Interrogantes que derivan del análisis de ciertos errores que se observan en las evaluaciones de la asignatura Probabilidad y Estadística

Raúl Katz (1 y 2) - Natalia Sgreccia (2 y 3)
(1) Facultad Regional Rosario (Universidad Tecnológica Nacional)
(2) Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario)
(3) Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
rdkatz@fceia.unr.edu.ar - sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Introducción

En la enseñanza de la Probabilidad y Estadística en carreras de Ingeniería se establece como uno de los objetivos esenciales iniciar a los alumnos en los conceptos, problemas, métodos y procedimientos básicos de estas disciplinas, a fin de lograr que comprendan cómo el azar puede cuantificarse a pesar de su intrínseca indeterminación y que, a partir de esa cuantificación, utilicen algunas herramientas estadísticas para la toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre sobre situaciones reales en las que se encuentra presente la variabilidad.

En función de estos objetivos se pone especial énfasis en los conceptos de población y muestra, parámetros y estadísticos, señalándose en forma permanente que los valores característicos de un conjunto de datos constituyen un parámetro o un estadístico según el objetivo. Estas cuestiones son fundamentales al iniciarse el tratamiento de la estimación de parámetros y la construcción de intervalos de confianza para dichos parámetros. Es allí cuando debería moldearse la vinculación entre la Probabilidad y la Estadística y percibirse la necesidad de tener en cuenta la variabilidad y la incertidumbre como componentes importantes en el proceso de modelación de la realidad.

Sin embargo a la hora de la evaluación se observa que “los conocimientos” que se hacen explícitos parecen responder a aprendizajes no sustantivos y con un perfil memorístico y asociativo. Ante un estímulo, los alumnos recuerdan aquellos elementos de la memoria relacionados con ese estímulo, reproduciendo de forma análoga en contextos aparentemente similares al que generó dicho aprendizaje.

En el presente trabajo se muestran situaciones que fueron abordadas por los alumnos en diversas instancias del proceso de evaluación, correspondientes a diferentes momentos del cursado, que testimonian dificultades en el análisis y evaluación de resultados, falta de coherencia en la organización de sus pensamientos, ligados por lo general a una técnica o algoritmo, y escasa sensibilidad hacia los razonamientos lógicos.
En función a estos hallazgos se formulan ciertos interrogantes, en relación a las dificultades observadas, y se deslizan posibles alternativas para franquearlas.

Tal proceso de evaluación es entendido en sentido amplio, esto es, no restringido a la calificación de pruebas escritas. Está asociado más bien a la disposición de información sobre el desempeño, tanto de estudiantes como del docente, para la toma argumentada de decisiones sobre la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística. De hecho, este estudio emerge a partir de reflexiones sobre la propia práctica que fueron formando parte de propuestas didácticas re-significadas desde la lectura interpretativo-crítica de nuestra experiencia, lo cual sin duda contribuye al desarrollo profesional como docentes. Justamente la elección de las situaciones que se presentan a continuación está sostenida y justificada desde tales reflexiones sobre nuestras prácticas. Quizás si no introdujéramos estas situaciones de trabajo con nuestros alumnos, hoy no tendríamos estas preocupaciones y nos estaríamos moviendo en un escenario de comprensión superficial que otorga una (aparente) tranquilidad. Sin embargo, apostamos a realizar este tipo de estudios para contribuir a un mejor entendimiento tanto de las actuaciones de los alumnos como de nuestras vinculaciones al respecto como docentes.

Situaciones objeto de nuestras evaluaciones y posteriores interrogantes

A continuación se presentan cuatro situaciones, las cuales formaron parte de evaluaciones en diferentes cursos y especialidades de carreras de Ingeniería en la asignatura Probabilidad y

Estadística de las Universidades Tecnológica Nacional y Nacional de Rosario en los ciclos lectivos 2008-2009.

Situación 1

La longitud de los tornillos producidos por una máquina sigue una distribución normal con media 112 milímetros y desviación estándar de 2.2 milímetros. ¿Son los datos suficientes para construir tres intervalos con centro en la media y que contengan el 90%, el 95% y el 99% de las longitudes respectivamente? En caso afirmativo determine dichos intervalos, de lo contrario explique qué información le falta.

Actuaciones de los alumnos ante la Situación 1. Descripción e interpretación

En este problema los datos que se proporcionan caracterizan totalmente el comportamiento de una población, las longitudes de los tornillos, de los cuales se conoce no sólo su distribución sino también su media y desviación estándar. Por lo tanto, es posible determinar dichos intervalos a través de la estandarización de la variable y posterior uso de una tabla.

