Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática

Marta Bastán, Héctor Cuenya, Gema Fioritti

Universidad Nacional de Río Cuarto

Resumen

Este trabajo forma parte de la tesis de maestría en Didáctica de la Matemática: *La Transposición Didáctica de la Topología en la Formación de Profesores de Matemática. Incidencia de los modelos epistemológicos y docentes.*

Desde el marco teórico de este proyecto *El Programa Epistemológico* iniciado por Broussea(1986), se asigna un rol fundamental al estudio del saber matemático, no sólo como un saber en sí mismo sino anlizando el tipo de problemas que le dieron origen, , las *técnicas matemáticas* (entendidas éstas como maneras de hacer, no como algoritmos) que surgen en ese contexto y los elementos *tecnológico-teóricos* que se utilizan.

A partir del estudio histórico-epistemológico pudo verse que los problemas que le dieron origen se sitúan en dos contextos matemáticos diferentes: el *Geométrico y* el del *Análisis Matemático* y que en cada uno de ellos se da respuesta a determinado tipo de problemas, que se resuelven con *técnicas* diferentes y que utilizan tecnologías diferentes aunque mantienen en común ciertos elementos *tecnológico-teórico*s.

Teniendo como base este análisis se realiza un estudio de la organización matemática enseñada, respecto de lo topológico en la formación de profesores de matemática, para dar cuenta de las restricciones que sufre el saber hasta tomar las características particulares que presenta en ese ámbito y las razones que determinan esas restricciones.

En el reparto de responsabilidades entre quienes tenemos a nuestro cargo la formación de Profesores de Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto, los docentes de la asignatura Introducción a la Topología nos preocupamos por el análisis de nuestras propias prácticas. Coincidiendo con Jean Brun (1996) en *Evolución de las relaciones entre la psicología del desarrollo cognitivo y la didáctica de la matemática* donde afirma que, el punto de partida de toda cuestión didáctica requiere de una toma de posición epistemológica relativa al objeto de conocimiento, hacemos un análisis histórico-epistemológico de las nociones topológicas para, a partir de allí, asumir un posicionamiento epistemológico que permita establecer posibles correspondencias entre los saberes enseñados y los saberes científicos.

La motivación inicial de este análisis estuvo centrada en dar respuesta a las siguientes cuestiones:

¿Qué reconstrucción de los conceptos topológicos se plantea en la formación de profesores?

¿Qué comprende la topología en ese ámbito?

¿Cómo surgen y qué transformaciones sufren y por qué los contenidos topológicos?

¿Qué significan estos contenidos en la matemática actual?

Respecto a la última pregunta podemos decir que, en la actualidad los conceptos topológicos están presentes en todas las áreas de la matemática, sería impensable formar un matemático que no dispusiera de los conceptos básicos de la topología entre sus saberes.

Respecto a la pregunta inicial pueden darse muchas respuestas. Una respuesta en términos formales la ofrece cualquiera de los libros de texto sobre el tema, donde encontraremos definiciones del tipo de la siguiente con muy ligeras variantes .

En el libro de Kelly (1975) se define Topología de la siguiente manera:

> *Una **topología** es una familia J de conjuntos que satisfacen las dos condiciones siguientes: La intersección de dos miembros cualesquiera de J es un miembro de J, la unión de los miembros de cualquier subfamilia de J es miembro de J.*

Una definición de este tipo es ventajosa desde cierto punto de vista por su expresión minimalista y generalizadora, pero es desventajosa desde otro, sobre todo para la enseñanza, porque muestra un alto grado de opacidad en cuanto a los objetos a los que hace referencia y a los problemas, cuestiones o situaciones que permite abordar y por sobre todo a aquellos que le dieron sentido a su génesis. Ello nos lleva a preguntarnos justamente por el campo de problemas que dieron origen a los saberes topológicos.

El estudio histórico permitió ver, entre otras cuestiones, que el tipo de problemas que dieron lugar al surgimiento de los conceptos que hoy abarca la topología se enmarcan esencialmente en dos campos de la matemática; por un lado ciertos conceptos topológicos tienen su génesis en problemas ligados a la Geometría y por otro, quizá la mayor parte, surgen ligados al Análisis Matemático. Lo cual da origen a dos vertientes iniciales en la topología que, de acuerdo a la denominación actual, son llamadas respectivamente: ***Topología Combinatoria*** y ***Topología Conjuntista.*** Veamos cuándo y cómo surgen cada una de ellas, qué problemas están en sus origenes y qué elementos técnicos y tecnológico-teóricos surgen en su proceso de generación .

1.-Análisis epistemológico de la *Topología Combinatoria*

El inicio de esta rama de la topología es establecido por varios autores entre ellos J.J.Connors and E.F. Robertson (2002), en el trabajo de **Euler** titulado *Solutio problematis and geometriam situs pertinentis* (*La solución de un problema relacionado con la geometría de la posición)* publicado en 1736 en el cual se plantea y se presenta una solución del ***problema de los puentes de Köningsberg.***

Desde el título del trabajo puede observarse, por un lado que Euler entendía que estaba trabajando en el campo de la geometría y por otro que estaba construyendo un nuevo tipo de geometría, a la que le asignó un nombre: ***Geometría de la Posición***.

La formulación del *problema de los puentes de Königsberg* planteaba averiguar si era posible recorrer los siete puentes de la ciudad de Königsberg, pasando sólo una vez por cada uno de ellos y regresando al punto de partida.

Este problema que aparece como un problema aislado y que podría parecer hasta no demasiado interesante, resultó ser emblemático para la matemática en tanto abrió la posibilidad del tratamiento de una problemática mucho más general y permitió desarrollar importantes conceptos topológicos.

En ese trabajo Euler no sólo mostró que el problema de atravesar los siete puentes pasando una sola vez por cada uno era imposible, sino que lo hizo a través de una modelización muy particular que favoreció las generalizaciones del problema. Los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos utilizados en dicha modelización constituyeron el inicio de una nueva teoría que hoy se conoce como ***Teoría de Grafos*.**

Si bien el problema de los puentes está en el inicio de la Topología, Euler además aborda otra problemática que también contribuye a su desarrollo.

En una carta que Euler escribe a Goldbach en 1750, da una formulación de la que él llamó *Fórmula del Poliedro* y que hoy se conoce como **Fórmula de Euler para poliedros:**

$$\boxed{v - a + c = 2}$$

dónde ***v*** *es el número de vértices,* ***a*** *el de aristas y* ***c*** *el de caras del poliedro.*

Nos preguntamos hoy por qué razón una fórmula tan simple no fue conocida con anterioridad, por ejemplo por los griegos que realizaron un trabajo tan importante en poliedros o por Archimedes o posteriormente por Descartes quienes trabajaron intensamente en este tema.

