x_j^n},$$

donde  $n$  es el grado del polinomio  $p$  y  $j \neq i$ .

**Ejemplo 9.** Sea  $d > 0$  y consideremos el haz  $\mathcal{O}(-d)$  sobre  $\mathbb{P}^1$ . Una sección de  $\mathcal{O}(-d)$  es un morfismo

$$s : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{O}(-d),$$

por lo que en las cartas  $U_i \subset \mathbb{P}^1$  se restringe

$$\begin{aligned} s : U_i &\rightarrow \mathcal{O}(-d)|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, \sigma_i(x)), \end{aligned}$$

donde  $x = [x_0; x_1] \in \mathbb{P}^1$  y  $\sigma_i$  es una función holomorfa sobre  $U_i$ . De la observación anterior en la carta  $U_0$  se satisface  $\sigma_0(x) = \frac{p(x)}{x_0^n}$ , donde  $p(x)$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$  y en la carta  $U_1$  tenemos

$$\sigma_1(x) = \frac{x_1^d}{x_0^d} \sigma_0 = \frac{x_1^d p(x)}{x_0^d x_0^n} = \frac{x_1^d p(x)}{x_0^{d+n}}.$$

Para que esta función sea holomorfa necesitamos que  $p(x)$  cancele al factor  $x_0^{d+n}$ , por lo que la única opción es que  $p(x)$  sea un polinomio constante y que la sección  $s$  también sea constante. Entonces  $s(x) = v \in \mathbb{C}$  es un escalar que no depende de  $x$ , que además define un punto en la línea  $l_x$  para cada  $x \in \mathbb{P}^1$  y la única forma en que esto puede pasar es que  $v = 0$ . Por lo tanto, la única sección del haz  $\mathcal{O}(-d)$  es la sección cero. En particular, los haces lineales de grado negativo sobre  $\mathbb{P}^1$  no tienen secciones no cero.

**Lema 2.** Sea  $\pi : E \rightarrow X$  un haz vectorial de rango  $r$ . El conjunto

$$\{s \mid s : X \rightarrow E \text{ es sección de } E\}$$

es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial cuyo elemento neutro es la sección cero. Este espacio vectorial es llamado el **espacio de secciones** de  $E$  y se denota como  $H^0(E)$ . La dimensión de este espacio se denota como

$$h^0(E) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(E).$$

*Demostración.* Sean  $s_1, s_2 \in H^0(E)$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Definimos el morfismo  $s_1 + \lambda s_2$  puntualmente como

$$(s_1 + \lambda s_2)(x) = s_1(x) + \lambda s_2(x)$$

para todo  $x \in X$  donde las operaciones de la derecha son las de  $\mathbb{C}^r$  (inducidas por la trivialización en la fibra  $\psi_x$ ). Como las fibras son espacios vectoriales entonces

$$\pi(s_1(x) + \lambda s_2(x)) = x$$

y  $(s_1 + \lambda s_2) \in H^0(E)$ , por lo que es cerrado bajo estas operaciones. Dejamos la demostración del resto de las propiedades de espacio vectorial como ejercicio para el lector.  $\square$

**Lema 3.** Sea  $E$  un haz de la forma  $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ . Entonces

$$H^0(E) = H^0(E_1) \oplus \cdots \oplus H^0(E_n).$$

*Demostración.* Demostraremos el caso  $n = 2$  y el caso general se demuestra inductivamente. Sea  $E = E_1 \oplus E_2$  y definamos una función entre los espacios de secciones de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f : H^0(E) &\rightarrow H^0(E_1) \oplus H^0(E_2) \\ s &\mapsto (\pi_1 \circ s, \pi_2 \circ s), \end{aligned}$$

donde  $\pi_i$  es la proyección a la  $i$ -ésima coordenada. Notemos que si  $s, t \in H^0(E)$  son secciones y  $\lambda \in \mathbb{C}$  entonces

$$\begin{aligned} f(s + \lambda t) &= (\pi_1(s + \lambda t), \pi_2(s + \lambda t)) = (\pi_1(s) + \lambda\pi_1(t), \pi_2(s) + \lambda\pi_2(t)) \\ &= (\pi_1(s), \pi_2(s)) + \lambda(\pi_1(t), \pi_2(t)) = f(s) + \lambda f(t), \end{aligned}$$

por lo que  $f$  es una transformación lineal. Claramente  $f$  es sobreyectivo, ya que si  $s_1 \oplus s_2 \in H^0(E_1) \oplus H^0(E_2)$  entonces  $s_1 \oplus s_2$  define una sección de  $E$ . Además es inyectivo pues si  $f(s) = 0$  entonces  $\pi_i \circ f = 0$  para  $i = 1, 2$  y  $s = 0$ . Entonces  $f$  es una transformación lineal biyectiva, por lo que es un isomorfismo de espacios vectoriales.  $\square$

**Observación 4.** Si  $i : E \hookrightarrow F$  es un morfismo inyectivo de haces y  $s \in H^0(E)$  es una sección, entonces  $i \circ s \in H^0(F)$ , por lo que  $i$  induce un morfismo inyectivo  $H^0(E) \hookrightarrow H^0(F)$  y  $h^0(E) \leq h^0(F)$ . En particular, dos haces isomorfos tienen espacios de secciones isomorfos.