Sin embargo la expresión que aparece en el enunciado, "construir tres intervalos con centro en la media que contengan el 90%, el 95% y el 99% de las longitudes respectivamente", induce a la mayoría de los estudiantes (9 de 14) a ubicarse en el capítulo de estimación de parámetros, donde esta terminología aparece en relación a la construcción de un intervalo de confianza para la media poblacional, con valores para el nivel de confianza que habitualmente se fijan en 0.90, 0.95 y 0.99. Esta ubicación de los alumnos en un capítulo específico del cursado de la materia, da indicios de que los momentos en que se enseñan y evalúan los contenidos están mediados por el contrato didáctico, el cual condiciona y determina las respuestas de los estudiantes en situaciones de evaluación (Giménez Rodríguez, 1997).

Otros, (4 de 14; el alumno restante lo resuelve bien), son atraídos a la aplicación de la desigualdad de Tchebyshev, que brinda acotaciones de las probabilidades de intervalos para una variable aleatoria con centro en la media. Si bien en este enfoque hay, de parte de los alumnos, un reconocimiento de que los datos suministrados corresponden a una población, la solución que proponen tampoco resulta pertinente, ya que la distribución de la variable (longitud de un tornillo) constituye un dato y la aplicación de dicha desigualdad resulta adecuada cuando se desconoce la distribución de la variable.

Ante este hecho, coincidimos con Moreno y Vallecilos (2000) en que "las estructuras de conocimiento etiquetan y categorizan objetos y eventos, definen un conjunto de expectativas sobre dichos objetos y sucesos y sugieren respuestas apropiadas a ellos. Cualquier persona sometida a un estímulo, lo procesa basándose en un sistema preexistente de conocimientos esquematizados y abstractos. Sin embargo, la categorización errónea de los objetos y sucesos junto con el empleo de inapropiadas estructuras de conocimiento, conduce al error (…)" (p. 2).

En ambos casos, las actuaciones de los alumnos distan del pretendido aprendizaje significativo. Por el contrario, ponen de manifiesto la asociación de algunos procedimientos (aprendidos en contextos aparentemente similares pero que no resultan pertinentes, o válidos en el contexto de la situación actual), mientras que la comprensión de los conceptos fundamentales, tendientes a desarrollar un pensamiento aleatorio, se encuentra ausente, ya que se evidencia que estos estudiantes no pueden flexibilizar la utilización del conocimiento de acuerdo a las (cambiantes) circunstancias.

En términos de Ausubel (2002), los alumnos cultivan la repetición mecánica de los procedimientos, produciéndose aprendizajes memorísticos y rutinarios. Los conocimientos se reciben de manera casual y no se incorporan a su estructura cognoscitiva o esquema mental, por lo que luego se dificulta su aplicación en otras situaciones, ya que no se sabe dónde buscarlo.

Situación 2

El tiempo hasta la falla (duración) de un tipo de motor es una variable aleatoria normalmente distribuida, con media y desviación estándar igual a 10 y 2 años respectivamente. El fabricante repone sin cargo todos los motores que fallen dentro de un período de garantía.
Determine el tiempo máximo de garantía que puede otorgar si está dispuesto a reponer a lo sumo el 3% de los motores.

Actuaciones de los alumnos ante la Situación 2. Descripción e interpretación

La solución del problema demanda encontrar el tiempo hasta la falla de los motores, de modo que a lo sumo un 3% de los mismos no supere dicho valor.

Si se nota con T al tiempo de duración (o tiempo hasta la falla) de un motor, se tiene que encontrar el valor t (tiempo máximo de garantía) para el cual $P(T < t) = 0.03$.

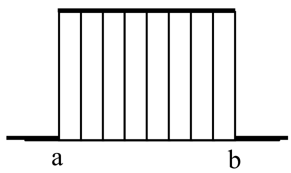
Sin embargo los alumnos suelen plantear $P(T < t) = 0.97$. ¡Tendría que reponer prácticamente todos los motores y casi con seguridad cerrar su negocio! Más aún, una vez obtenido el valor de t, los estudiantes no advierten que la garantía que están dispuestos a otorgar supera el valor de la duración media que se conoce.

Esta respuesta, que da alrededor de un 40% de los alumnos, pone de manifiesto falencias en la capacidad de análisis y evaluación de resultados. Incluso de actitudes más generales que tienen que ver, por ejemplo, con detenerse a observar la propia producción.

A través de sus cálculos creen que ese valor "grande" de t garantiza el funcionamiento del 97% de los motores. En este sentido, la solución que proponen apunta más a un "deseo de calidad", que el 97% de los motores dure "mucho", tanto o más que el valor que ellos determinan. Sin embargo ese valor como garantía lo cumple sólo el 3% de los motores.

