Procesos de generalización en matemática en la transición primaria – media.

Verónica Cambriglia[1]

Introducción.

Esta comunicación se inscribe en una investigación que pretende avanzar en la identificación de aquellos elementos que posibiliten la interpretación de los procesos de generalización de los alumnos en la transición desde prácticas fundamentalmente aritméticas a prácticas aritmético–algebraicas.

Partimos del supuesto de que la constitución de prácticas algebraicas requiere de procesos de intercambio y discusión en el aula en los que el docente gestione el análisis de las filiaciones y rupturas con las prácticas numéricas previas y que aborden, al mismo tiempo, la reflexión y el estudio de los diferentes modos de expresión y argumentación de lo general, que los sujetos - implicados en dichos procesos - elaboran.

El estudio de las interacciones vinculadas a las interpretaciones que un sujeto va elaborando en un contexto de construcción colectiva nos ha llevado a considerar el aporte de diferentes perspectivas teóricas. Por un lado, la Teoría de Situaciones elaborada por Guy Brousseau nos ha permitido interpretar y estudiar los procesos de producción matemática como procesos de adaptación cognitiva en el marco de dos tipos de interacciones básicas: la interacción alumno – medio modelizada a partir de la noción de *situación adidáctica* y la interacción alumno – docente que la teoría modeliza a través de la noción de *contrato didáctico*. Por otro lado, la concepción del sujeto como partícipe de una comunidad de producción nos ha llevado a incorporar aquellas perspectivas socio – culturales que abordan el estudio de los significados que elaboran los sujetos en interacción. En este sentido, las investigaciones de Yackel y Cobb retoman la noción de reflexividad de la perspectiva interaccionista la cual nos ha resultado de gran fertilidad para interpretar los intercambios que se dieron en los grupos observados:

"Para un educador matemático interaccionista, el aprendizaje no es precisamente un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno, no se puede reducir a un proceso de enculturación a una cultura pre-establecida. En la clase de matemáticas, la construcción individual de los significados tiene lugar en interacción con la cultura de la clase mientras que al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura." (Cobb y Bauersfeld, 1995, p. 9 en Sierpinska y Lerman, 1996, p.15)

Si bien la cita anterior plantea una idea general de la constitución de la cultura matemática en interacción con la constitución del sujeto (matemático), los autores citados han utilizado la noción de reflexividad para explicar y pensar los procesos de elaboración de aspectos específicos del trabajo matemático, como por ejemplo la noción de diferencia matemática y de explicación matemática. Para abordar tal especificidad incorporan la noción de normas sociomatemáticas como aquellas que contribuyen a la configuración de un sistema de referencia que regula el trabajo matemático de los alumnos en la cultura del aula.

El interaccionismo introduce también la noción de negociación y consenso al adentrarse en la constitución del significado compartido (taken-as-shared). Es importante señalar que para esta perspectiva el significado compartido no es algún tipo de intersección de las comprensiones individuales de los interlocutores; sino una interpretación – a menudo inconciente - que les permite interactuar fluidamente y hacer predicciones acertadas sobre las acciones y movimientos de los demás:

"El significado de una cosa [para mi] resulta de los modos en que otras personas actúan [hacia mi] con relación a la cosa." (Blumer, 1969).

El análisis de las prácticas escolares en la escuela primaria y en al escuela media, nos lleva a considerar los estudios de Chevallard en el marco de la teoría antropológica que

[1] CEFIEC- Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – U. de Buenos Aires y IDH -U. Nacional de General Sarmiento. Trabajo realizado dentro de los Proyectos X254 -UBACYT y 30/3045 – UNGS.

Esta investigación corresponde al trabajo de tesis doctoral de la autora, quien ha sido admitida a la Carrera de Doctorado de la Universidad de Buenos Aires, Fac. de Cs. Exactas y Naturales, durante el año 2006.

contextualizan el conocimiento como conocimiento de una institución. El sujeto construye sus relaciones con el objeto en una institución, por ello el modo en que las prácticas se despliegan en esa institución moldea el conocimiento – del objeto- que el sujeto elabora.

Si bien nuestras observaciones han transcurrido en un mismo establecimiento pueden distinguirse en él funcionamientos muy disímiles en las prácticas de la escuela primaria y secundaria. Por ejemplo en los modos de hacer, los discursos, las representaciones, las tareas. Esto nos hace distinguir la institución primaria de la institución secundaria en esa misma escuela.

Con relación a nuestra temática específica de estudio, consideramos los siguientes ejes teóricos que no son necesariamente independientes de las líneas teóricas referidas previamente:

- La ruptura aritmética – álgebra. Algunos autores cuyas investigaciones nos han iluminado en el abordaje de este tema son Cortés y Vergnaud; Chevallard; Drouhard; Grugeon; Kieran, Sadovsky, entre otros.
- Las interacciones en la clase de matemática, a partir de autores como Brousseau, Robert y Robinet, Yackel y Cobb, Trognon, Margolinas, Fregona, Mercier; Sadovsky y Sessa.
- La transición institucional primaria – media. Fundamentalmente hemos considerado los aportes de Chevallard; Bosch y las investigaciones de Panizza, Sadovsky y Sessa.