**Lema 4.** Sea  $d \geq 0$  un entero, entonces  $h^0(\mathcal{O}(d)) = d + 1$ .

*Demostración.* Una sección de  $\mathcal{O}(d)$  es un morfismo

$$s : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{O}(d),$$

por lo que en las cartas  $U_i \subset \mathbb{P}^1$  se restringe como

$$\begin{aligned} s : U_i &\rightarrow \mathcal{O}(d)|_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, \sigma_i(x)), \end{aligned}$$

donde  $x = [x_0; x_1] \in \mathbb{P}^1$  y  $\sigma_i$  es una función holomorfa sobre  $U_i$  por la observación 3 en  $U_0$  se satisface  $\sigma_0(x) = \frac{p(x)}{x_0^n}$ , donde  $p(x)$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$  y en la carta  $U_1$  tenemos

$$\sigma_1(x) = \frac{x_0^d}{x_1^d} \sigma_0 = \frac{x_0^d p(x)}{x_1^d x_0^n} = \frac{p(x)}{x_1^d x_0^{n-d}}.$$

Para que esta función sea holomorfa necesitamos que  $p(x)$  cancele al factor  $x_0^{n-d}$ , es decir,  $s$  es una sección si y sólo si  $p(x) = x_0^{n-d} f(x)$  donde  $f(x)$  es un polinomio de grado  $d$ ; podemos concluir que existe una correspondencia 1 – 1 de la forma

$$\begin{aligned} \{s | s \in H^0(\mathcal{O}(d))\} &\longleftrightarrow \{\text{polinomios homogéneos de grado } d \text{ en dos variables}\} \\ s &\longleftrightarrow f. \end{aligned}$$

El espacio vectorial de la derecha está generado por los monomios

$$\{x_0^m x_1^n | m + n = d\},$$

por lo que  $h^0(\mathcal{O}(d)) = d + 1$ .  $\square$

## 6. El espacio de extensiones

En esta sección recordamos la construcción del espacio de extensiones de espacios vectoriales, para luego poder hablar de extensiones de haces. Debido a que el estudio del espacio de extensiones es un tema muy interesante por sí mismo, enunciaremos los principales resultados sin demostración, sin embargo, todas las construcciones aquí descritas, así como los resultados enunciados, pueden ser vistos con detalle en [7], [9] y [11].

**Definición 7.** Sean  $T$  y  $W$  espacios vectoriales. Una **extensión** de  $W$  por  $T$  es una sucesión  $u$  de espacios y transformaciones lineales de la forma

$$u : 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0,$$

donde

- $i$  es inyectivo;
- $\pi$  es sobreyectivo;
- y se satisface  $Im(i) = Ker(\pi)$ .

Consideremos el conjunto  $E(W, T) := \{u \mid u \text{ es una extensión de } W \text{ por } T\}$  y definamos una relación de equivalencia  $\sim$  en este conjunto de manera siguiente: decimos que dos extensiones

$$u_1 : 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i_1} V_1 \xrightarrow{\pi_1} W \longrightarrow 0$$

$$u_2 : 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i_2} V_2 \xrightarrow{\pi_2} W \longrightarrow 0,$$

son **equivalentes**  $u_1 \sim u_2$ , si existe un isomorfismo  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 : & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow Id_T & & \downarrow \varphi & & \downarrow Id_W & & \\ u_2 : & 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

donde las funciones en las orillas son la identidad.

**Definición 8.** Dadas dos extensiones  $u_1$  y  $u_2$  en  $E(W, T)$  podemos definir otra extensión que será llamada la **suma**  $u_1 + u_2$ , de la siguiente manera: consideramos el espacio vectorial

$$\Gamma := \{(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2 \mid \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}$$

y el subespacio vectorial de  $\Gamma$  definido como

$$\{(i_1(t), -i_2(t)) \mid t \in T\}.$$

Entonces podemos calcular el cociente

$$Y := \frac{\Gamma}{\{(i_1(t), -i_2(t)) \mid t \in T\}}.$$



Finalmente definimos la suma como la extensión

$$u_1 + u_2 : 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$$

donde los morfismos están definidos como

$$i : b \mapsto [i_1(t), 0]$$

$$\pi : [v_1, v_2] \mapsto \pi_1(v_1).$$

El siguiente resultado no será demostrado en este escrito pero puede ser visto en [9].