Situación 3

La siguiente gráfica muestra la distribución de los ingresos de una población.



Uniforme

Exprese verbalmente la información que brinda dicha representación gráfica.

Actuaciones de los alumnos ante la Situación 3. Descripción e interpretación

Sobre el eje horizontal se representa la variable ingreso, que asume valores en el intervalo [a, b]. Estos ingresos son agrupados por intervalos contiguos y disjuntos, de igual amplitud, sobre los cuales se levantan rectángulos de área igual a la proporción de ingresos que se encuentran en dichos intervalos.

Siendo todos los rectángulos de igual área, correspondería decir que existe la misma proporción de ingresos, para los diferentes intervalos. Más aún, podría interpretarse que la proporción de ingresos que se encuentra en cada intervalo depende de la amplitud de éstos y no de la localización de sus extremos, dentro del intervalo [a, b].

Sin embargo, los estudiantes suelen responder espontáneamente lo primero que "viene a su mente", sin una pausa para la reflexión, diciendo que todos los habitantes tienen el mismo ingreso. Pareciera que están considerando que la variable ingreso se representa a través de las ordenadas, sin reparar qué se estaría representando en el eje horizontal. Este error emergente quizás encuentre su explicación con una mirada sesgada producto de ejercicios estandarizados sobre funciones matemáticas.

Así, la expresión "distribución uniforme de los ingresos" es interpretada como ingresos iguales, constituyéndose de este modo tal término en puente y, al mismo tiempo, barrera para la comunicación.

Situación 4

El promedio de hijos por familia es igual a 2.3.

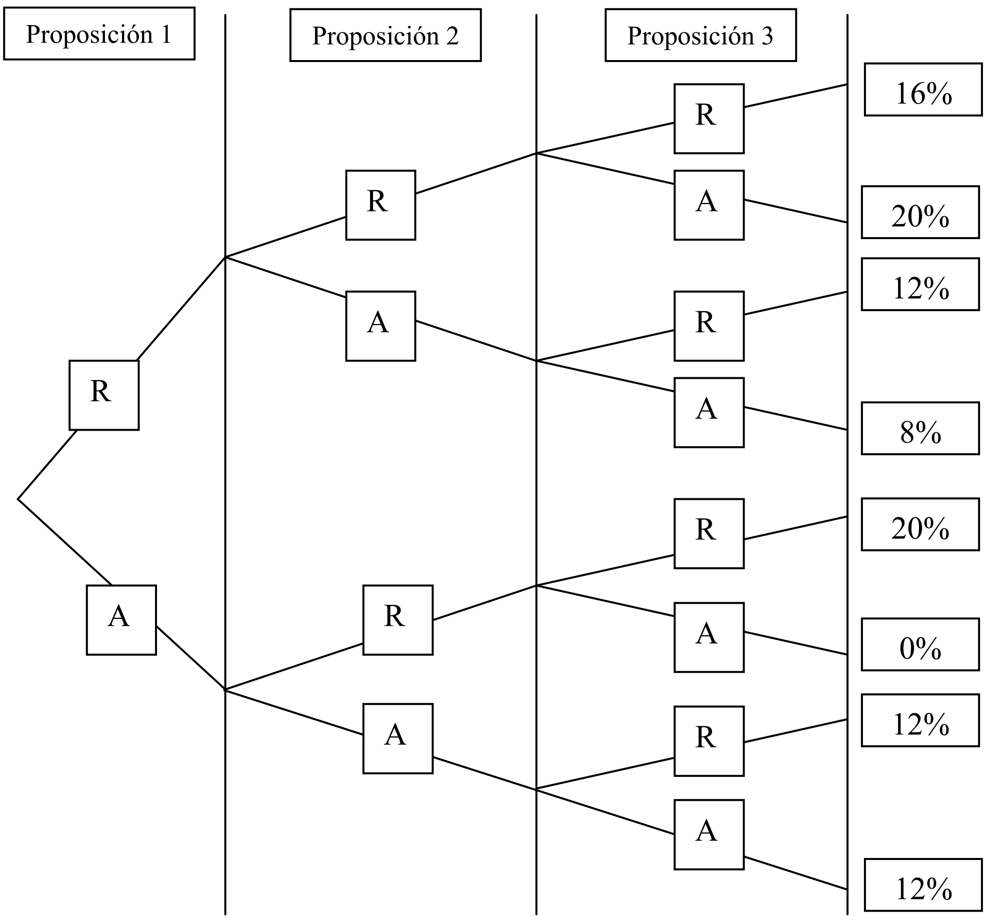
a) Analice si alguno de los siguientes enunciados se deduce de la información dada. En caso afirmativo, señale con una cruz.