Por último, y específicamente con relación a la generalización quisiéramos señalar también las investigaciones de J. Mason (1996) las cuales se ubican en la problemática didáctica del álgebra, tratando centralmente la cuestión de la generalización. Ellas consideran la necesidad de sensibilizar a los alumnos respecto del tipo de generalización que supone la actividad matemática y plantearles un juego permanente y dual, entre generalización y especialización (particularización), como aspectos que constituyen el objetivo central de la enseñanza de la matemática. El autor reconoce que hay algo específico de esta disciplina dado por la naturaleza de los objetos sobre los que se generaliza y por la manera en que se justifica la generalización. Plantea que un camino para desarrollar la conciencia de la generalidad es promover la búsqueda de lo particular en lo general y de lo general en lo particular. En este sentido, propone considerar el papel del ejemplo en las clases de matemática.

En una perspectiva análoga L. Radford, centrado en los modos de ver la relación particular – general, realiza un análisis semiótico de los procesos de simbolización en álgebra de los estudiantes. Este autor analiza la producción de signos en tareas de generalización considerando como ejes de su trabajo: a) los significados de los signos que los alumnos proveen y b) el modo en que los alumnos articulan semióticamente la relación entre lo particular y lo general.

Hemos hasta aquí señalado los distintos referentes teóricos desde los cuales iniciamos nuestra investigación. Decimos “iniciamos” en el siguiente sentido; desde nuestra perspectiva la compleja realidad que pretendemos interpretar operará reflexivamente sobre el marco teórico - que hoy nos permite observar ciertos aspectos de la complejidad pero nos oculta otros - generando la necesidad de modificarlo, ampliarlo, completarlo y complementarlo. En las secciones siguientes pretendemos, de algún modo, comunicar el desarrollo de la investigación que desde hace un año está teniendo lugar. Ello implica, por un lado, especificar los objetivos y decisiones considerados inicialmente, que contribuyen a delinear el proyecto global de investigación y; por otro lado, presentar los primeros análisis elaborados en función de las observaciones de aula realizadas. Cabe mencionar que esta primera etapa de la investigación ha contribuido a la precisión del tipo de intercambio que nos interesa sostener con los docentes de las aulas en las que realizamos el trabajo empírico.

La investigación en su etapa inicial.

a) Objetivos y primeras preguntas.

Nuestra investigación se propuso por un lado, caracterizar **la complejidad de las interacciones entre pares** con relación a los procesos de generalización. Esto abarca tanto las preguntas, conjeturas y formulaciones del orden de lo general que producen los alumnos al interactuar con los problemas, como también aquellos procesos correspondientes al tipo de explicaciones que emergen en la clase, cuando los alumnos tratan de argumentar respecto de alguna generalidad previamente identificada y formulada. Enmarcando esto en el análisis del ya mencionado cambio institucional partimos de las siguientes preguntas iniciales: ¿Qué "formas" de lo general encaran los alumnos de la escuela primaria donde el plano de trabajo es predominantemente aritmético? ¿Qué diferencias se presentan cuando se dispone de aproximaciones a herramientas algebraicas en primer año? ¿Qué diferencias o continuidades se plantean en cada institución cuando las tareas (numéricas o no) plantean en la escena del aula el tratamiento de regularidades numéricas? En este sentido, ¿cómo se formulan, qué espacio de validación tienen y cómo se instalan como verdades aceptadas?

Por otro lado, nos propusimos también caracterizar **la complejidad de la gestión del docente** cuando el proyecto de enseñanza contempla intercambios entre los alumnos a propósito de lo general. En este segundo eje de investigación y, nuevamente con relación al cambio institucional, específicamente a las diferencias y continuidades en los gestos del docente en una y otra institución, nos planteamos inicialmente las siguientes preguntas de base que orientaron nuestra actividad de observación: ¿Cómo y cuándo invita a generalizar? ¿Cuándo generaliza él y cuándo invita a hacerlo? ¿Cuándo y de qué modo asume el rol de coordinador de los diferentes niveles de generalización de los alumnos que se perciben en el plano discursivo? ¿Qué tan explícita hace esta coordinación? ¿Para qué coordina, para aclarar el debate, para reflexionar respecto de la inclusión de un argumento en otro más general, para traccionar a los alumnos hacia lo que – desde la lógica matemática- sería más general (esté o no esto en la finalidad inicial de la actividad considerada) ¿Qué trabajo sostenido se hace con lo general?.

De manera transversal este estudio se propone elaborar conocimiento en torno de **la fertilidad didáctica de una entrada al álgebra vía la generalización**.

Metodológicamente, es nuestra intención construir a lo largo de la investigación un tipo de vínculo con los profesores involucrados de modo que el conjunto "equipo de investigación-equipo docente" se constituya finalmente en un solo equipo en el que las decisiones de investigación sean pensadas y abordadas como posicionamientos de enseñanza. Estas tomas de posición, se espera, que contribuyan en la construcción de un marco didáctico – necesariamente teñido de una posición ideológica fuerte respecto de la escuela y respecto del rol de la enseñanza de la Matemática en la formación de los alumnos en tanto sujetos autónomos, y a la vez partícipes, de la Sociedad que los integra – que regule la acción del equipo en su conjunto ("investigadores" e "investigadores docentes".). Dentro de este objetivo, se pretenden elaborar de manera conjunta con el docente de secundaria formas de organización social que potencien el papel de las interacciones entre pares y apunten a enriquecer la producción matemática en la clase respecto de lo general. Asimismo, nos interesa también analizar con el profesor el proceso de producción en la clase que haya tenido lugar a partir de la implementación de los dispositivos elaborados. Como mencionamos más arriba, las condiciones para generar un genuino espacio de coparticipación entre docente e investigador comenzaron a precisarse a partir del primer año de investigación. En primer lugar, se hizo para nosotros visible la necesidad de acceder a los fundamentos que el propio docente se da acerca del proyecto didáctico que llevará al aula, como un modo de enriquecer las posibilidades de observación en la clase. En segundo lugar, se nos evidenció la importancia de discutir con el docente la interpretación de los hechos de la clase a partir del análisis conjunto de los registros que confeccionamos. **El intercambio, y el estudio de la complejidad que supone**, es parte del plan de trabajo pensado para este segundo año de investigación.

b) Observaciones y primeros análisis.