Connor y Robertson (2002) sitúan la razón en que en la geometría griega y hasta Euler, era impensado considerar como pertenecientes al ámbito de lo geométrico a las propiedades de figuras o cuerpos en que no aparecieran involucradas, implícita o explícitamente, las magnitudes, en este sentido entendemos que este fue también un paso significativo hacia lo topológico.

Este trabajo se desarrolla bajo el marco teórico de la **Teoría Antropológica de lo Didáctico** (Chevallard Y, 1985), en el que se modelizan los saberes matemáticos en términos de *praxeologías matemáticas* u *organizaciones matemáticas* (OM) a las que se define como cuadruplas (T,τ, θ, Θ) formadas por tipos de tareas (T), técnicas utilizadas para resolver esas tareas (τ), métodos para justificar las técnicas llamados tecnologías(θ) y justificaciones de las tecnologías, llamadas teorías (Θ). Distingue esencialmente una *praxis* constituida por las (T, τ) y un *logos* constituido por (θ, Θ)

Veamos qué tipo de *logos* realiza Euler. En dos trabajos realizados en 1752 aparecen publicados detalles del tratamiento de su fórmula, en el primero admite que el resultado que postula no pudo ser probado y recién en el segundo da una prueba basada en la disección de ciertos sólidos en tetraedros.Es decir un logos geométrico. Pero si bien la prueba es, en cierto sentido limitada, dado que los poliedros de los que habla son sólo poliedros convexos, en el logos utilizado ha desaparecido toda alusión a magnitudes o cantidades, lo cual es también un paso hacia otra geometría.

Posteriormente Antoine Jean Lhuilier (1750-1840), matemático muy poco conocido que trabajó la mayor parte de su vida en problemas relacionados con la fórmula de Euler, publicó en 1813 un importante trabajo en el que mostró las limitaciones de dicha fórmula demostrando su invalidez para poliedros con agujeros. Esto nuevamente es un salto desde el punto de vista topológico porque los agujeros forman parte del estudio de la geometría.

Se logra una generalización de la fórmula de Euler para sólidos que tienen ***g*** cantidad de agujeros. La fórmula válida en este caso es la siguiente:

$$\boxed{v - a + c = 2 - 2g}$$

Queda así planteado un nuevo problema geométrico: el estudio y caracterización de los sólidos con o sin agujeros. Problemática que desemboca en el estudio de la *conectividad de una superficie.*

En este marco se plantea el primer resultado conocido que hace referencia a ***invariantes topológicos****.* Es decir a una propiedad que se mantiene a través de deformaciones continuas, reversibles y sin rupturas, es decir por los que hoy llamamos *homeomorfismos*[1], que como se verá más adelante estos juegan un rol muy importante en la génesis de la Topología.

Justamente el primer invariante conocido es la llamada Característica de Euler

$$\boxed{\chi = v - a + c}$$

El problema de la conectividad de superficies fue abordado también por otros matemáticos como Jordan (1887) que la examina haciendo uso de otros elementos técnicos, lo hace en términos de *circuitos irreducibles* [2]. Demuestra que el *número de circuitos irreducibles* es también un invariante topológico de la superficie. Lo que contribuye a incrementar el campo de los invariantes topológicos.

La generalización de este problema a más dimensiones fue abordado por varios matemáticos: Por ejemplo por Listing que estudió los problemas de conectividad en los espacios Euclideanos de tres dimensiones y

[1] Un homeomorfismo entre espacios topológicos es una aplicación continua con inversa continua.

[2] Se llaman *circuitos irreducibles* a curvas simples cerradas que no pueden ser reducidas a un punto mediante una deformación continua.

por Betti (1870) que extendió el estudio de la conectividad a figuras *n* dimensionales. Betti define "*número de conectividad"* diciendo que el *número de conectividad unidimensional* es el número de curvas cerradas que pueden ser dibujadas en la estructura geométrica y que no dividen a la superficie en regiones disjuntas. El *número de conectividad bidimensional* es el número de superficies cerradas en la figura que colectivamente no encierran ninguna región tridimensional de la figura. Y así siguiendo para *n* dimensiones. Nuevamente un invariante topológico.

Estos últimos trabajos son muy importantes desde el punto de vista del *logos,* si bien se trabaja con cuerpos y figuras geométricas las técnicas y los elementos tecnológicos utilizados de alguna manera se alejan de lo geométrico para acercarse al Análisis, desde el punto de vista de la enseñanza, podrían servir como saberes vinculantes entre las dos topologías.

Como antecedente en la constitución de la Topología como una rama de la matemática con características propias están los trabajos de Poincaré (1895) en los que se hace mención, por primera vez, a una nueva rama de la matemática a la que llama ***Análisis Situs****.* Presenta esta teoría en forma sistemática y rigurosa a través de cinco memorias. Esta nueva teoría sirvió de punto de partida para numerosas investigaciones de autores como Brouwer, Alexandroff, Lefchetz, etc. Aparece todavía vinculada a la geometría, dado que a través de los trabajos de Jonquieres y de Poincare, se logran generalizaciones de la fórmula de Euler, primeramente a poliedros no necesariamente convexos y luego a *variedades p-dimensionales.* De esta manera se amplía y consolida el estatus tecnológico-teórico de una disciplina incipiente.

Listing en su trabajo *Vorstudien zur Topologiem* escrito en 1847 emplea por primera vez la palabra ***Topología*** en un trabajo científico, aunque se sabe que, en correspondencias con otros matemáticos, ya hacía diez años que era utilizada.[3] En trabajos posteriores publica resultados importantes respecto a la banda de Moebius, donde estudia componentes de superficies y conectividad utilizando diferentes técnicas, lo hace en términos de no-orientabilidad de superficies. Claramente trabajaron conceptos topológicos que tienen su origen en un marco geométrico.

En resumen los orígenes de la topología podemos encontrarlos en la geometría abordando aquellos problemas en que las magnitudes están suprimidas por completo. Esto da lugar a un corpus teórico que inicialmente se corresponde con una *geometría netamente cualitativa*, que fue llamada *Analysis Situs* y que hoy se llama ***Topología Combinatoria.***

Este origen geométrico es reconocido por grandes matemáticos como Poincaré quién textualmente dice que la Topología es :

> *"como una geometría en la cual la cantidad está suprimida por completo, es una geometría cualitativa ...No quiero decir que la geometría métrica descansa en la lógica pura pero en esta disciplina las intuiciones son de otra naturaleza análogas a las que desempeñan un papel esencial en la aritmética y el álgebra¨ Ky Fan.(1957)*

Este carácter geométrico es retomado por Klein de 1872, cuando expone su ***Programa de Erlangen,*** en el que presenta una sistematización y jerarquización de todas las geometrías a partir de los grupos de transformaciones, concibiéndolas como los invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones. En ese marco define en particular la *Topología* como la geometría generada por las transformaciones homeomórficas. También desde este lugar la Topología aparece como una extensión de lo geométrico.