Proposición 1: La mayoría de las familias tienen dos hijos.
Proposición 2: Existen más familias con dos hijos que familias con tres hijos.
Proposición 3: Hay 70 familias con dos hijos y 30 familias con 3 hijos.

b) Explique por qué rechazó alguna o algunas de las afirmaciones dadas.

Actuaciones de los alumnos ante la Situación 3. Descripción e interpretación

Para un mejor análisis de los resultados, los registros obtenidos se presentan con una estructura de diagrama de árbol. Las letras R y A denotan el Rechazo o Aceptación de la proposición correspondiente. A la derecha, en la última columna se presenta en un recuadro el porcentaje de estudiantes que han actuado al abordar la actividad de acuerdo con la secuencia que muestra las líneas correspondientes del diagrama. También se ha consignado una de las secuencias que no fue seguida por ninguno de los estudiantes, completando el registro de todas las opciones posibles. Cabe señalar que las tres proposiciones son falsas y deberían ser rechazadas.



La rama 5 muestra que en el 20% de los casos se acepta la interpretación que considera que la mayoría de las familias tienen dos hijos (lo cual es incorrecto) y rechaza la segunda interpretación que dice: "existen más familias con 2 hijos que familias con 3 hijos" (lo cual es correcto). Sin embargo, este grupo no advierte la contradicción que lo llevaría a reflexionar sobre ella y eventualmente promover una revisión de lo elegido previamente.

El 40%, considerando la segunda, cuarta y octava rama del árbol, toma erróneamente como correcta la tercera, en razón de que el cálculo con los datos de la proposición coincide con 2.3. Esto muestra la ponderación de una operatoria desplazando una argumentación que implique un razonamiento lógico.

Un alumno justifica su respuesta, ubicada en la rama 8, de la siguiente manera: "No deseché ninguna de las afirmaciones, porque las dos primeras me dan una idea de que el promedio va a estar próximo a 2, y a la última si le saco el promedio, me da exactamente 2.3". Se advierte una falta de interpretación en la consigna de fundamentar los enunciados rechazados. Por otro lado, se justifica la aceptación equivocada de las tres interpretaciones, invirtiendo en la última el orden de la premisa con la conclusión. Es decir, su argumentación responde a una estructura: "Si 70 familias tienen 2 hijos y 30 familias tienen 3 hijos entonces el promedio es de 2.3" para responder al esquema del enunciado a resolver "Si el promedio es 2.3 entonces hay 70 familias con 2 hijos y 30 con 3 hijos".

Cabe señalar que en las resoluciones de los alumnos además se observó confusión entre las nociones de media y moda, error sobre el que no nos detendremos en esta oportunidad.

Interrogantes que emergieron

A la luz de las situaciones descriptas surge la inquietud: ¿Qué aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje deberían tomarse como eje de reflexión para contribuir a que los conceptos que se elaboran en las clases se incorporen al pensamiento del alumno como un instrumento de conocimiento para la resolución de problemas y no en la fijación mecánica de procedimientos? En este sentido interesa indagar:

- ¿Cómo propiciar entornos de aprendizaje para que los alumnos establezcan relaciones que aseguren la funcionalidad y aplicación comprensiva de los contenidos?
- ¿Cuáles son las acciones docentes en el aula tendientes a trascender la mera aprobación de exámenes, a favor de comprensión por parte de los alumnos?

En función de las dificultades encontradas, específicamente preocupa: ¿Cómo guiar el proceso de aprendizaje de los alumnos para desarrollar, además de un pensamiento aleatorio,

- capacidad de análisis y evaluación?
- sensibilidad hacia los aspectos lógicos?
- un pensamiento no atado a una técnica o algoritmo?
- un pensamiento coherentemente organizado?

Estas habilidades constituyen componentes que no deberían estar ausentes en un pensamiento matemático.

Incluso, en cuanto a lo que solemos realizar como docentes universitarios, cabe preguntar: ¿Es el modelo teoría-ejercicio un medio favorable para la no fijación mecánica de procedimientos?