**Teorema 2.** *Dados dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ , las clases de equivalencia de elementos en  $E(W, T)$  con la relación  $\sim$  forman un espacio vectorial con la suma definida anteriormente. El elemento neutro de este espacio vectorial es la clase de la extensión*

$$u_0 : 0 \longrightarrow T \xrightarrow{i_1} T \oplus W \xrightarrow{\pi_2} W \longrightarrow 0,$$

donde  $i_1$  es la inclusión en la primera coordenada y  $\pi_2$  es la proyección a la segunda coordenada. Este espacio vectorial es llamado el **espacio de extensiones** y se denota como  $Ext^1(W, T)$ .

Utilizando la estructura lineal de las fibras de los haces vectoriales podemos dar una noción de extensión de haces, de manera análoga al caso de espacios vectoriales.

**Definición 9.** Sean  $E$  y  $G$  haces vectoriales sobre una variedad  $X$ . Una **extensión** de  $G$  por  $E$  es una sucesión de haces y morfismos de haces de la forma

$$u : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0,$$

tal que en cada fibra induce una extensión de espacios vectoriales

$$u_x : 0 \longrightarrow E_x \xrightarrow{i_x} F_x \xrightarrow{\pi_x} G_x \longrightarrow 0.$$

Consideremos el conjunto  $\mathcal{E}(G, E) := \{u \mid u \text{ es una extensión de } G \text{ por } E\}$  y definamos nuevamente una relación de equivalencia en  $\mathcal{E}(G, E)$ : decimos que dos extensiones de haces son equivalentes  $u_1 \sim u_2$ , si existe un isomorfismo de haces  $\varphi$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} u_1 : 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow Id_E & & \downarrow \varphi & & \downarrow Id_G & & \\ u_2 : 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Se puede demostrar que el siguiente conjunto es un haz vectorial

$$Y := \frac{\{(f_1, f_2) \in F_1 \oplus F_2 \mid \pi_1(f_1) = \pi_2(f_2)\}}{\{(i_1(t), -i_2(t)) \mid t \in E\}},$$

y podemos definir la **suma**  $u_1 + u_2$  como la extensión

$$u_1 + u_2 : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0,$$

donde los morfismos están definidos como

$$\begin{aligned} i : b &\mapsto [i_1(t), 0] \\ \pi : [f_1, f_2] &\mapsto \pi_1(f_1). \end{aligned}$$

Esta operación también dota con una estructura de espacio vectorial a las extensiones de haces vectoriales.

**Teorema 3** ([7], 6.1 pág. 237). *Dados dos haces vectoriales  $E$  y  $G$  sobre una variedad  $X$ , el conjunto de clases de equivalencia de elementos en  $\mathcal{E}(G, E)$  con la relación  $\sim$  es un espacio vectorial con la suma definida anteriormente. El elemento neutro de este espacio es la clase de la extensión*

$$u_0 : 0 \longrightarrow E \xrightarrow{i_1} E \oplus G \xrightarrow{\pi_2} G \longrightarrow 0,$$

donde  $i_1$  es la inclusión en la primera coordenada y  $\pi_2$  es la proyección a la segunda coordenada. Este espacio vectorial es llamado el **espacio de extensiones** de haces y se denota como  $\text{Ext}^1(G, E)$ .

**Definición 10.** Si  $u \in \text{Ext}^1(G, E)$  es una extensión de la forma

$$u : 0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

y  $H$  es un haz vectorial, definimos la extensión  $u \otimes H \in \text{Ext}^1(G \otimes H, E \otimes H)$  como

$$u \otimes H : 0 \longrightarrow E \otimes H \longrightarrow F \otimes H \longrightarrow G \otimes H \longrightarrow 0,$$

donde los respectivos morfismos son inducidos por el producto tensorial en las fibras

$$u_p \otimes H_p : 0 \longrightarrow E_p \otimes H_p \longrightarrow F_p \otimes H_p \longrightarrow G_p \otimes H_p \longrightarrow 0.$$

El siguiente resultado relaciona la dimensión del espacio de extensiones de haces con la dimensión de un espacio de secciones; la demostración de este teorema puede ser vista en [7] (6.1 pág. 237).

**Teorema 4.** *Si  $E$  y  $G$  son haces vectoriales sobre una variedad  $X$  entonces*

$$\text{Ext}^1(G, E) \cong H^0(K_X \otimes E^* \otimes G)^*.$$

*En particular,  $\dim(\text{Ext}^1(G, E)) = h^0(K_X \otimes E^* \otimes G)$ .*

Una de las razones por la que es interesante estudiar las extensiones de haces es que análogamente al caso de espacios vectoriales, todo haz sobre una variedad analítica de dimensión uno se puede expresar como una extensión. En particular se tiene lo siguiente.