2.- Análisis epistemológico de la Topología Conjuntista

Podríamos decir que en forma relativamente independiente de la Topología Combinatoria surge la Topología Conjuntista cuyo desarrollo se inicia con Cantor en el siglo XIX. En la base genética de la Topología convergieron ciertas problemáticas provenientes del *Análisis Matemático* que inicialmente fueron:

1.- El problema de la Dimensión
2.- El problema del Continuo
3.- El problema de la Convergencia

---

[3] *Topología* es una palabra que desde su nombre hace referencia al estudio del lugar, del espacio. *Topo* lugar *logía* estudio

4.- El problema de la existencia de puntos extremos

Si bien estos problemas, no son los únicos, son los que determinamos como inciales. Cada uno aborda problemáticas bien diferenciadas las cuales permiten el desarrollo de ciertos elementos técnicos y tecnológico-teóricos que contribuyen a la constitución de la Topología. Si bien son diferentes están vinculados entre sí.

2.1.- El problema de la Dimensión

Hasta mediados del siglo XIX se aceptaba de manera implícita que la dimensión de un espacio estaba determinada por el número de coordenadas independientes necesarias para establecer sus puntos.

Según puede observarse en algunos trabajos de **Cantor**, era aceptado sin demostración que las aplicaciones biyectivas deberían preservar la dimensión. Las dudas al respecto se ponen de manifiesto en una carta que Cantor envía a Dedekind (1874) donde le plantea la necesidad de analizar esto y propone, probablemente con la idea de arribar a algún absurdo, establecer una correspondencia biunívoca entre una superficie y una línea recta. Dedekind responde manifiestando su incredulidad al respecto:

> "*....es evidente que dos variables independientes no pueden reducirse a una*"..." el número de dimensiones de una variedad continua es ahora igual que antes, el primer y principal invariante de una variedad".

A pesar de manifestar este disenso **Dedekind** también se aboca a abordar la problemática de la invariancia de la dimensión reconociendo su importancia. Pero es Cantor quien da una respuesta en contrario en 1877. En una nueva carta a Dedekind, le comunica su hallazgo, había logrado establecer una biyección entre los puntos de un segmento y los de un cubo de dimensión *n*. En esta carta también dice que:

> "*las diferencias entre figuras de distinto número de dimensiones deben estar en aspectos lejanos al número de coordenadas independientes que determinan sus puntos*".

El descubrimiento de Cantor es un punto de inflexión en la problemática topológica, hace que el problema de la preservación de la dimensión, se encamine hacia otras aplicaciones, las *continuas* y de esta manera el problema salga definitivamente del ámbito de lo geométrico.

En 1874 Dedekind formuló una conjetura sin demostración respecto a la invariancia de la dimensión y en el mismo año en forma independiente **Lebesgue** dio una demostración que si bien no fue correcta, tuvo gran importancia desde las técnicas que aportó*, se* basó en el ***principio del recubrimiento*** [4] que luego sería largamente usado en topología

Teorema: Si se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de una variedad A de a dimensiones sobre los de una variedad B de b dimensiones con a distinto de b la correspondencia es discontinua

Donde se establece que abordar el problema de la *dimensión* requiere analizar los *invariantes bajo homeomorfismos*. El primer intento de demostración general de este resultado fue realizado por **Netto** en 1878. Fue una demostración importante por el tipo de elementos técnicos que incorporó, utilizó en forma implícita ciertos resultados que no son triviales. Dice por ejemplo:

> *"...La superficie A estará bordeada por una o más curvas $a_1, a_2,...$ de manera que sea imposible pasar de un punto interior a otro exterior por medio de una línea continua sin cortar alguna de ellas..."*

Pero advierte acerca de la necesidad de definir con rigor los conceptos geométrico-topológicos utilizados como los de : ***punto interior, punto frontera,*** etc..

En 1879 Cantor escribe a Dedekind que cree haber encontrado una solución al *problema de la invariancia de la dimensión.* Pero una vez más las demostraciones tuvieron que ser modificadas. Sin embargo fueron de gran utilidad ya que en ellas aparecen importantes conceptualizaciones topológicas como la definición que hoy se conoce como de ***curva de Jordan*** [5] y resultados como por ejemplo una ***versión generalizada del Teorema del Valor Intermedio.***

---

[4] Cada punto de un dominio D de n dimensiones pertenece al menos a uno de los conjuntos cerrados $E_1, E_2,...,E_p$ dados en número finito y si estos conjuntos son suficientemente pequeños, existen puntos comunes al menos a n+1 de ellos.

[5] Curva es el conjunto de puntos representados por dos funciones continuas x=f(t), y= g(t) para $t_1 \geq t \geq t_0$ y pide además que no se corte a sí misma.

"Toda figura conexa que tiene puntos interiores y puntos exteriores a una hiperesfera corta necesariamente el borde de la misma" fue enunciado por Cantor sin demostración.

Llevó 33 años conseguir la demostración definitiva del teorema de la dimensión que estuvo a cargo de ***Brouwer** (1911),* quien extendiendo el teorema de Jordan obtuvo los siguientes resultados.

> *Teorema: En un espacio IR^n una variedad (n-1)-dimensional lo separa en dos regiones*

Alexander estableció el teorema dual lo que permitió resolver definitivamente el problema de la dimensión:

> *Teorema: Una variedad m-dimensional no puede contener la imagen biyectiva y continua de un dominio de dimensión superior*

Con este resultado culmina un largo camino en la matemática marcado por el *problema de la invariancia de la dimensión,* en el que van apareciendo sucesivamente importante conceptos topológicos.

Desde el punto de vista de la Topología lo logrado en esta etapa fue muy valioso no sólo por los resultados obtenidos sino por el desarrollo teórico logrado y por el pasaje de lo geométrico a lo analítico

2.2.- El Problema del Continuo

El concepto de *continuo* la matemática lo hereda de la física y se plantea cómo modelizar ese concepto físico. Inicialmente lo utiliza de manera intuitiva, en el siglo XVII Isaac Newton en su obra "Tractatus de Quadratura Curvarum" decía:

"No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas sino generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos..."

Aún en el siglo XVIII D´Alembert en un artículo habla de la siguiente manera:

" Si imaginamos que un punto se desplaza, trazará una línea; una línea que se desplaza engendraría una superficie, etc..."

Posteriormente Baumgarten comienza a separar la noción de continuo de la de movimiento, define continuo de la siguiente manera:

"Una serie de puntos con puntos intermedios que da lugar a una línea es un continuo. Análogamente una superficie es una serie continua de líneas, y un cuerpo sólido, una serie continua de superficies".