Durante el primer año de investigación se llevaron a cabo tres grupos de observaciones en la Escuela Normal Superior Nº 3 Bernardino Rivadavia[2]:

Obs. I) Primeras observaciones en dos aulas de primer año, correspondientes a dos profesoras diferentes.

Obs. II) Observaciones en un aula de séptimo grado.

Obs. III) Observaciones del curso de articulación que proporciona la escuela secundaria a los futuros ingresantes de ésta u otras escuelas[3].

Observaciones I): Primer grupo.

Se efectuaron observaciones en dos aulas de primer año de escuela secundaria por un período de tres meses y medio. Ingresamos al aula en el momento en que los alumnos se iniciaban en el trabajo algebraico y permanecimos allí durante el período de estudio del conjunto de los números enteros.

La intención de este período de observación inicial fue, como ya mencionamos, empezar a construir un vínculo sólido con las docentes. Por otro lado, consideramos estas observaciones iniciales como un pre-campo, en el sentido de que permitirían delinear algunos criterios iniciales para la tarea más compleja de observación y toma de registros de un aula de primer año que se realizaría durante el segundo año de investigación.

En principio la actividad de pre-campo dio lugar al análisis de dos aspectos diferentes relacionados con los procesos de generalización:

- las relaciones entre lo particular y lo general, fundamentalmente durante los procesos de producción de escrituras algebraicas.
- las *reglas* que se constituyen en el aula, fundamentalmente en los intentos de los alumnos de elaborar mecanismos para operar con los números enteros.

En este trabajo intentaremos dar cuenta del tipo de análisis que realizamos con relación al segundo aspecto mencionado.

Las reglas que se construyen en la clase para trabajar con los números enteros resultan a veces de la extensión al nuevo conjunto de aquellas construidas a lo largo de la escolaridad primaria al trabajar con los números naturales. Otras veces, son específicamente construidas para enfrentar la novedad que traen los números enteros. Por otro lado, algunas son formuladas explícitamente en la clase ya sea por el docente o por los alumnos, y otras operan más implícitamente.

---

[2] La escuela se seleccionó a partir del conocimiento que teníamos de las dos profesoras que están a cargo de los cursos observados de primer año Fue importante en esta elección el conocimiento de la mirada compartida respecto de la enseñanza de la matemática, que nos permitía anticipar un espacio en el aula de interacción y discusión. Ambas docentes vienen trabajando desde hace varios años con los directores de este proyecto, participando en otras investigaciones, recibiendo futuros profesores como residentes y colaborando en la elaboración de materiales y documentos curriculares.

Otro motivo que tuvimos en cuenta a la hora de elegir la institución fue el hecho de que esta escuela contara con primaria y secundaria, teniendo en cuenta que el proyecto se propone estudiar los procesos de generalización en la transición primaria – media. De todas maneras la dispersión de los alumnos hacia otras escuelas no asegura el paso total del grupo de alumnos de séptimo grado observado a un primer año de la misma escuela.

[3] Por razones de extensión no abordaremos en esta comunicación resultados referidos al trabajo en este grupo, sólo señalaremos que nuestra intención fue fundamentalmente identificar qué focos de discusión seleccionaba la escuela secundaria para el corto tiempo de tres encuentros de una hora y media de duración. Pudimos relevar que el objetivo principal de este curso fue fomentar instancias de interacción y generar una experiencia de clase matemática como espacio de producción colectiva, abordando la constitución de normas de intercambio que la escuela secundaria supone diferentes de las que los alumnos traen de la escuela primaria.

Con relación a lo mencionado, explicitaremos a continuación las interpretaciones que elaboramos a propósito de un registro de clase que ha sido incorporado al final de este trabajo como anexo 1. En el mismo la profesora aparece identificada con la letra P.

En principio, analizaremos la intervención inicial 1) de la alumna que en el registro anexo se identifica como C. La misma nos resulta interesante porque pone de manifiesto cómo ella trata de elaborar una regla basada en las acciones de algún modo regulares que puede ver en la profesora. Ante esta nueva operación suma - que no es la misma que la de la *vida* anterior, suma con naturales - ella se genera ciertos disparadores de acción que la conecten a las operaciones que domina "*al sumar (ahora), se resta (como antes)"*. La intervención de la profesora P y las interacciones entre C y P (que incorporan a J) introducen en el discurso del aula el asunto del dominio de aplicabilidad de esa regla y, en tal sentido, concluyen con la constitución de una nueva regla que resulta del ajuste del dominio de aplicabilidad de la regla inicialmente planteada por C.

Podríamos darle las siguientes formulaciones a las reglas que se están abordando de modo implícito en el intercambio entre C y la profesora P.