**Lema 5** ([10], Lema 2.3.9). *Dado  $E$  un haz vectorial de rango  $r > 1$  sobre  $\mathbb{P}^1$ , existe una extensión de la forma*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0,$$

donde  $L$  es un haz lineal y  $E'$  es un haz de rango  $r - 1$ .

## 7. El teorema de Grothendieck

En esta sección demostraremos finalmente el Teorema de Factorización de Grothendieck, el cual describe hasta isomorfismo todos los haces vectoriales sobre la esfera de Riemann. La demostración original de este resultado puede ser vista en [5].

**Teorema 5** (Teorema de Factorización de Grothendieck). *Sea  $E$  un haz vectorial de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^1$ . Entonces existen enteros  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$  tales que*

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r).$$

Antes de demostrar este teorema necesitaremos un último lema:

**Lema 6.** *Sea  $E$  un haz de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^1$  tal que existe una extensión de la forma*

$$u : 0 \longrightarrow \mathcal{O}(a) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1}) \longrightarrow 0.$$

*Entonces el siguiente conjunto de números enteros tiene un máximo*

$$D := \{d \in \mathbb{Z} \mid \text{existe una extensión } 0 \rightarrow \mathcal{O}(d) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(d_{r-1}) \rightarrow 0\}.$$

*Demostración.* Como  $D$  es un subconjunto no vacío en  $\mathbb{Z}$  es suficiente ver que  $D$  tiene una cota superior. Veamos que  $n := \max\{a, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}\}$  es una cota superior.

Supongamos que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $m > n$  y que satisface  $m \in D$ . Entonces existe una extensión de la forma

$$v : 0 \longrightarrow \mathcal{O}(m) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_{r-1}) \longrightarrow 0,$$

y podemos considerar la extensión  $v \otimes \mathcal{O}(-m)$

$$v \otimes \mathcal{O}(-m) : 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \otimes \mathcal{O}(-m) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(b_i - m) \longrightarrow 0,$$

por lo que existe un morfismo inyectivo  $\mathcal{O} \hookrightarrow E \otimes \mathcal{O}(-m)$  y por la observación 4

$$1 = h^0(\mathcal{O}) \leq h^0(E \otimes \mathcal{O}(-m)).$$

Por otro lado, considerando la sucesión  $u \otimes \mathcal{O}(-m)$

$$u \otimes \mathcal{O}(-m) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}(a - m) \xrightarrow{j} E \otimes \mathcal{O}(-m) \xrightarrow{\pi} \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i - m) \longrightarrow 0,$$

y de la manera en que elegimos  $m$  tenemos que  $a - m < 0$  y  $a_i - m < 0$  para cada  $i$ . Como los haces de grado negativo no tienen secciones no cero (ver ejemplo 9) entonces  $h^0(\mathcal{O}(a - m)) = 0$  y

$$H^0(\mathcal{O}(a_1 - m) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1} - m)) = \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^0(\mathcal{O}(a_i - m)) = 0.$$

Como  $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-m)) > 0$ , existe una sección no cero  $s \in H^0(E \otimes \mathcal{O}(-m))$ . Entonces la composición  $\pi \circ s$  satisface

$$\pi \circ s \in H^0\left(\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i - m)\right),$$

pero este último es el espacio vectorial cero, por lo tanto  $s$  se factoriza mediante el morfismo  $j$ , es decir, existe  $s' \in H^0(\mathcal{O}(a - m))$  tal que  $s = j \circ s'$ . De nuevo  $H^0(\mathcal{O}(a - m)) = 0$ , entonces  $s' = 0$  lo cual implica  $s = 0$  y esto es una contradicción. De esta forma concluimos que  $n$  es cota superior de  $D$  y se sigue el resultado.  $\square$

Finalmente estamos listos para demostrar el teorema de Grothendieck:

*Demostración del teorema 5.* La demostración es por inducción en el rango de  $E$ .

**caso  $r = 1$ :** Por el teorema 1 sabemos que  $\text{Pic}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}$ , es decir, todo haz lineal  $E$  satisface  $E \cong \mathcal{O}(k)$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

**caso  $r - 1$ :** Supongamos que para todo haz de rango menor o igual a  $r - 1$  existen enteros  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{r-1}$  tales que

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1}).$$

**caso  $r$ :** Sea  $E$  un haz de rango  $r$ . Por el lema 5 existen haces  $L$  y  $E'$  de rangos 1 y  $r - 1$  además de una extensión de la forma

$$u : 0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis de inducción  $L \cong \mathcal{O}(a)$  y  $E' = \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1})$ , entonces la extensión  $u$  toma la forma

$$u : 0 \longrightarrow \mathcal{O}(a) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1}) \longrightarrow 0,$$

y por el lema anterior podemos suponer que  $L$  es de grado máximo con esta propiedad, es decir, en la notación del lema anterior podemos suponer  $a = \text{máx}(D)$ . Combinando el hecho de que  $K_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(-2)$ , junto con el lema 3 y el teorema 4 tenemos