De todas maneras la noción de *continuo* continuó siendo vaga e imprecisa hasta comienzos del siglo XIX, en que Bolzano propone dar un tratamiento riguroso al tema

Bolzano mantuvo cierta dualidad respecto a quién correspondía el tratamiento del continuo. Por un lado sostuvo que los conceptos físicos de *flujo* o *movimiento* eran ajenos a la Geometría, dado que ésta permitía representar lo estático, no lo dinámico como lo requería la *teoría del flujo*. Y por otro, esta teoría requería basarse en la teoría del espacio para su descripción, es decir en la *geometría*.

Para eso comienza definiendo en forma precisa *línea*, *superficie* y *cuerpo sólido.*

Al excluir al movimiento del ámbito de lo matemático, necesita dar una *definición estática de continuo,* para ello previamente necesita hablar de proximidad y ello lo lleva a definir una serie de objetos matemáticos que van a ser muy importantes para la Topología.

Da una primera definición muy imprecisa de ***distancia***:

"Lo que se asocia a un punto b en relación con un punto a, de manera que sea independiente del punto a, recibe el nombre de distancia del punto b al punto a".

A partir de esto considera a las figuras geométricas como conjuntos de puntos con una estructura interna inducida por su concepto de distancia.

Define la noción de ***Punto Aislado***

"Un punto aislado es un punto i de un objeto espacial que cumple la condición de que existen distancias arbitrariamente pequeñas, tomadas desde i, de manera que i no posea ningún punto proximo en dicho objeto para las mismas"

Es claro que esta no es la idea actual de Punto Aislado. Esta noción le permite definir ***Continuo*** como un objeto espacial que no posee puntos aislados. Este es el primer intento conocido de describir el continuo sin hacer uso de nociones externas a la matemática. Las deficiencias son observadas, por un lado por el mismo Bolzano y por otro por Cantor en 1883. Si bien lo que hoy se entiende por punto aislado no es lo que definió Bolzano mantiene una relación, todo punto aislado en el sentido actual es un punto aislado Bolzano.

Entre los años 1879 y 1884 Cantor publicó una serie de trabajos bajo el título "*über unendliche, lineaire Punktmannichfaltigkeiten"* (Sobre los conjuntos de puntos infinitos lineales) donde introduce la teoría de cardinales y ordinales transfinitos para abocarse al estudio del continuo desde la matemática. Esto permite vincular el problema de la cardinalidad con el del continuo.

En Freixenet (1991) se recopilan algunas citas textuales de Cantor donde establece en forma previa a su trabajo, los problemas que se planteaba para abordar el estudio del continuo.

"...me siento obligado a desarrollar aquí únicamente, de manera lo más breve posible y solamente desde el punto de vista de la teoría matemática de los sistemas, la noción de continuo..."

Uno de los primeros problemas que se plantea es el que se refiere a independizar al continuo aritmético de la noción de tiempo. Dice al respecto:

"... Debo aclarar antes de nada que en mi opinión la introducción del concepto de tiempo o la idea de tiempo no debe servir para explicar la noción mucho más primitiva y general de continuo.."

"...estoy asimismo convencido que no se puede comenzar por la idea intuitiva de espacio para llegar a conclusiones acerca del continuo ya que el espacio y las figuras que se conciben en él sólo pueden llegar con la ayuda de un continuo ya formado de manera abstracta..."

"...sólo me queda buscar pues, a través de los conceptos de números reales una idea puramente aritmética y lo más general posible, de un continuo de puntos..."

Define *el espacio aritmético de n dimensiones* G_n (es el actual IR^n con la métrica euclídea) y llama a todo conjunto de puntos P de G_n, un ***conjunto aritmético.*** De allí que luego se va a llamar la definición aritmética de continuo.

En este estudio se introduce una noción clave, la de *Punto Límite* referido a conjuntos (hoy conocido como ***Punto de Acumulación***) que ya había sido utilizada en el teorema de Bolzano-Weierstrass[6]. (Esta definición generaliza la idea de convergencia al definir la noción de punto límite separado de la idea de sucesión y la idea de convergencia ahora encuentra un campo más amplio).

Cantor entendió que los conjuntos continuos contenían todos sus puntos límites, es así que se propuso caracterizar a los conjuntos que contenían a todos sus puntos límites. Para ello definió **Conjunto Derivado**[7] y definió **Conjunto Perfecto** como el que coincide con su derivado y establece que:

"todo continuo debe ser siempre un conjunto perfecto".

Sin embargo debe reconocer que con ello no basta, lo muestra a través de un conjunto que hoy se conoce como el ***Conjunto Discontinuo de Cantor***[8].

Para completar su definición de continuo introduce un nuevo concepto el de ***Conjunto Bien Encadenado.***

"...Decimos que un sistema de puntos está bien encadenado *cuando para dos puntos arbitrarios t y t´de este sistema y un número dado ε tan pequeño como se quiera existe siempre un número finito de puntos* $t_1, t_2, ..., t_n$ *de T , de varias maneras, tales que las distancias* $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_nt'$ *son todas menores que ε...."*

---

[6] Teor: Bolzano-Weierstrass: *todo conjunto limitado, con infinitos puntos, tiene algún punto iímite.*

[7] Se llama **Conjunto Derivado de un conjunto P** al conjunto ***P'*** que contiene a los puntos límites del conjunto P.

[8] Discontinuo de Cantor: definido como todos los números reales que pueden expresarse de la forma

$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + ... + \frac{a_n}{3^n} + ...$ donde los coeficientes a_n pueden tomar los valores 0 y 2.

Establece entonces que:

"Un conjunto es continuo si es simultáneamente Perfecto y Bien Encadenado"

En este marco surgen otras nociones que van a conformar el núcleo de la topología, como por ejemplo la de ***Conjunto Conexo***[9], la de ***Conjunto Cerrado*** o la de ***Conjunto Denso***, las cuales permiten redefinir *conjunto perfecto* como el que es simultáneamente cerrado y denso. Puede verse cómo todas las nociones cobran sentido a partir de un problema concreto que se plantea la ciencia.

Si bien Cantor no trató a la Topología como una nueva rama de la matemática con estructura propia, es considerado uno de los padres dado que las tareas que se planteó llevaron a desarrollar, mejorar y generalizar importantes técnicas matemáticas y un nuevo marco tecnológico-teórico para su justificación.

2.3.- El Problema de la Convergencia

Ligado al *problema del continuo* surge el *problema de la convergencia*. Este problema puede decirse que se inicia con Bolzano en 1817 quien busca ampliar la noción de convergencia de sucesiones. En términos actuales, se trata de definir al continuo como aquél conjunto que coincide con todos los puntos de acumulación.

