LOS PROBLEMAS Y EL CONSTRUCTIVISMO EN EL NIVEL SUPERIOR

Autoras: Estela Sonia Aliendro y Eudosia Natividad Díaz de Hibbard
Institución: Universidad Nacional de Salta
Dirección electrónica: aliendro@unsa.edu.ar – endh@unsa.edu.ar
Especialidad: Educación Matemática
Palabras clave: problema, aprendizaje, matemática, didáctica

Introducción

A partir de los últimos años del segundo milenio, la resolución de problemas y el método constructivista, se constituyeron en el paradigma de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Han sido diferentes las interpretaciones en el contexto de la educación matemática, tanto desde el aspecto meramente instrumental (es decir, la formación de los estudiantes en la competencia específica de resolución de problemas y búsqueda de técnicas para este fin) como en la faz específica de la construcción del conocimiento matemático (o sea, el uso del problema como recurso para que el estudiante pueda recrear un concepto o un procedimiento).

En lo que al primer aspecto se refiere, se prioriza el aprendizaje y la enseñanza de técnicas que permitan abordar un problema. Se trata de formar en el aprendiz, habilidades intelectuales para resolver adecuadamente una situación problemática. En cuanto al segundo aspecto, no se centra en la formación de esas habilidades (aunque la involucra) sino en la búsqueda de situaciones que pueden dar origen al aprendizaje de algún aspecto de la matemática que el alumno no conoce. En el intento de solución de este tipo de situaciones, el estudiante descubre este aspecto, el cual debe ser rescatado por el docente como un nuevo conocimiento. En esta interpretación resulta de fundamental importancia el análisis didáctico a priori de la situación problemática que se va a proponer en la clase. Existen muchos ejemplos de estos análisis, pero la mayoría se refieren, por lo general, a situaciones problemáticas adecuadas a la enseñanza y aprendizaje de temas correspondientes a los niveles elementales de la Matemática. (Educación General Básica)

Dentro del marco del Proyecto “Tutores Estudiantiles: un soporte valioso para el ingresante universitario”, se trabaja en la formación de los tutores estudiantiles, quienes asisten a los ingresantes, en el aprendizaje que de la matemática deben hacer. Dicha formación incluye tanto temas de la disciplina matemática como aspectos didácticos relacionados con su enseñanza. Como los tutores son alumnos de carreras vinculadas con las ciencias exactas no siempre tienen formación docente. Demás está decir que varios desconocen la didáctica fundamental de la matemática, y mucho menos, ejemplos de ingeniería didáctica. En los breves seminarios formativos, se ha procurado realizar talleres que muestren algunos de ellos y su fundamentación teórica.

En este trabajo, se presenta un ejemplo de problema como recurso didáctico que permite al estudiante descubrir conocimientos o procedimientos en el intento de resolverlo.

Referencias Teóricas

De acuerdo a lo expresado por G. Brousseau[1] el alumno aprende matemática del mismo modo en que lo hace el matemático profesional. Este hace suyo un problema (matemático o extramatemático) para el que no existe solución conocida y, por sucesivas conjeturas (que demuestra o rechaza) logra resolverlo total, o parcialmente. Este trabajo, propio de la comunidad científica, produce un nuevo saber o procedimiento, el cual se incorpora a la disciplina por medio de su publicidad, otorgándosele de este modo estatuto científico. En las clases de matemática el enseñante debe procurar recrear entre los estudiantes, esta atmósfera de trabajo propio del científico. Si bien es cierto que el conocimiento o procedimiento que se pretende enseñar ya tiene existencia en la comunidad matemática y en la institución donde se enseña, también es cierto que hasta que no lo aprenda, no existe para el estudiante[2].

Ahora bien, ¿cómo es posible crear en la sala de clases ese ambiente de investigación y cómo lograr que los estudiantes se involucren en ese proceso? El medio es, por supuesto, el problema. Pero no cualquier enunciado es un problema. Como lo expresa R. Douady, el enunciado debe tener las siguientes carácterísticas[3]:

- "*El enunciado es fácil de comprender y el alumno es capaz de pensar en una posible respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para proponer una solución*"..
- *"La respuesta no es evidente pero, dados sus conocimientos, el alumno puede intentar una respuesta parcial"*.
- *"Para contestar en su totalidad el problema, el alumno tendrá que construir el conocimiento que el profesor quiere enseñar"*.
- *"El problema es los suficientemente abierto como para que el alumno pueda contemplar una serie de preguntas no formuladas en el texto y utilizar diferentes caminos. Sin embargo, las posibilidades que le son ofrecidas no son demasiado grandes, de modo que él puede efectivamente escoger. Estas condiciones eliminan, por ejemplo, plantear un problema por medio de pequeñas preguntas a las que sólo existe una posible respuesta"*.
- *"El problema puede formularse al menos en dos marcos[4], teniendo cada uno de ellos su propio lenguaje, entre los cuales sabemos establecer correspondencias"*.