Regla 1: *"Cuando tenés una suma con estos nuevos números (con signo) lo que tenés que hacer es restar"*

Regla 2:*"Cuando tenés una suma entre dos números de distinto signo lo que tenés que hacer es restar"*

La determinación del dominio de aplicabilidad de la regla 1 que empieza a explicitarse a partir de la pregunta de la profesora P [intervención 2], queda finalmente clausurada en tanto actividad colectiva cuando es explicitada por P en la intervención 4. Las intervenciones siguientes [5 a12] ya no abordan la discusión del dominio sino la puesta en práctica de la regla que acaba de ser ajustada por la profesora (regla 2). Cabe señalar que dado que ambas reglas aparecen formuladas independientemente de algún *sentido* atribuido a la operación, sino más bien como acción a realizar cuando los componentes de la suma son de un modo u otro, resulta difícil para los alumnos entender por qué la regla vale en los casos que señala P y no en los otros casos. Parecería necesario generar una discusión sobre la validez de la regla, con soporte en alguna interpretación de las operaciones con la que cuenten los alumnos. Por ejemplo, vinculándolas a la recta numérica[4]. Conectar la discusión sobre la regla con alguna interpretación sobre las operaciones contribuiría a otorgar a los alumnos elementos para decidir sobre la pertinencia o no de la misma y, eventualmente, modificarla. Estas discusiones ubicarían a las reglas como construcciones grupales - con todo su ropaje cultural – y no como arbitrariedades de la Matemática que termina habitualmente siendo percibida como un conjunto de reglas sin posibilidades de ser argumentadas.

Al analizar la cuenta propuesta a C, en esta misma intervención 4 para ejemplificar la *aplicación* de la nueva regla (regla 2), identificamos que el abordaje de la misma es igualmente posible con la aplicación de la regla 1 que no discrimina casos. En tal sentido, la respuesta correcta de C en 5 puede serlo tanto por aplicación de la regla 2 como de la primitiva regla 1. Esto nos hace poner en relieve que el estudio del dominio de aplicabilidad de una regla hace necesario considerar en la clase el conjunto donde la regla vale pero también el conjunto donde la regla no vale. En nuestro ejemplo hubiera sido necesario plantear el análisis de aquellos cálculos en los que la regla 1 de C era fallida, apelando, como mencionábamos, a alguna interpretación de las operaciones que permita corroborar la no aplicabilidad de la regla 1.

Al revisar la regla 2 que nosotros formulamos como: *"Cuando tenés una suma entre dos números de distinto signo lo que tenés que hacer es restar"* observamos que la misma no especifica en qué orden deben restarse dichos números. El primer ejemplo que sigue al establecimiento de esta regla (5 + (-2)), es un caso en el que la resta se efectúa en el orden

[4] Sumar un número positivo a un número A se *interpreta* como un desplazamiento a la derecha - respecto de la ubicación de A- tantas unidades como indica el número que sumo y sumar un número negativo a un número A se *interpreta* como un desplazamiento a la izquierda - respecto de la ubicación de A- tantas unidades como indica el valor absoluto del número que sumo.

en el que se lo hacía en la escuela primaria (el primero menos el segundo), el segundo ejemplo que se analiza en la clase (8 + (-18)) lleva implícitamente a ajustar el orden en que deben restarse dichos números [intercambio 7 a 13]. Finalmente estaría entrando en la escena del aula una tercera versión de la regla que formulamos como regla 3: "*Cuando tenés una suma entre dos números de distinto signo lo que tenés que hacer es restar los dos valores absolutos de los números, el mayor menos el menor, el signo final será el del número que tiene el mayor valor absoluto".* Observemos lo compleja que resulta la explicitación de esta regla nueva. En la clase van quedando fuera varios alumnos en este intercambio [intervenciones 14 a 21].

En 22 (al volver sobre el ejemplo inicial –2 + (-3) que disparó toda la discusión anterior y que no es del tipo de los aceptados por la regla 2) la profesora P introduce una nueva regla apoyándose en una analogía (*debo-tengo)*. Esta nueva regla se introduce sin analizar por qué este ejemplo no se adapta bien a la regla 2 antes de introducir una nueva regla que lo contemple. La intervención 23 de G vuelve a introducir un ejemplo de suma de dos números de distinto signo, pero en orden diferente al último analizado en el intercambio entre C y P. Pareciera que la propiedad conmutativa no es extendida naturalmente por G al nuevo conjunto numérico. P retoma este ejemplo conectándolo a esta nueva regla *debo-tengo* y no a las reglas antes discutidas. La conexión entre este ejemplo y las reglas discutidas ubicaría en la escena del aula la necesidad de analizar la validez de la propiedad conmutativa en este nuevo conjunto. Al extender el conjunto de los números naturales a los enteros hay propiedades que se extienden y otras que no. Es frecuente enfatizar desde la enseñanza aquellas propiedades que dejan de valer en el nuevo conjunto pero asumir como "naturales" aquellas que sí lo hacen (como en este caso la propiedad conmutativa). La intervención de G nos advierte que para los alumnos no sería tan natural aceptar aquellas propiedades que se extienden al nuevo conjunto y que sería necesario generar discusiones en la clase al respecto. Agregamos también que G [intervención 25] pareciera estar buscando interpretar/producir una regla soportada en la estructura del cálculo que lo obliga a considerar el orden – de izquierda a derecha - que guardan los sumandos en la cuenta (*si el de adelante es tal y el de atrás es tal*), y P está proporcionando una analogía[5] con el modelo del *debo- tengo*, que no tiene en cuenta el lugar que ocupa cada número en la expresión del cálculo (los con menos son *debo* y los con más son *tengo*).

Analizamos también que el lenguaje coloquial de P licúa de algún modo el orden de la escritura del cálculo. La conjunción **y** de 22 *"si yo debo dos* ***y*** *debo tres* o el conectivo **pero** de 26 "*vos tenés doce pesos* ***pero*** *tenés una deuda de quince"* no obligan a considerar quién esté delante y quién detrás como pretende G.