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(E', L) &\cong H^0(K_{\mathbb{P}^1} \otimes L^* \otimes E') \\ &\cong H^0(\mathcal{O}(-2) \otimes \mathcal{O}(-a) \otimes (\mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1}))) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^0(\mathcal{O}(a_i - a - 2)). \end{aligned}$$

De la maximalidad de  $a$  tenemos  $a \geq a_i$  y  $\deg(\mathcal{O}(a_i - a - 2)) = a_i - a - 2 < 0$ , por lo que  $h^0(\mathcal{O}(a_i - a - 2)) = 0$  para cada  $i$  y se sigue que

$$\dim(\text{Ext}^1(E', L)) = \sum_{i=1}^{r-1} h^0(\mathcal{O}(a_i - a - 2)) = 0.$$

La igualdad anterior implica que  $\text{Ext}^1(E', L)$  es el espacio vectorial que consiste solamente del elemento neutro  $[u_0]$ , entonces  $u \sim u_0$ , lo cual por definición significa que existe un isomorfismo  $\varphi$

$$\begin{array}{ccccccccc} u : & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \\ & & & L & \longrightarrow & L \oplus E' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

por lo que  $E \cong L \oplus E' \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_{r-1})$  y esto termina la demostración. □

**Observación 5.** Dado  $E$  un haz de rango  $r$  sobre la esfera de Riemann entonces la descomposición dada en el teorema 5 es única.

*Demostración.* Supongamos que  $E$  tiene dos descomposiciones de la forma

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r) \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_r),$$

donde  $a_1 \geq \cdots \geq a_r$  y  $b_1 \geq \cdots \geq b_r$ . Si  $a_1 > b_1$ , por la primera descomposición

$$h^0(E \otimes \mathcal{O}(-a_1)) = \bigoplus_{i=1}^r h^0(\mathcal{O}(a_i - a_1)) > 0,$$

y como  $a_1 > b_i$  para  $1 \leq i \leq r$ , por la segunda descomposición

$$h^0(E \otimes \mathcal{O}(-a_1)) = \bigoplus_{i=1}^r h^0(\mathcal{O}(b_i - a_1)) = 0,$$

lo cual es una contradicción, así que  $a_1 \leq b_1$ . Si suponemos  $a_1 < b_1$  podemos utilizar el mismo argumento para llegar a una contradicción y concluir que  $a_1 = b_1$ . Continuando con este argumento para  $i > 1$  en un número finito de pasos se sigue el resultado. □

**Definición 11.** Dado  $E$  un haz sobre la esfera de Riemann tal que

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$

definimos el **grado** de  $E$  como el número

$$\text{deg}(E) := \sum_{i=1}^r a_i.$$

Notemos que por el lema 1 esta definición es consistente con nuestra noción de grado para haces lineales.

El teorema de Grothendieck resuelve la clasificación de haces vectoriales sobre  $\mathbb{P}^1$  de la siguiente manera: las clases de isomorfismo de haces de rango  $r$  y grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^1$  están en correspondencia con las particiones de enteros (posiblemente negativos) de longitud  $r$  de  $d$ , es decir, existe una correspondencia 1 – 1 entre los conjuntos

$$\{[E] \mid E \text{ haz de rango } r \text{ y grado } d\} \longleftrightarrow \{(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r \mid n_1 \geq \dots \geq n_r \text{ y } \sum_{i=1}^r a_i = d\}$$

$$[E] \longleftrightarrow (a_1, \dots, a_r).$$

### 8. Haces semiestables sobre $\mathbb{P}^1$

Ahora estudiaremos un tipo muy especial de haces vectoriales, llamados haces estables y semiestables. Empezamos definiendo estos objetos.

**Definición 12.** La **pendiente** de un haz vectorial  $E$  sobre  $\mathbb{P}^1$  se define como

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{\text{rank}(E)}.$$

$E$  se dice ser **semiestable** si para cada subhaz propio  $E'$  de  $E$ , se tiene  $\mu(E') \leq \mu(E)$ . Si la desigualdad anterior es siempre estricta diremos que  $E$  es **estable**. En particular, los haces lineales son estables por definición.