Encontrar enunciados que cumplan esta caracterización no es fácil. Pero en ello consiste el trabajo del profesor: proponer a los estudiantes situaciones problemáticas en un contexto apropiado, gestionar adecuadamente la clase para que ellos elaboren las respuestas – que deben ser apropiadas a todo el campo de problemas que las requieren – y darles el carácter de conocimiento matemático.

Ejemplo de una situación problemática constructivista

Con el fin de mostrar una manera de utilizar los problemas como recurso para la construcción del conocimiento se propone el siguiente:

Resolver la ecuación $x^3 = x + 1$

---

[1] Brousseau: Fundamentos de la Didáctica de la Matemática

[2] Por ello I. Chevallard afirma que el trabajo del alumno que aprende matemática es del mismo orden de importancia respecto del trabajo del matemático profesional.

[3] Citado por M.Mathieud, en su artículo Enseñar a partir de actividades.

[4] Id.: *"un marco está constituído por los objetos de una rama de las matemáticas, por las relaciones entre los objetos, sus formulaciones eventualmente diversas y las imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes juegan un papel esencial en el funcionamiento de los objetos del marco"*.

Este problema está pensado para estudiantes del primer año universitario, de quienes sabemos que tienen experiencia en la resolución de ecuaciones polinómicas. Saben que cuando estas superan el grado dos, es necesario aplicar algún mecanismo de factorización de polinomios que permita el trabajo con expresiones de grado menor o igual que dos. También han adquirido alguna experiencia en el tratamiento de funciones polinómicas. De estos comentarios, se desprende el hecho de que el enunciado cumple con las condiciones de estar expresado en un lenguaje accesible a los estudiantes y en un terreno que les resulta familiar. También es abordable desde distintos ámbitos: algebraico y funcional – según comentamos – y ahora incluimos también el marco de la geometría analítica y el numérico.

Breve Análisis Didáctico

Dadas las condiciones de accesibilidad del problema, los estudiantes no están en condiciones – a priori – de rechazarlo. Es seguro que van a ponerse a trabajar en su solución. Y para ello intentarán aplicar procedimientos que les son familiares.

a) El trabajo en el marco algebraico

Dentro de este ámbito, los alumnos enfocarán la solución desde el punto de vista de una ecuación polinómica, de grado mayor que dos. Por lo tanto, después de igualarla a cero, intentarán factorizarla por los métodos tradicionales, de modo de aplicar la propiedad de números reales $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$. Cuando estos les fallen, recurrirán a algunas nociones teóricas: Saben, como resultado del Teorema Fundamental del Álgebra, que la ecuación tiene tres raíces y que al menos una de ellas, es real. También que si esta es racional debe ser 1 ó –1. Como se comprueba, no es esto lo que ocurre. En su desconcierto, pueden cometer algunos errores: uno de ellos es modificar "apropiadamente" la propiedad de reales citada anteriormente, y obtener un resultado como el que sigue:

$$x^3 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow\ x^3 - x = 1 \ \Leftrightarrow\ x\left(x^2 - 1\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ x(x-1)(x+1) = 1 \ \Leftrightarrow\ x = 1 \ \vee\ x - 1 = 1 \ \vee\ x + 1 = 1$$

de donde obtienen: $x = 1 \vee x = 2 \vee x = 0$, valores que no verifican la ecuación, como lo pueden comprobar fácilmente.

Pero hay un resultado parcial importante: existe una solución real no racional de la ecuación planteada.

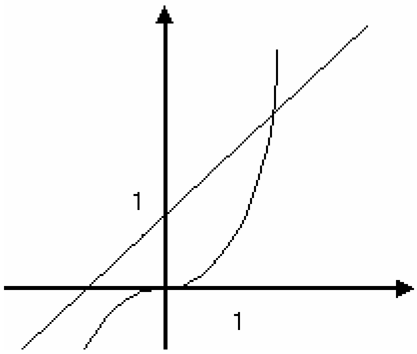
b) El trabajo en el marco de la geometría analítica

Ante el fracaso del procedimiento seguido, puede haber otro intento, ya fuera del marco estrictamente de la factorización polinómica (si así no fuera, basta con realizar la pregunta apropiada para que se animen a seguir trabajando): Se puede retomar la ecuación original y considerar que se trata de un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

del cual se obtiene $x^3 = x + 1$. Así es posible intentar una resolución gráfica del problema, representar en el plano cartesiano las funciones que responden a las fórmulas $y = x^3$ e $y = x + 1$[5]. El resultado que se logra es:

[5] También es válido el intento de representar la cúbica y = x^3 – x – 1.