En 1906, Frechet en su tesis doctoral "*Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel"*, basado en la idea de límite de una sucesión, define formalmente los ***Conjuntos de Clase (L),*** a través de un sistema de axiomas. En esa definición hace uso de una noción generalizada de límite, la de *punto límite de un conjunto*, que la caracteriza de la manera siguiente:

a) Es posible determinar si dos elementos de (L) son distintos.
b) Es posible definir el concepto de **"límite de un conjunto de elementos de (L)"** de manera que, para un conjunto infinito de elementos $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ de (L) se puede determinar si existe , o no el límite en (L) con las restricciones siguientes:
   i) Si $A_i = A$ $(i = 1,2,....)$, $\{A_i\}$ tienen límite A
   ii) Si $\{A_i\}$ tienen límite A, todas las subsucesiones, tomadas en el mismo orden tienen límite A.

Esta noción juega un rol muy importante en el desarrollo de la topología no sólo por el objeto que define sino por la manera en que lo hace; es la primera formulación axiomática de un espacio abstracto . En ella se aborda, como concepto clave el de ***convergencia,*** ampliando así la noción de límite de sucesiones a la de límite de un conjunto.

2.4.- Problema de la existencia de puntos extremos

Era ampliamente conocido el resultado que asevera que sobre un intervalo cerrado y acotado es posible garantizar la existencia de un máximo (mínimo) para cualquier función continua; en el trabajo en espacios de funciones se busca cómo generalizar estos resultados, buscando las condiciones de los intervalos cerrados y acotados, que fueran generalizables a los espacios en general y resultaran suficientes para garantizar la existencia de extremos.

Por otro lado Cauchy en su *Course dÁnalyse*, da una definición de integral para funciones continuas sobre un intervalo cerrado cuya demostración de existencia requiere la continuidad uniforme de la función en el intervalo, hecho que se prueba para intervalos cerrados y acotados. Nuevamente se requiere generalizar esta noción y surge la pregunta acerca de qué otro tipo de conjuntos permiten garantizar que las funciones continuas son uniformemente continuas. Lo cual lleva a la noción de Compacto.

La palabra ***Compacto*** para designar un concepto matemático aparece por primera vez en 1904 mencionada por Frechet en su trabajo "Generalisation d´un Theoreme de Weierstrass"

"Llamaremos conjunto compacto a todo conjunto E tal que existe siempre al menos un elemento común a una sucesión infinita arbitraria de conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n, ...$

[9] Define conjunto conexo como lo que hoy se conoce por conexo por diagonales. Es conexo aquel conjunto en el que todo par de puntos pueden unirse mediante una poligonal completamente contenida en él.

contenidos en E cuando son no vacíos, cerrados y cada uno de ellos contenidos en el anterior".

Además agrega:

"La condición necesaria y suficiente para que un conjunto E sea compacto es que todo conjunto E` formado por una infinidad de elementos distintos de E dé lugar, como mínimo, a un punto límite".

En esta empresa de abstraer las propiedades esenciales de los intervalos trabajaron varios matemáticos entre los que podemos destacar, por un lado a Bolzano y Weierstrass que buscaban caracterizar los subconjuntos cerrados y acotados en términos de sucesiones y por otro, a Borel y Lebesgue que lo hacían en términos de cubrimientos por abiertos.

En el mismo año Lebesgue prueba (generalizando un teorema de Borel) que del siguiente teorema se deduce rápidamente la continuidad uniforme de una función continua en el intervalo [a,b] .

Demuestra que:

"Si se tiene una familia Δ de intervalos tales que todo punto del intervalo [a,b] es interior al menos a uno de los intervalos de Δ, existe una familia formada por un número finito de los intervalos de Δ que tienen la misma propiedad: todo punto de [a,b] es interior a uno de ellos"

A fines del siglo XIX, en Europa, muchos matemáticos entre ellos Cantor, Weierstrass y Dedekind comenzaron a establecer en forma rigurosa, muchas nociones que durante centurias habían sido consideradas como intuitivas y evidentes. El nivel de rigor y abstracción logrado en este proceso provocó una suerte de revolución en el pensamiento matemático.

Por ejemplo la noción de *Entorno, que es una noción básica de la Topología,* surge a partir de una prueba rigurosa del teorema de Bolzano que realiza Weierstrass en 1877.

Según Tarres Freixent (1991), la definición que da Frechhet de los **Conjuntos de Clase (L)** le ofrece pocas posibilidades desde el punto de vista teórico y opta por definir una segunda clase de espacios abstractos los ***Conjuntos (E) de Clase (V)*** que, veremos más adelante, le permite llegar a definir los espacios métricos.

Sin embargo es muy importante desde el punto de vista de la metodología, la topología se basa en el uso de espacios abstractos y , a partir de esta noción, Frechet aparece como el iniciador de este nivel de generalización en los espacios con los que trabaja la topología.

Esta idea de definir espacios en forma abstracta es retomada por Riez en 1908 en su trabajo "*Stetigket und abstrakte Mengenlehre"* (Tai del IV Congresso Internazionale dei Matematici. Roma,1908, II,18-24) trabajo en el que define una de las nociones básicas de la Topología, la de **Punto de Acumulación.**

A partir de ello Cantor define en forma general, ***Conjunto Cerrado***[10], lo cual permite a su vez definir una herramienta fundamental para el desarrollo de la topología, como es la noción de ***Conjunto Abierto***[11].

Una de las nociones básicas y paradigmáticas de la topología, tanto en la obra matemática como en las organizaciones didácticas, y que en la actualidad aparece como más oscura y separada de su génesis, es la de ***compacto*** que analizaremos a continuación.

Si bien no existe un desarrollo lineal en la evolución del concepto, es posible comprender las motivaciones que llevaron a la constitución de las distintas definiciones y de sus correspondientes implicaciones.

Compacto

A la noción de compacto convergen esencialmente tres problemas de la matemática que la requieren como medio para su solución:

i) Determinar las condiciones más generales sobre los conjuntos en los que una función continua alcanza un valor extremo, para espacios métricos de dimensión finita.
ii) La extensión a espacios de dimensión infinita de la posibilidad de hallar puntos extremos.
iii) Garantizar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

i) Esto fue analizado anteriormente.

---

[10] Se llama Conjunto Cerrado al que contiene a todos sus puntos límites.
[11] Se define Conjunto Abierto como aquel que es complemento de un conjunto cerrado.

ii) Otra vía de surgimiento para la noción de compacidad fue el estudio de *espacios abstractos de dimensión infinita,* como el espacio de las funciones continuas sobre un intervalo cerrado, con la métrica uniforme, al que llamamos $\boldsymbol{C^0}$**.**

En estos espacios, a diferencia de lo que ocurre en IR^n, decir que un conjunto es cerrado y acotado no es equivalente a decir que es compacto en el sentido de Bolzano-Weierstrass. El problema es entonces caracterizar a los subconjuntos de C^0 sobre los cuales se pueda garantizar la existencia de puntos de máximos y de mínimos para funcionales continuas definidas en C^0. Esto lleva a la ***compacidad.***

iii) Vinculado a lo anterior aparece una tercera razón centrada en determinar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Quienes trabajaron en ella fueron: Peano, Arcela y Ascoli.