A partir del primer análisis que hemos presentado se nos plantean ciertas cuestiones generales que seguiremos estudiando a propósito de futuras observaciones:

✝Existen diferentes focos de interés sobre los cuales los integrantes de una clase buscan generar reglas generales. Por ejemplo en el extracto analizado, para G pareciera ser la expresión de la cuenta y el orden en el que aparecen los sumandos, para P pareciera ser la operación independientemente de la escritura de la cuenta y para C la imitación de los actos de P vinculados a la operación. Parece importante registrar cómo se articulan esos diferentes intereses en la comunicación (la intervención 29 de G parece mostrar que él empieza a tomar en cuenta la regla de P). Los diferentes focos de interés sobre los que se centraliza la búsqueda de la regla tienen que ver con los aspectos que se hacen visibles para cada integrante durante las tareas de resolución.

✝Desde el punto de vista de la enseñanza, parece importante plantear en la clase momentos que tomen como objeto de reflexión las acciones regulares que utilizan los alumnos indagando acerca del dominio de aplicación y las adaptaciones posibles a nuevos casos. Estas discusiones podrían tener soporte en el sentido de las operaciones y en una posible interpretación de las mismas en otro marco[6].

[5] Siguiendo con la analogía debo tengo para conceptualizar la suma y resta de enteros, ¿cómo interpretar el doble menos en términos de deudas?

[6] La noción de marco es utilizada en el sentido de **Douady, R.**(1986).

Desde el punto de vista de esta investigación, se nos hace evidente la fertilidad de la indagación en torno a los mecanismos de constitución de reglas, a los procesos de ajuste de algunas de ellas y al abandono o predominio de reglas de carácter personal a partir de la interacción con los otros. En particular, nos interesa atender a los procesos de negociación en la clase que se producen alrededor de las propiedades que se asumen extendidas por algunos y por otros no.

Observaciones II): Segundo grupo.

Durante los dos últimos trimestres del año 2006 se llevaron a cabo las observaciones en el aula de séptimo grado. El objetivo en esta instancia fue identificar ciertas características del funcionamiento de los alumnos durante el último grado de escuela primaria. Decidimos la entrada al aula en el momento en que el docente iniciara el estudio de perímetros y áreas de figuras geométricas. El maestro planificó este estudio a partir de la idea de medida y su objetivo central fue abordar las fórmulas de cálculo de áreas y perímetros de las diversas figuras. Dedicó gran parte del tiempo inicial al trabajo con unidades de medida y al repaso de ciertas características de las figuras geométricas a las que luego acompañaría de las fórmulas de área y perímetro[7].

El estudio de los registros (de clase y carpetas) que estamos realizando se focaliza en los siguientes puntos:

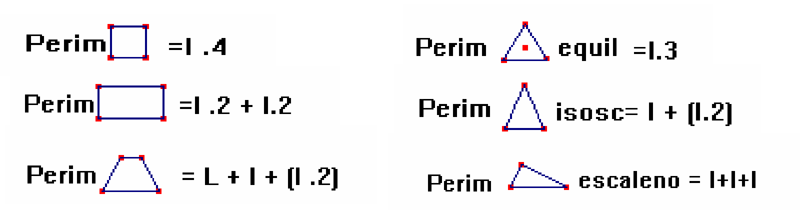
1) El análisis de las tareas de aproximación al lenguaje con letras propuestas por el docente. En este análisis tratamos de focalizar la mirada en las relaciones entre lo particular y lo general.

2) El análisis de las escrituras vinculadas a las fórmulas que se oficializan en el aula de séptimo grado junto con las reglas vinculadas al uso de las letras que se van constituyendo. En este análisis, tratamos de interrogarnos acerca de los lazos entre las escrituras que se aceptan en séptimo grado y las tareas vinculadas a las escrituras que se proponen en primer año.

3) El análisis de los diferentes funcionamientos de la fórmula escrita para los alumnos y de la complejidad que involucran las extensiones de las operaciones aritméticas a las operaciones de números con unidades.

A los efectos de esta comunicación, mostramos el tipo de análisis que realizamos en relación con el segundo de los tres aspectos que mencionamos.

El siguiente es un registro de escrituras del pizarrón de 7ºA[8]:



Antes de comenzar el análisis cabe mencionar que en el contexto del aula de séptimo grado, los alumnos utilizaban correctamente estas fórmulas de perímetro.

El uso de la fórmula y en tal sentido, la interpretación y el control sobre las letras, parece estar dominado por el conocimiento que tiene el que la usa sobre la figura a la cual se aplica dicha fórmula.

Las escrituras que se establecen desde la enseñanza aceptan incluso letras iguales que referencian medidas posiblemente distintas, su uso correcto exige considerar la información que provee el dibujo de la figura que queda del lado izquierdo del igual. A su vez las escrituras del lado derecho comienzan a instalar las siguientes reglas implícitas respecto de

7 Debemos mencionar que las clases observadas nos obligaron a adaptarnos a un tipo de interacción diferente del registrado en los cursos de primer año con menos trabajo individual o en pequeños grupos. La tarea, en general se resolvía desde el pizarrón con fuerte protagonismo del profesor.

8 Las fórmulas fueron aportadas por el docente, no se discutió su elaboración.

las operaciones con letras: *"sólo se opera en aquellos casos en que aparecen letras representando la misma medida"* y *"si se operó con las letras, entonces tenían la misma medida"*.