A continuación utilizaremos el teorema de Grothendieck para construir la clasificación de haces estables y semiestables sobre  $\mathbb{P}^1$ . Veamos primero que los únicos haces estables sobre la esfera de Riemann son precisamente los lineales:

**Teorema 6.** Sobre  $\mathbb{P}^1$  no hay haces estables de rango mayor que 1.

*Demostración.* Sea  $E$  un haz de rango mayor o igual a dos sobre  $\mathbb{P}^1$ . Por el teorema 5

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$

donde  $a_1 \geq \dots \geq a_r$ . Entonces  $\mathcal{O}(a_1) \hookrightarrow E$  es un subhaz propio con la inclusión a la primera coordenada y

$$\mu(E) = \frac{\sum_{i=1}^r a_i}{r} \leq a_1 = \mu(\mathcal{O}(a_1)),$$

por lo tanto  $E$  no es estable. □

**Teorema 7.** Los únicos haces semiestables sobre  $\mathbb{P}^1$  son de la forma

$$E \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a),$$

para algún  $a$  en  $\mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Primero veamos que un haz de rango  $r$  de la forma  $E \cong \mathcal{O}(a) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a)$  es semiestable: sea  $F$  un subhaz propio de  $E$ . Por el teorema 5 existen enteros  $b_1 \geq \cdots \geq b_k$  tales que

$$F \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_k).$$

Supongamos que  $b_1 > a$ , entonces tenemos un morfismo inyectivo de la forma

$$F \otimes \mathcal{O}(-b_1) \hookrightarrow E \otimes \mathcal{O}(-b_1),$$

y utilizando los isomorfismos anteriores tenemos

$$\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(b_2 - b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(b_k - b_1) \hookrightarrow \mathcal{O}(a - b_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a - b_1).$$

Por la observación 4 las secciones de estos haces satisfacen

$$1 \leq h^0(\mathcal{O}) + h^0(\mathcal{O}(b_2 - b_1)) + \cdots + h^0(\mathcal{O}(b_k - b_1)) \leq r h^0(\mathcal{O}(a - b_1)),$$

lo cual es una contradicción ya que  $a - b_1 < 0$  y la única sección de un haz lineal de grado negativo es la sección cero. Se sigue que  $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-b_1)) = 0$ . Entonces  $b_1 \leq a$  y tenemos que

$$\mu(F) \leq b_1 \leq a = \mu(E).$$

Por lo tanto,  $E$  es semiestable.

Ahora veamos que todos los haces semiestables lucen de esta forma: sea  $E$  un haz semiestable de rango  $r$  sobre  $\mathbb{P}^1$ . Por el teorema 5 existe un isomorfismo

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$

con  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$ . Como  $E$  es semiestable, todo subhaz propio tiene pendiente menor o igual a la pendiente de  $E$ . En particular esto se cumple para los subhaces lineales  $\mathcal{O}(a_i)$ , por lo que

$$a_1 = \mu(\mathcal{O}(a_1)) \leq \mu(E) \leq \frac{\sum_{i=1}^r a_i}{r} \leq a_1,$$

y  $\mu(E) = a_1$ , pero la única forma en que esto puede pasar es si  $a_1 = a_2 = \cdots = a_r$ .  $\square$

Los resultados anteriores describen completamente los haces estables y semiestables sobre  $\mathbb{P}^1$ . Ahora describiremos los haces en  $\mathbb{P}^1$  en términos de sus secciones:

**Definición 13.** Sean  $r, d$  y  $k$  números naturales. Denotaremos como  $B_{\mathbb{P}^1}^{ss}(r, d, k)$  al conjunto de clases de isomorfismo de haces semiestables  $E$  en  $\mathbb{P}^1$  que tienen rango  $r$ , grado  $d$  y que satisfacen  $h^0(E) \geq k$ ; y denotaremos como  $B_{\mathbb{P}^1}(r, d, k)$  al subconjunto de  $B_{\mathbb{P}^1}^{ss}(r, d, k)$  que consiste de clases de haces estables.

Utilizando el teorema de Grothendieck y el lema 4 podemos concluir:

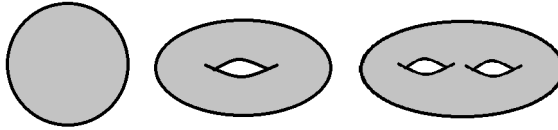
**Corolario 1.** En la notación anterior:

- i)  $B_{\mathbb{P}^1}(r, d, k) \neq \emptyset$  si y sólo si  $r = 1$  y  $k \leq d + 1$ . Además en este caso  $B_{\mathbb{P}^1}(1, d, k)$  consiste de un único elemento que es  $[\mathcal{O}(d)]$ .
- ii) Si  $r > 1$ , entonces  $B_{\mathbb{P}^1}^{ss}(r, d, k) \neq \emptyset$  si y sólo si  $d \equiv 0 \pmod{r}$  y  $k \leq d + r$ . Además en este caso  $B_{\mathbb{P}^1}^{ss}(r, d, k)$  consiste de un único elemento que es

$$[\mathcal{O}(d/r) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d/r)].$$

## 9. Unas palabras sobre la teoría de Brill-Noether

A lo largo de este artículo hemos estudiado los haces vectoriales sobre la variedad  $\mathbb{P}^1$ , la cual convenientemente es la superficie de Riemann compacta más sencilla, en el sentido de que es homeomorfa a una esfera; así que una manera natural de generalizar estas construcciones es clasificar haces sobre una superficie de Riemann compacta  $C$  homeomorfa a una esfera con un número finito de asas. El número de asas es llamado el **género** de  $C$  (para una introducción al estudio de haces sobre superficies de Riemann compactas recomendamos ver [1], [4], [8] y [11]). En este escenario podemos generalizar nuestras definiciones de la siguiente forma:



**Figura 4.** Ejemplos de superficies de Riemann compactas de género cero, uno y dos.

Sea  $C$  una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 0$  y sea  $\pi : E \rightarrow C$  un haz de rango  $r$ . Definimos el **grado** de  $E$  como

$$\deg(E) := h^0(E) - h^0(K_C \otimes E^*) + r(g - 1);$$

notemos que cuando  $g = 0$  esta definición es consistente con nuestro análisis para haces sobre  $\mathbb{P}^1$ . Para haces lineales con  $d \geq -1$  tenemos

$$\deg(\mathcal{O}(d)) = d = h^0(\mathcal{O}(d)) - 1 = h^0(\mathcal{O}(d)) - h^0(\mathcal{O}(-2 - d)) - 1.$$

Si  $d < -1$

$$\deg(\mathcal{O}(d)) = d = h^0(\mathcal{O}(d)) - h^0(\mathcal{O}(-2 - d)) - 1.$$

Finalmente para haces de rango superior si

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$



entonces

$$\begin{aligned}
 \deg(E) &= \sum_{i=1}^r a_i \\
 &= \sum_{i=1}^r (h^0(\mathcal{O}(a_i)) - h^0(\mathcal{O}(-2 - a_i)) - 1) \\
 &= \sum_{i=1}^r h^0(\mathcal{O}(a_i)) - \sum_{i=1}^r h^0(\mathcal{O}(-2 - a_i)) - r \\
 &= h^0(E) - h^0(K_{\mathbb{P}^1} \otimes E^*) - r.
 \end{aligned}$$

Una vez definido el grado de un haz  $E$  podemos además definir su **pendiente** como

$$\mu(E) = \frac{\deg(E)}{\text{rank}(E)},$$

y dar una noción de estabilidad de la misma manera en que lo hicimos en la definición 12.

**Definición 14.**  $E$  es **semiestable** si para cada subhaz propio  $E'$  de  $E$ , se tiene  $\mu(E') \leq \mu(E)$ , y es **estable** si la desigualdad anterior es siempre estricta.

Nuevamente podemos definir los conjuntos de haces estables y semiestables con secciones no nulas, como en la definición 13.

**Definición 15.** Sean  $r, d$  y  $k$  números naturales. Definimos los conjuntos de clases de haces semiestables y estables sobre  $C$  como

$$\begin{aligned}
 B_C^{ss}(r, d, k) &:= \{[E] \mid E \text{ es semiestable con } \text{rank}(E) = r, \deg(E) = d \text{ y } h^0(E) \geq k\} \\
 B_C(r, d, k) &:= \{[E] \in B_C^{ss}(r, d, k) \mid E \text{ es estable}\}.
 \end{aligned}$$

Por lo que la primera pregunta que surge naturalmente es

*¿podemos describir a los conjuntos  $B_C(r, d, k)$  y  $B_C^{ss}(r, d, k)$ ?*

La realidad es que estos conjuntos suelen ser muy difíciles de describir y sólo se conocen completamente cuando  $C$  tiene género cero (corolario 1) o cuando el género es uno. La clasificación de haces estables y semiestables sobre superficies de Riemann compactas y el estudio de los conjuntos  $B_C(r, d, k)$  y  $B_C^{ss}(r, d, k)$  es un tema de investigación dentro de la geometría algebraica que ha sido muy productivo en las últimas décadas, esta área es conocida como *Teoría de Brill-Noether*.

Uno de los principales problemas que estudia la teoría de Brill-Noether es el caracterizar cuándo los conjuntos  $B_C(r, d, k)$  y  $B_C^{ss}(r, d, k)$  son no vacíos. En el caso de haces lineales, a pesar de que no se conoce la respuesta en general, sí existe una caracterización bastante satisfactoria, la cual enunciamos a continuación (ver [2]):

**Teorema 8.** *Sea  $C$  una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 0$  y sean  $d$  y  $k$  números naturales. Definimos*

$$\rho(g, d, k) := g - k(g - d + k - 1).$$

- i)** *Si  $\rho(g, d, k) \geq 0$  entonces  $B_C(1, d, k) \neq \emptyset$ .*  
**ii)** *Si  $C$  es general con género  $g \geq 3$  y  $\rho(1, d, k) < 0$  entonces  $B_C(1, d, k) = \emptyset$ .*