En realidad se formularon varias definiciones de **compacto,** no todas equivalentes, cada una de ellas ligada a problemáticas y contextos particulares; todas en conjunto contribuyeron a perfilar el objeto matemático que es hoy.

La noción de compacto una de las nociones que hoy aparece como más opaca en cuanto a su definición, como vimos, es el producto de diferentes problemáticas y necesidades que configuraron el objeto.

En estos cuatro problemas se marca el inicio de la Topología que hoy es llamada **Topología Conjuntista**.

Como en la asignatura que nosotros tomamos como modelo de análisis, tienen una fuerte importancia los espacios métricos, veremos en qué momento de la Topología se desarrollan éstos y bajo qué problemas.

2.5.- Los espacios métricos y su relación con el surgimiento de los espacios topológicos.

La problemática a partir de la cual surgen los espacios métricos está centrada en la necesidad de definir ***una distancia*** o métrica en espacios diferentes a los euclideanos.

Frechet se plantea el problema de generalizar las técnicas utilizadas en los espacios euclídeos para reconocer la continuidad de una función definida sobre ellos, a espacios cuyo conjunto soporte no fuera ningún IR^n como el espacio C^0 de las funciones continuas. Se planteó abstraer de la métrica euclídea las mínimas propiedades que deba verificar una métrica y que pudieran ser extendidas a un espacio cualquiera. En 1906 define los *conjuntos de clase (L),* ya mencionados, de todas maneras estos espacios no le permiten lograr todo lo buscado, define entonces una nueva clase de espacios, a los que denomina ***conjuntos (E) de clase (V)*** en los que se da por primera vez una definición general de ***distancia.*** Claramente los trabajos de Frechet constituyen el germen de los *espacios métricos.*

Esta definición aparece expresada de la manera siguiente:

a)Se debe distinguir si dos elementos de (E) son iguales o no.

b) Para cada par A,B de elementos de (E) se asigna un número (A,B) con las propiedades:

i) $(A,B)=(B,A)\geq 0$

ii) $(A,B)=(B,A)=0$ *si y solo si A=B*

iii) $(A,B)\leq\varepsilon$ *y* $(B,C)\leq\varepsilon \Rightarrow (A,C)\leq f(\varepsilon)$ *donde* $f(\varepsilon)$ *tiende a cero con* ε *y f es independiente de A,B,C*

Los espacios en los que está definida una métrica se los llama ***espacios métricos****.*

Ello permite generalizar la noción de ***punto límite*** a estos nuevos espacios. Es de hacer notar que esta noción, redefinida para espacios métricos, en realidad no requería en su definición hacer uso ni explícito ni implícito de la métrica o distancia, sino de la noción de entorno. Lo que ya aparece como un indicio de lo que mueve a la institucionalización de la topología.

Unos años más tarde, en 1914, Hausdorff en su libro *Grunzügue den Mengenlere*, da una definición axiomatizada del concepto de ***entorno,*** en la que utiliza sólo cuatro axiomas que tampoco hacen uso de las métricas. Este concepto puede considerarse como uno de los generadores de la topología, dado que a partir de él comienza el desarrollo sistemático de la teoría general de los *Espacios Topológicos.* Este es usado por Riez en 1909 para dar una definición axiomática de Topología, en un trabajo presentado en el *International Congress of Mathematics* en Roma.

J. Tarrés Freixenet (1992) presenta una cita textual de Weil que dice:

> *..... Podemos asociar a cada punto del conjunto determinadas partes del espacio llamadas entornos que pueden permitir la construcción de la teoría con la eliminación del concepto de distancia....*

Como paso previo a la construcción de espacios topológicos se trabaja con variedades, espacios que localmente se comportan como un IR^n. Y considera como entornos en las variedades a los transformados de los discos a través de aplicaciones continuas. En este caso ya los entornos se independizan de las distancias.

Haussdorf observa que ciertas relaciones entre los conceptos de ***distancia***, de ***entorno*** y de ***punto límite,*** que de alguna manera permiten marcar cierto orden de preponderancia. Observó que a partir del concepto de distancia puede definirse el de *entorno* y a partir de éste el de *punto límite*. Sin embargo partiendo del concepto de *entorno* puede definir el de *punto límite* pero ya no el de *distancia. Y* que a partir del de *punto límite*, no pueden formalizarse el de *entorno* y el de *distancia*.

A la vista de esto Haussdorff opta por desarrollar su teoría basado en la noción de *entorno* y define **Espacio Topológico** de la siguiente manera:

> *Un **espacio topológico** es un conjunto E compuesto por elementos x, junto con determinados subconjuntos U_x asociados a x, los subconjuntos U_x reciben el nombre de **entornos de x** y están sometidos a las condiciones siguientes:*
>
> - *A cada punto le corresponde al menos un entorno U_x . Todo entorno contiene al punto x.*
> - *La intersección de dos entornos de x contiene un entorno de x*
> - *Si x e y son puntos de U_x, existe un entorno U_y de y contenido en U_x.*
> - Si x e y son dos puntos distintos de E existen entornos U_x y U_y sin elementos en común

En estos espacios resulta posible generalizar todas las nociones de espacios métricos que no requieran imprescindiblemente de la distancia. Por ejemplo la noción de *convergencia* que puede ser establecida en términos de *entornos,* lo cual facilita su generalización a espacios en los que no haya una métrica. Sólo es necesario contar con una familia de conjuntos que cumplan determinadas condiciones.

Este tratamiento formal de los conceptos es el estadio final en el proceso de construcción de la topología que, si no se comprende como proceso aparece como una matemática que se independiza totalmente de los problemas y objetos a los que alude.

3.- El desarrollo de la lógica en la estructuración de la Topología.

Como dijimos, el desarrollo de la Topología, como disciplina científica, se basa en las herramientas de la lógica, que en ese momento, alcanza un desarrollo tal que permite garantizar la legitimada de las teorías formales[12] . Este tipo de desarrollos teóricos formales tienen gran aceptación en la ciencia matemática. Los desarrollos matemáticos en la era *post logicismo* y *post formalismo* alcanzan el grado de abstracción máximo dado su carácter formal y minimalista. Minimalistas, en tanto utilizan la mínima lógica necesaria para garantizar los razonamientos matemáticos correctos, permiten controlar los caminos deductivos haciéndolos más cortos y permiten obtener resultado prescindiendo por completo de la *naturaleza* de los objetos y e tomando en cuenta sólo el esquema formal de las relaciones abstractas que configuran la estructura.