Este uso de las letras presenta una ruptura respecto del tratamiento algebraico de las expresiones. Nos preguntamos ¿cómo se adaptarían los alumnos a las maneras diferentes en que se despliega el conocimiento referido a las expresiones algebraicas en la institución secundaria a partir de este uso contextualizado de las escrituras que proporciona la institución primaria? Desde el lugar de la escritura algebraica convencional, las tres últimas expresiones son equivalentes, pero en el contexto de 7º grado, la información que proporciona el lado izquierdo de las igualdades -el dibujo de la figura geométrica- asegura un correcto uso de las mismas y señala su no equivalencia. Por otro lado, una vez instalada en la clase la ley de operaciones entre letras mencionada en el párrafo de arriba, el hecho de que las escrituras de los 3 últimos cálculos sean distintas estaría brindando información sobre el tipo de triángulo al que se refiere (tres lados de igual medida, dos iguales y uno distinto, tres distintos, respectivamente) y, en este sentido, escrituras diferentes no podrían representar el cálculo del perímetro de una misma figura.

Esto último nos retorna a la pregunta de cómo pueden operar estas escrituras en el contexto de primer año, específicamente en tareas de producción de fórmulas para contar colecciones[9]. En el contexto de las actividades de primer año el lado izquierdo (lo que se cuenta, aunque no se escriba explícitamente) se conserva pues todos están contando la misma colección; es eso lo que se explota desde la enseñanza para instalar un conocimiento nuevo -la posibilidad de incorporar una igualdad entre fórmulas que tienen apariencias distintas- que confluirá en la noción de equivalencia de expresiones. En este sentido, en el contexto del 7º grado la apariencia distinta de las expresiones representa el modelo de otra situación, en el contexto de primer año apariencias distintas pueden simbolizar modelizaciones distintas de una misma situación.

Nos interesa aquí sintetizar ciertas cuestiones abordadas en esta sección respecto de las escrituras literales– en el aula de 7º grado:

- El uso contextualizado de las fórmulas permite admitir letras iguales que representan elementos distintos.

- El acto de operar con letras iguales (por ejemplo l+l = 2l) exige el conocimiento –por parte del que desea operar- de las diferencias y similitudes entre los objetos que están siendo representados de la misma manera (en este caso una misma letra). Es necesario, en este sentido, agregar información del contexto sobre la representación, limitándose el poder descontextualizador que proporciona la modelización algebraica.

- La lectura de una expresión, en la que se conoce qué elementos están siendo representados con letras iguales -operadas o no -incorpora información extra sobre la situación modelizada (letras sumadas indicarían la igualdad de los elementos representados).

Este uso de las fórmulas y las letras, distanciado de la utilización algebraica convencional, introduce un espacio donde la noción de expresión algebraica equivalente no puede tener lugar, como así tampoco la noción de transformación algebraica. En este medio no convencional, la transformación –convencional- de la expresión estaría indicando alteraciones en la situación que ha sido modelizada[10].

Por último, nos interesa volver sobre el uso correcto que los integrantes de esta clase hacían de este lenguaje; cuestión que nos remite a que las construcciones de significados con relación a los conocimientos y, en particular a las escrituras, son construcciones locales que incorporan acuerdos, muchas veces no verbalizados, que las manifestaciones explícitas del lenguaje no necesariamente muestran. Lo mencionado, obviamente, no es privativo de los lenguajes no convencionales. El lenguaje matemático convencional condensa justamente los acuerdos que lo vuelven convencional. En este sentido, poder usar el lenguaje "convenido" de una manera que resulte funcional, exige descondensar esas convenciones y de algún modo "re- acordarlas".

---

[9] En el anexo 2 se presentan, a modo de ejemplo, dos tareas de este tipo.

[10] La transformación de l+l a 2l indicaría que dos lados que eran inicialmente distintos han pasado a ser iguales.

Cierre

Nos interesa aquí recuperar los ejes centrales que pretendimos comunicar y esbozar también aquellas cuestiones, que en el desarrollo actual de la investigación, se nos presentan.

Pretendimos dar una idea -delinear- nuestro proyecto global de investigación. En principio, nos enfocamos en el señalamiento de dos aspectos básicos para cualquier investigación: los elementos teóricos que nos enmarcan y los objetivos que condensan las primeras preguntas. Seguidamente presentamos el campo de observación que tuvo lugar durante el año 2006, señalando las intenciones y decisiones que lo orientaron. Estas decisiones son, de algún modo, manifestaciones de criterios que se soportan en los dos primeros aspectos señalados, y que se encarnan finalmente en las actividades desplegadas. Por último, relatamos los primeros análisis elaborados en función de las observaciones de aula referidas.

Como mencionamos, el desarrollo de esta primera parte de la investigación nos ha presentado nuevos matices que nos han permitido aclarar nuestras intenciones respecto del lugar del investigador y del docente en la investigación. El propósito de pensar un equipo de formación conjunta (docente e investigador) nos plantea hoy una realidad compleja y cargada de preguntas. Los primeros intercambios desarrollados durante el año[11] en curso, nos advierten acerca de la necesidad de pensar este espacio dentro de una realidad docente en la que estos momentos de estudio no son contemplados como espacios que el profesor pueda desarrollar como parte de su labor institucional. En lo específico de esta investigación, aún con un docente que voluntariamente se involucra, nos queda ausente la interacción entre colegas dentro de estos espacios. Pretendemos avanzar en el estudio de las posibilidades de constitución de equipos más numerosos con docentes de la misma escuela.