Si bien es cierto que la solución no se ha obtenido, hay un dato importante que el gráfico permite conjeturar: la raíz real (única por otra parte) es un número comprendido entre 1 y 2. Esta es la segunda respuesta parcial del problema: la solución buscada está entre 1 y 2.

c) El trabajo en el marco aritmético

En este caso la ayuda viene dada por al menos una calculadora simple. Si es programable, mejor. Y se trata de obtener la aproximación que se desee del número real raíz de la ecuación propuesta. Esta sucesión viene determinada por las cuentas que se muestran en las siguientes tablas:

x	$x + 1$	x^3
1	2	1
2	3	8

Al comparar los resultados de la tercera columna con los de la segunda es posible observar que para el valor 1, x^3 resulta menor que $x + 1$, mientras que para 2, ocurre al revés. Hay que intentar, en consecuencia, con valores comprendidos entre 1 y 2, para los que se realizan exactamente las mismas observaciones. Ellas se resumen en las siguientes tablas:

x	$x + 1$	x^3
1.3	2.3	2.197
1.4	2.4	2.744

x	$x + 1$	x^3
1.32	1.32	2.299968
1.33	2.33	2.352637

x	$x + 1$	x^3
1.324	2.324	2.320940224
1.325	2.325	2.326203125

De esta manera, se obtiene la siguiente respuesta: La raíz real de la ecuación dada, es un número x que está comprendido entre dos racionales según la siguiente síntesis:

$$1 < x < 2$$
$$1.3 < x < 1.4$$
$$1.32 < x < 1.33$$
$$1.324 < x < 1.325$$

¿Qué se ha construído?

En realidad, lo que se construyó es un número real. El resultado obtenido se puede utilizar según la intencionalidad del enseñante, porque corresponde a una buena introducción para cualesquiera de los siguientes temas:

- Sucesiones convergentes, en particular, sucesiones de Cauchy.
- Definición de número real como una sucesión de Cauchy.
- Cálculo numérico y automático.

Por supuesto, el alumno ha construído una respuesta a un problema. La noción matemática involucrada, la que elige el docente, debe ser, ahora, establecida por él, quien le otorga – de esta manera – estatuto científico.

Conclusión

La mayoría de los ejemplos de construcción de conocimientos que podemos leer en las publicaciones apropiadas, corresponden a niveles educativos elementales. Esto es así porque es prioritario encontrar los problemas adecuados para que los estudiantes de esos niveles puedan elaborar re-construcciones personales de objetos matemáticos, dentro de un aprendizaje significativo y con sentido. Pero esto también es posible en los niveles más avanzados de la educación sistematizada. El ejemplo propuesto evidencia que los estudiantes pueden lograr encontrar un procedimiento apropiado para resolver una ecuación polinómica para la cual no vale la aplicación de los procedimientos algebraicos tradicionales (de factorización o de búsqueda de posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales), procedimiento que les permite adentrarse en otras ramas de la matemática.

Bibliografía

Boyer C. (1996): Historia de la Matemática, Madrid, Alianza Editorial.

Brousseau G., (1993): Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática, Córdoba, Editado por I. Dotti y J. Vargas, Universidad Nacional de Córdoba.

Chevallard Y., Bosch M. y Gascón J. (1997): Estudiar Matemática, Barcelona, ICE - Horsori.

Chevallard Y. (1997): La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado, Buenos Aires, Aique Grupo Editor.

Chevallard Y. (1992): Concepts Fondamentaux de la Didactique: Pespectives Apportées par une Approche Anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 12 Nº 1, pp. 73-112, Paris. Éditions La Pensée Sauvage.

D'Amore B: (2005): Didáctica de la Matemática, Bases Filosóicas, Pedagógicas, Epistemológicas y Conceptuales. México. Ed. Reverté.

Mathiaud M. (1996): Enseñar a Partir de Actividades, Enseñanza de la Matemática, Relación entre Saberes, Programas y Prácticas. Point-a-Mouson. Ed. E. Barbin y R. Douady.

Polya G. (1.965): Cómo Plantear y Resolver Problemas. México. Ed. Trillas.

Proyecto de Matemática del Programa Prociencia (1998): Matemática, Temas de su Didáctica. Cap. 1. Buenos Aires. Conicet.

Uno, La Resolución de Problemas (1.996): Revista de Didáctica de la Matemática, N° 8. Barcelona. Ed. Graó.