Como dicen Nagel y Newman (1970*).*

> *.... Se admitió así que las matemáticas eran algo mucho más abstracto y formal de lo que tradicionalmente se había supuesto. Más abstracto porque las afirmaciones matemáticas pueden ser hechas en principio sobre cualquier objeto, sin estar esencialmente circunscriptas a un determinado conjunto de objetos o propiedades de objetos, y más formal porque la validez de las demostraciones matemáticas se asienta en la estructura de las afirmaciones, más que en la naturaleza especial de su contenido¨.*

12 Formal, en el sentido que prescinde de los objetos a los que alude.

Como resultado la Topología resulta ser un desarrollo teórico muy ligado a la precisión pero alejado de la percepción. Ya la noción abstracta de *espacio*, que resulta ser una noción básica para el desarrollo de la Topología, entra en colisión con la noción de *espacio geométrico* que hasta entonces se impone naturalizada por el uso. Y si bien la geometría euclidiana también alude a entes abstractos, en tanto las figuras o cuerpos geométricos no forman parte de la realidad, aún mantienen un correlato transparente con la intuición.

Es en este contexto histórico en el que se desarrolla la topología, de allí que sus conceptos y proposiciones aparezcan como un producto, deductivamente organizado, alejado de la organización genética del mismo.

Aparece en la ciencia una suerte de enfrentamiento entre la teoría y la intuición, hecho que aparece de forma contundente en la topología.

Esto se agiganta en la enseñanza de la Topología, porque en el contexto de la ciencia, el carácter abstracto puede ser superado a través de correlaciones con objetos que cobran significación en el contexto en que se trabaja. En la enseñanza los conceptos topológicos si resultan totalmente abstractos y pierden su razón de ser.

El estudio histórico permite ver, entre otras cuestiones,

- Que todos los conceptos topológicos **surgen en el contexto de algún problema** o cuestión.
- Que los problemas que dan lugar al surgimiento y vinculación de los conceptos topológicos son los que hacen que los saberes cobren sentido, son la **razón de ser de los conceptos.**
- Que la topología tiene esencialmente **dos bases genéticas** diferentes una más vinculada a la Geometría y otra más al Análisis Matemático que dan origen a dos vertientes iniciales en la topología: *Topología Combinatoria* y *Topología Conjuntista*.
- Que la Topología como teoría formal es **el producto final** de un proceso complejo.
- Que comprender la formulación de las topología hoy requiere conocer las **motivaciones lógicas** que la determinan.

Ello nos llevó a preguntarnos ¿Qué topología se reconstruye en la formación de profesores de matemática?.

4.- Análisis de la Topología en la formación de Profesores en Matemática

Llamamos ***I*** al espacio institucional en el cual se piensa, decide y enseña la formación de los profesores de matemática. Nos preocupa hacer visibles de qué manera la *institución en que se forman los profesores de matemática* condiciona los objetos matemáticos que emergen en los sistemas de enseñanza.

Desde el marco teórico del proyecto, la TAD, se modeliza el proceso de transformación que sufre el saber hasta constituirse en saber aprendido, a través del llamado proceso de *Transposición Didáctica.* En el esquema siguiente se muestra este proceso, que se inicia en el saber sabio y culmina en el *saber aprendido,* pasando por el *saber a enseñar y el saber enseñado.* En cada etapa de este proceso se plantean reconstrucciones sucesivas de las organizaciones matemáticas que se configuran a partir de las restricciones silenciosas que las instituciones imponen.

A los saberes se los denomina Organizaciones Matemáticas o Praxeologías Matemáticas (OM).

En el esquema se muestran las OM y las I_n que son las instituciones en las que se configuran las OM.

Gascón (2004) presenta la *Transposición Didáctica* bajo el siguiente esquema*:*

OM Sabia → **OM a enseñar** → **OM enseñada** → **OM aprendida**

I_1 I_2 I_3 I_4

Con I_i se indican las siguientes instituciones

I_1: Institución productora del saber matemático.

I_2: Noosfera[13].

---

formal, en el sentido que prescinde de los objetos sobre los que opera

I_3: Institución de enseñanza en que se desarrolla el proceso de estudio.

I_4: Comunidad de estudio propia del proceso de estudio.

Los trabajos tradicionales en didáctica se centran en el estudio de la OM enseñada o la OM aprendida, la TAD postula la necesidad de comenzar el proceso de análisis en las etapas anteriores de la transposición didáctica y fundamentalmente en el análisis del saber sabio.

El análisis de la OM sabia es el que se realiza a partir del análisis histórico-epistemológico anterior, el de la OM a enseñar se realiza a partir de las propuestas curriculares y de la bibliografía del profesor y el de la OM enseñada a partir de los apuntes de clase del docente. La OM aprendida no fue analizada.

Se mencionan a continuación en forma sucinta los rasgos más salientes de lo observado en las OM a enseñar y enseñada; el detalle del análisis realizado en estas OM se encuentra en la tesis de maestría mencionada.

4.1.- OM a enseñar y enseñada

Las características principales que muestra la OM enseña pueden sintetizarse de la siguiente manera:

(1) ***La asignatura hace visible una sola dimensión de lo topológico.*** Sólo abraca conceptos de la *Topología Conjuntista*. Podría pensarse que la dimensión geométrica de la topología no es abordada porque no interesa a la formación de Profesores, sin embargo basta analizar la significatividad que cobra la Geometría en la escuela media respecto del Análisis Matemático para, al menos, interrogarse acerca de cuál dimensión no debería obviarse para un Profesor de Matemática. Los teoremas y proposiciones fundamentales son en gran medida generalizaciones de resultados del Análisis Matemático.

(2) **La topología en I** puede describirse **como un *Análisis Generalizado*** entre otras razones porque

- Las organizaciones matemáticas que se construyen son abarcativas de otras OM comprendidas en el Análisis y que en muchos casos mantienen hasta su nombre.
- Aparecen nomenclaturas propias del Análisis como los "ε y δ".
- Ciertos elementos tecnológico-teóricos hacen uso de conceptos del Análisis.

(3) ***La topología en I no mantiene la funcionalidad que presenta en la ciencia.*** No se proponen problemas que sirvan de hilo conductor para la reconstrucción de los saberes, lo que da lugar a una reconstrucción de ciertas OM desarticuladas e incompletas. La falta de abordaje de estos problemas para la presentación de las nociones, como por ejemplo el problema de la aritmetización del continuo en la ciencia, hace que ciertos saberes muy vinculados a la enseñanza en la escuela media, no cobren sentido para el alumno y aparezcan como meras elucubraciones teóricas.

(4) ***La topología como Análisis generalizado manifiesta diferencias con él.***

Si bien la topología se muestra como una generalización del Análisis en *I*, presenta diferencias significativas con él que hacen al sentido. En el Análisis las relaciones entre los saberes y el gráfico mantienen una conjugación permanente que hacen al sentido, esto se pierde abruptamente en la Topología en que el gráfico suele ser más una celada a la intuición que una verdadera ayuda en tanto en general las representaciones gráficas aluden a espacios euclídeos. En Análisis las nociones surgen como modelizaciones de problemas del espacio físico, en la topología entendida como *Análisis Generalizado*, no aparece correlato intuitivo en tanto es una modelización de una modelización. Pero que, por no ser planteada como tal también desaparece su razón de ser.