Antes de continuar queremos hacer una pausa para analizar las hipótesis del segundo inciso de este teorema. Como el lector habrá observado, aparece la noción de superficie de Riemann general, este concepto es algo bastante particular del diccionario de geometría algebraica y para los fines panorámicos de este artículo el segundo inciso puede interpretarse como:

- ii)** *Para casi toda superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 3$  se cumple que si  $\rho(1, d, k) < 0$  entonces  $B_C(1, d, k) = \emptyset$ .*

Más formalmente: sea  $\mathcal{M}_g$  el espacio que parametriza las clases de isomorfismo de todas las superficies de Riemann compactas de género  $g$ . Un enunciado se dice ser cierto en una superficie de Riemann general  $C$  de género  $g$  cuando existe un abierto denso (de Zariski) de  $\mathcal{M}_g$  tal que en este abierto el enunciado se cumple.

Notemos que el teorema anterior únicamente caracteriza el caso de haces lineales sobre superficies de Riemann generales con  $g \geq 3$ . Para el caso de rango  $r \geq 2$ , se conocen algunos resultados de no vacuidad pero aún quedan muchas preguntas abiertas. Concluimos este artículo enunciando algunos de los resultados más generales de la teoría de Brill-Noether, con el fin de mostrar al lector lo relativamente poco que se sabe de los conjuntos  $B_C(r, d, k)$  cuando  $C$  tiene género  $g \geq 1$ :

- Para  $g = 1$  y rango  $r \geq 1$ : la clasificación de haces fue completamente descrita por M. Atiyah en [3]. En este caso la teoría de haces estables y semiestables fue desarrollada por L. Tu en [12].
- Si  $g \geq 2$  y  $r = 1$ : el resultado que abarca más casos es el teorema 8, es decir, no se sabe mucho cuando  $C$  no es general.
- Cuando  $g \geq 2$  y  $r \geq 2$ : bajo ciertas condiciones numéricas en  $g, r, d, k$  se conocen algunos resultados sobre no vacuidad de  $B_C(r, d, k)$ , pero hay muy pocos ejemplos describiendo explícitamente las variedades  $B_C(r, d, k)$  y  $B_C^{ss}(r, d, k)$  (ver [6] para el resultado de no vacuidad más general, y ver [13] para ejemplos de haces de rango dos).

### Agradecimientos

El segundo autor desarrolló este trabajo financiado parcialmente por la beca CONACyT #765195 junto con el apoyo de una beca de Newmont Gold Corp Peñasquito 2019-2020 coordinada con la Fundación UAZ.

### Referencias

- [1] A. Antón, *El estudio de estructuras geométricas mediante espacios de moduli*. Lecturas Matemáticas, Vol. 36 (2) 197-229 (2015).
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, Vol. 1 Springer-Verlag (1985).
- [3] M. Atiyah, *Vector Bundles over an elliptic curve*, London Math. Soc. (3) 7 414–452 (1957).
- [4] F. Flamini, *Lectures on Brill-Noether theory*, Workshop on Curves and Jacobians (2011), 1–19.
- [5] A. Grothendieck, *Sur La Classification Des Fibres Holomorphes Sur La Sphere de Riemann*, American Journal of Mathematics 79 (1) 121–138 (1957).
- [6] I. Grzegorzcyk, M. Teixidor i Bigas, *Brill-Noether theory for stable vector bundles*. Moduli spaces and vector bundles, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 359 29–50 Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009).
- [7] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Graduate Texts in Mathematics, No. 52 (1977)
- [8] R. Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics (5) AMS (1995).
- [9] J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, DOI 10.1007/978-0-387-68324-9.
- [10] H. Sotelo Carrillo, *Haces vectoriales sobre curvas elípticas*, Tesis de Licenciatura, UAM Universidad Autónoma de Zacatecas, México (2019).
- [11] M. Teixidor I Bigas, *Vector Bundles on Curves*, Notas de curso.
- [12] L. Tu, *Semistable bundles over an elliptic curve*, Adv. Math., 98 (1) 1-26 (1993).
- [13] P. Newstead, *Some examples of rank-2 Brill-Noether loci*, Revista Matemática Complutense, DOI: 10.1007/s13163-017-0241-6 (2016)

Recibido en septiembre de 2020. Aceptado para publicación en diciembre de 2022.

GRACIELA REYES-AHUMADA  
CONACYT - U. AUTÓNOMA DE ZACATECAS  
ZACATECAS, MÉXICO  
e-mail: grace@cimat.mx

HÉCTOR SOTELO CARRILLO  
PCCM  
U. AUTÓNOMA DE MÉXICO  
U. MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO  
MORELIA, MÉXICO  
e-mail: hsotelo@matmor.unam.mx