Durante este segundo año de investigación pretendemos también avanzar con el análisis de los registros elaborados durante el año 2006, articulándolos con los registros que se van elaborando en la segunda observación de escuela secundaria que está teniendo lugar. A su vez, nos parece importante incorporar a los análisis que produjimos, la consideración de los criterios de decisión del docente, consideración que nos parece preciso elaborar de manera conjunta con el docente en los espacios de interacción que pretendemos ir consolidando.

Bibliografía

Arcavi, A.; (1994)**:** Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, vol 14 FLM, Publishing association, Montreal, Canadá.

Bloch, I; (1999); L'articulation du travail mathématique du professeur et de l`élève dans l`enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 19/2, pp. 135-194. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G.; (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 7/2, pp. 33-115. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G.; (1988) Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 9/3, 309-336. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G.; (1997) Theory of Didactival Situations in Mathematics:Didactique des mathématiques 1970 1990, (Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. and Warfield, V., trans. and eds.) Dordrecht Klwuwer.

Chevallard, Y.; (1985) La transposition didactique. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y.; (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x,* no. 5, pp. 51-94.

Chevallard, Y.; (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. deuxième partie. *Petit x*, no. 19, pp. 43-72.

[11] En este año 2007 estamos desarrollando observaciones en un aula de primer año con una de las dos profesoras que colaboraron en las observaciones de pre-campo durante el 2006.

Douady, R.; (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématique*, vol. 7.2, La pensée Sauvage, Grenoble.

Margolinas, C; (1993) De L'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, La Pensée Sauvage Editions.

Mason, J.; (1996): Expressing generality and roots of algebra, en Bernardz, N. Et al (ed.), *Approaches to Algebra*, pp. 65-86, Kluwer Academic Publishers.

Mason , J. (2001) On the Use and Abuse Of Word Problems For Moving from Arithmetic To Algebra, en H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent(Eds.) *The Future of The Teaching And Learning Of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* University of Melbourne, Melbourne, pp. 430-437.

Mercier, A (1998) La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol 18/3 pp 279-310. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Panizza M., Sadovsky P., Sessa C. (1996*)* The first Algebraic Learning: the fallure of succes*. Proceedings of the XX th Conference of International Group of Psycology of Mathematics Education*(Asissi), *PME 20*, Vol. 4, pp.107-114, Valence.

Panizza M., Sadovsky P., Sessa C. (1999)., La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol 17, no 3, pp.453-461, Barcelona.

Perrin Glorian, M.J. ; (1993), Questions Didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « .faibles », *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 13/1.2, pp. 5-.118 La Pensée Sauvage, Grenoble.

Piaget, J. , **García, R**; (1982), Psicogénesis e historia de la ciencia, Siglo Veintiuno eds., Buenos Aires.

Programas de Matemática para primero y segundo año de las escuelas medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2001-2002), Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. En página *http/www.buenosaires.gov.ar/educación*

Radford, L. (2000) Students processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. *Proceedings of the 24th PME Conference,* Japan4, pp. 81-88.

Robert, A., Robinet, J. (1996) Prise en compte du méta en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.2, pp. 145-176. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Sadovsky, P. Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis de Doctorado. Abril de 2003.

Sadovsky, P; Sessa, C (2005) The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 59 pp. 85-112.

Sadovsky, P.; (2005) Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Sensevy, G. (1998). Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire. Presses Universitaires de France. París.

Sessa, C. ;(2005) Iniciación al Estudio didáctico del Álgebra, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Sierpinska, A. Y Lerman, S.; (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook o Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. [Traducción de Juan D.Godino]

Vergnaud (1990) La Théorie des Camps Conceptuels. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 10/2.3, 133-170. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Yackel, E; Cobb, P (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. JRME, Vol. 27.4, pp. 458-477.

Anexo 1

En clases anteriores se introdujeron prácticamente en simultáneo las operaciones, la representación en la recta numérica y las notaciones. Esta clase es aproximadamente la séptima, una semana antes de la evaluación. Durante todas estas clases los alumnos trataron de establecer reglas que les permitieran operar, las cuales fueron a menudo negociadas en la clase con la intervención del docente, sin ser explícitamente formuladas ni registradas en la carpeta. Recién en la clase siguiente a esta que presentamos el docente dicta ciertas reglas vinculadas a las operaciones.

Extracto.

Los alumnos empiezan repasando el ejercicio 1 de la guía.

Explica qué estrategias utilizas para hallar el resultado de las siguientes sumas de enteros:

-2 + (-3)=	*5 + (-2)=*	*8 + (-18)=*	*0 + 16=*
15 + 23=	*-15 + 2=*	*18 + 20=*	

La discusión es con la docente (P)que está en el pizarrón,

1)C:*menos dos más menos tres hice menos uno porque es una suma y cuando usted suma siempre resta.*

2)P: *¿Vos estás segura de que siempre hacía eso?*

3)J: *En algunos casos*.

4)P: *Cuando eran de distinto signo sumaba pero acá tienen igual signo, algunas veces yo restaba cuando tenían distinto signo.¿Qué pusiste en 5 + (-2)?*

5)C: *tres*

6)P: *Ves allí está bien porque tienen distinto signo.*

7)C: *ocho más menos dieciocho puse diez.*

9)P: *¿y por qué?*

10)C: *Ah no, es menos 10*

11)P: *¿y por qué?*

12)C: *porque es el más grande.*

13)P: *porque es el de mayor valor absoluto.*

14)B (compañera de banco de C): *la confunde con tanto nombre.*

15)P escribe en el pizarrón

$$|-18| = 18$$
$$|8| = 8$$

16)G (muy despacito su voz no se escucha en el frente): *¿por qué le sacó el signo?*

17)C(continúa): *quince más veintitrés, treinta y ocho (15+23=38)...menos quince más dos, menos diecisiete (-15 + 2=-17).*

18)P: *Ahora que te aclaré la duda pensá si menos quince más dos es menos diecisiete.*

19)C: *Ah menos trece*

20)G: *no entiendo*

21)Otra alumna: *Profe yo tampoco*.