(5) ***Por qué la Topología en I no es una generalización de la geometría.***

- No se generaliza ninguno de los resultados estudiados en geometría.
- Los objetos de los que se habla no son reconocidos como objetos geométricos.
- Los problemas no plantean generalizaciones de problemas estudiados en el ámbito de la geometría.
- Los símbolos no se corresponden con símbolos geométricos

Las observaciones citadas están lejos de ser un inventario exhaustivo de las características distintivas de la OM enseñada, tienen la finalidad de hace entendible el recorte institucional de los saberes a partir de preguntarnos por las relaciones que mantiene la topología en la ciencia y en la enseñanza. Esto sólo sirve de punto de partida para una gran cantidad de preguntas como por ejemplo.¿Qué topología debería enseñarse en I?.¿Qué debería considerar la topología en I para que cobre sentido para un alumno del

---

[13] *Noosfera: está constituida por quienes piensan el sistema de enseñanza.*

profesorado?.¿Debería cambiar lo que se entiende por topología en *I* o no?¿ Cuáles son las razones por las que se realiza ese recorte de lo topológico en I?. Algunas de ellas han sido respondidas y otras no.

6.- A modo de conclusiones

El estudio de la OM sabia resultó útil en varios sentidos, permitió mostrar semejanzas y diferencias entre la OM sabia y la OM enseñada, explicando las discontinuidades que se presentan en la OM a enseñar y que hacen al sentido de los saberes. Fundamentalmente el análisis histórico epistemológico permitió analizar las formas de racionalidad que se fueron conjugando a lo largo de la historia hasta constituir el producto final que hoy aparece como *la topología*, descripta a través de los tipos de problemas y resultados que pone en juego, de sus saberes, de sus formas expresivas y de las estrategias que utiliza y de los tipos de enunciados que pone en juego; todo ello permite ver que estructuralmente la OM a enseñar se configura de manera diferente.

Permitió comprender por qué lo que aparece como OM enseñada en la formación de profesores bajo el nombre de *topología* no abarca, ni aproximadamente lo que la ciencia entiende por ello, que aquella es un recorte del saber y que el recorte no se reduce a quitar o agregar algunos contenidos más o menos de forma azarosa sino que responde a razones institucionales que es preciso develar.

Bibliografía.

Barr Stephen. (1989). *Experiments in Topology.* Dover Publications, Inc. New York.

Bastán M, Cuneya H, Fioriti G. La Topología en la formación de profesores. Presentado y publicado en las actas del I congreso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Baeza. España.

Bolea, P. Bosch, M. Gascón, J. (2002). *La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización.* El caso de la proporcionalidad, Recherches en Diedactique des Mathematiques, 21/3 pp 247-304.

Bosch M. y Gascón J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. Versión provisional.* Presentación parcial en el marco de las Xleme École d´Été de Didactique des Mathematiques.

Bosch Mariana, Espinoza, Lorena, Gascón Josep (2003). *El profesor como director del proceso de estudio. Análisis de organizaciones didácticas espontáneas*. Recherches en Diedactique des Mathematiques. Vol 23, pp 79/136.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. Madrid.

Brouseau Guy (1986). *Fondamentes et methodes de la didactique des Mathématiques*, Recherches en Diedactique des Mathematiques 7.2, 33a115.

Brun Jean (1996) *Evolución de las relaciones entre la psicología del desarrollo cognitivo y la didáctica de la matemática* (Traducción de B. Capdevilla y otros para el programa de Transformación de la Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Argentina.

Connors J.J. and Robertson E.F. (2002). http:/www-groups.des.st-andrews.ac.uk/~history) y Ky Fan. *Topología Combinatoria*, en el trabajo de Euler titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes.*

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* Le Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard (1992) Concepts Foundamentaux de la Didactique: Perspectives apportees pour una approche anthropologique. Recherche en Didactique des Matematiques12(1), 73-112

Chevallard Y. (1996) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *In* R. Noirfalise & M.-J. Perrin Glorian (Eds). *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.83-122). IREM de Clermont Ferrand.

Chevalard Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantesd en theorie anthropologique dudidactique. Recherches en Didactiques des Mathematiques. Vol 19. Nro.2. pp 221-266.

Chevalard Y. (2001) Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca.

Espinoza Lorena (1998)Las problemáticas del profesor de matemática en las instituciones de enseñanza actuales. Descripción de las técnicas didácticas utilizadas en el proceso de estudio de los límites en enseñanza secundaria.

Fernández Pérez (1989). Así enseña nuestra universidad. Hacia la construcción crítica de una didáctica Universitaria. Universidad Complutense de Madrid. España .

Frechet M. (1906). *Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel*. Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, 22(1906),1-74.

Frechet M. y Ky Fan – *Introducción a la Topología Combinatoria* – EUDEBA- Bs. As (1961).
Fonseca C y Gascón J.(2000). Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivada de funciones en Secundaria. Comunicación presentada en el IV simposio de la SEIEM. Huelva.
Gascón Josep. (2001*) Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME. Vol 4.(2).
Gascón Josep (2001 b*) Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docentes del profesor de matemáticas*. Ponencia presentada en as XVI Jornadas del SI-IDIM celebradas en Huesca .Marzo de 2001.
Kelley John L. (1975)Topología General. Editorial Universitaria de Buenos Aires. Manualesde Eudeba. Buenos Aires.Argentina.
Kent Holing (2001) Referennces form ladder problems by kent Holing. http://mathforum.org/epigone/historia_mat/
Kline Morris *El pensamiento matemático: de la antigüedad a nuestros dias (3 vols)*
Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*: The logic of mathematical discovery. Cambridge University Press. England.
Melvin Herriksen (2003) Topology textbooks. Red de Historia de la Matemática. http://math.sfsu.edu/smith/.
Nagel y Newman (1970) *El teorema de Goedel*, Editorial Tecnos. Madrid.
Pengelley D. And Laubenbacher R. (1999) The beginning of set theory. http://math.nmsu.edu./~history/monthly/node2.html.
Piaget J., García R. (1982) Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI. México.
Santalo Luis (1989) *La obra de Rey Pastor en Geometría y Topologa*". Rev. de la Unión Matemática Argentina. Vol. 35.
Tarrés Freixenet Juan. (1991). *Algunas Ideas Acerca del Origen de la Topología de Conjuntos*. Universidad Complutense de Madrid. España.
Tall David (1995) *Crecimiento cognitivo en pensamiento matemático elemental y avanzado.* Traducción de César Delgado. Plenary lecture at the annual conference of the international group for the Psycologi of Mathematics Education. Recife. Brasil.
O'Connor J.J and E F Robertson. A history of Topology http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Topology_in_mathematics.html.
Weisstein Eric (2994). Point Set Topology. http://mathworld.wolfram.com/