22)P: *supongamos que el menos dos indica que yo debo dinero, menos dos, y menos tres que debo tres. Si sumo deudas, ¿qué voy a obtener por resultado? Si yo debo dos y debo tres, el resultado es seguir debiendo.*

23)G*:¿Si fuera al revés que el entero esté adelante y el negativo atrás?*

24)P: *los enteros son tanto positivos como negativos...*

25)G: *por ejemplo doce más menos quince (12 + (-15))*

26)P: *Vos tenés doce pesos pero tenés una deuda de menos quince ¿qué pasa?*

27)G: *Me van a quedar tres*

28)P: *¿te quedan tres?*

29)G: *Ah no, voy a deber tres...ah ahora entendí.*

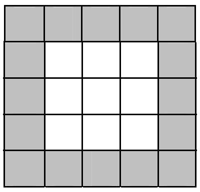
30)P: *Trabajen si les sirve el menos como deuda y el más como tengo.*

Aquí termina la discusión y los alumnos empiezan a trabajar con el ejercicio 2.

Anexo 2

Actividad 1[12]

La idea del problema es considerar cuadrados cuadriculados como el siguiente, variando la cantidad de cuadritos de la cuadriculación.



Se trata de contar los cuadritos que hay en el borde de la figura y de encontrar una fórmula que permita este cálculo en función de la cantidad de cuadritos del lado del cuadrado. Se plantea este problema como una de las primeras experiencias de los alumnos con las letras (12/13 años). La diversidad de maneras de contar los cuadritos sombreados dará origen a diferentes escrituras para la fórmula buscada. Sobre esta diversidad se planea apoyar una discusión en torno a la equivalencia entre las distintas escrituras. El enunciado del problema que se presente a los alumnos y su gestión prevista en la clase puede adoptar diferentes formatos. Fijemos uno para organizar nuestro análisis:

Primera etapa: Se da a cada alumno un cuadrado dibujado con cinco o seis cuadritos de lado y se pregunta por la cantidad de cuadritos del borde.

Segunda etapa: Se pregunta cuántos cuadritos habrá en el borde de un cuadrado de 37 cuadritos de lado.

Estas dos etapas se realizan en forma individual.

[12] Sessa (2005). Versión del problema ----------------- adaptado por la autora.

Tercera etapa: Reunidos en grupos, los alumnos deben confrontar las soluciones y elegir una para hacerla pública. Se solicita a cada grupo que redacte una explicación del método utilizado para contar en el caso de 37 cuadritos de lado, de manera que pueda servir para contar en otros casos.

Cuarta etapa: Discusión sobre los métodos de cálculo (que se supone estarán dados en lenguaje usual): se presentan en el pizarrón y cada grupo debe analizar los métodos de los otros, rechazar aquellos que considere erróneos y agrupar aquellos que considere formulaciones diferentes del mismo método de cálculo. Luego se ponen en común y se llega a acuerdos sobre rechazos y agrupamientos.

Quinta etapa: Se solicita a cada grupo la escritura de una fórmula que refleje el método de cálculo que prefieran (el propio, o el de otro grupo).

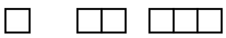
Cuánto deberá explicar el profesor esta consigna dependerá de las experiencias previas de los alumnos pero parecería necesario pensar en un diálogo[13] con ellos que permita hacer público lo que entienden por “fórmula”, recuperando posiblemente los ejemplos que conocen asociados al cálculo de un área o de un perímetro.

Sexta etapa: Se presentan las diferentes fórmulas obtenidas (se espera una pluralidad de fórmulas correctas) y se discute en torno a ellas. Se trabaja sobre la noción de equivalencia de fórmulas.

Séptima etapa: Se plantean a los alumnos diferentes preguntas que muestren la utilidad de la fórmula para conocer características de la situación que modeliza.

Actividad 2[14]

Se propone la siguiente sucesión de figuras, construidas con fósforos y se aclara cómo se continúan armando.



Esquema de tareas para los alumnos:

a) Se les pide calcular la cantidad necesaria de fósforos para construir la figura que ocuparía el sexto lugar.

b) Se pregunta por la cantidad de fósforos necesarios para construir la figura del lugar 100 en la sucesión.

c) Se solicita una fórmula para la cantidad de fósforos de la figura del lugar n y se trabaja la equivalencia de distintas fórmulas si es que aparecen. (Son probables 3 n + 1 y 4 + 3 (n-1))

d) Se formulan preguntas para hacer funcionar la fórmula. Por ejemplo: ¿Podrá ser que en alguna ubicación la figura tuviera 1549 fósforos? Si tengo 1500 fósforos, y armo una figura de esta forma lo más grande posible, ¿me sobra alguno?

---

[13] A propósito de la posibilidad de conversar con los alumnos acerca de las consignas, sostenemos una posición según la cual no hay consignas *claras para todo público*, sino que entendemos la necesidad de negociar los significados en un diálogo con el grupo-clase. En definitiva, ir avanzando en el aprendizaje matemático escolar tiene que ver también con ir entendiendo el significado de los enunciados en un sentido convergente al que se le da en la matemática como disciplina conformada.

[14] Programa de Matemática. Primer año. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. Gob.Bs.As.(2002)