Loewenberg Ball, Hoover Thames y Phelps (2008) hacen referencia a un tipo de conocimiento, necesario para enseñar, que denominan horizonte del contenido. Este conocimiento involucra la conciencia sobre cómo los tópicos matemáticos se relacionan en el currículum de manera longitudinal y transversal. Los profesores de los distintos cursos necesitan conocer cómo la Matemática que ellos enseñan está relacionada con la Matemática que los estudiantes aprenderán en los próximos cursos, para ser capaces de componer el fundamento matemático para lo que vendrá más tarde.
En este marco de ideas, cabe preguntar:

- ¿Qué comprende tal horizonte del contenido en el caso de la Probabilidad y la Estadística en carreras de Ingeniería, ya sea en cursos de la carrera donde las aplican como en su futura vida profesional?
- ¿Cuáles actividades de la gestión de la clase podrían aproximarse a la puesta en práctica del conocimiento del horizonte del contenido en las aulas donde se enseña Probabilidad y Estadística en carreras de Ingeniería? O sea, básicamente, ¿qué hacemos como docentes para que nuestros alumnos capturen ese horizonte?

Algunas reflexiones e implicancias didácticas

Por lo general, predomina un contacto más bien teórico de los alumnos con los conceptos abstractos, de algún modo desvinculados de los contextos reales donde adquieren sentido funcional. Por ello, las actividades académicas suelen percibirse como distintas a las prácticas para solucionar problemas cotidianos, asociándole consecuentemente a las primeras la mera intención de aprobación de exámenes. Entonces se automatizan los procesos hacia un aprendizaje memorístico de los conceptos, cuyos sentidos no trascienden la cultura académica hacia la realidad cultural de las comunidades sociales donde se re-significan permanentemente.

En el artículo "La Estadística en la Educación Superior. ¿Formamos Pensamiento Estadístico?", Behar Gutiérrez y Grima Cintas (2004), en su afán de identificar elementos clave que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se formulan entre otros el siguiente interrogante: "cuando establecemos 'comunicación' con nuestros estudiantes, ¿el lenguaje y los términos que usamos tienen la misma acepción para ellos?" (p. 86).

A la luz de lo descripto en la situación 3, observamos las confusiones que se generan cuando el docente emplea términos propios del lenguaje probabilístico, que el alumno interpreta desde un contexto matemático diferente. La distribución uniforme de los ingresos no equivale a ingresos uniformes o iguales, como suelen creer algunos estudiantes.

Desde esta perspectiva, el lenguaje es un elemento importante como expresión de un pensamiento exteriorizado, por considerar que las manifestaciones lingüísticas que tienen lugar en la interacción didáctica reflejan lo que el estudiante entiende.

Para Freire (2002), la educación es tanto un acto pedagógico como un acto político y los mismos son posibles a través del diálogo. Para este autor la relación pedagógica es, de modo esencial, una relación dialógica.

La palabra nace con el diálogo y si partimos del reconocimiento de la estrecha articulación entre pensamiento y lenguaje, queda más clara aún la importancia del diálogo en las interacciones sociales. Justamente el movimiento de ida y vuelta del pensamiento divergente y convergente es la dinámica propia del diálogo y de la enseñanza.

Consideramos que la relación dialógica puede constituirse en un importante instrumento para concretar procesos intelectuales, como asimismo generar un clima participativo y de compromiso para la construcción de nuevos conocimientos a través de la exploración, el cuestionamiento y la explicitación de creencias erróneas. En este sentido el diálogo no apunta a dar o depositar ideas en los estudiantes, sino más bien a crear oportunidades y ocasiones para la comprensión.

Creemos que este diálogo que se puede forjar en las clases entre docente y alumnos, o entre alumnos, es un posible generador de diálogo de la persona (docente o alumno) consigo misma. Este "diálogo consigo mismo" es fundamental para reflexionar antes y después de las acciones puntuales (en un ámbito de enseñanza o de aprendizaje, respectivamente) en la resolución de situaciones como las que hemos presentamos aquí.

Sin embargo, González, Morón y Novak (2001) señalan que la dinámica actual de algunas clases (herencia de siglos) sigue aún un modelo del tipo estímulo-respuesta. El discurso del profesor, en sus múltiples facetas, es medianamente reproducido por los alumnos. Al aprobar, esta conducta es premiada y, por lo tanto, potenciada.

Los docentes coincidimos en la importancia de fortalecer el desarrollo de la comprensión por parte de los alumnos. Incluso desde ámbitos más amplios se sostiene la trascendencia de que los ciudadanos analicen críticamente la información y generen ideas para hacer elecciones razonadas y responsables, no sólo que recuerden lo que se les dice. Sin embargo, "en las últimas décadas, los teóricos del aprendizaje han demostrado que los alumnos no recuerdan ni comprenden gran parte de lo que se les enseña" (Stone Wiske, 2003, p. 23).

Asimismo, solemos reclamar indicios de comprensión en los desempeños de los alumnos. Pero, ¿nos dispusimos los docentes a discutir en conjunto qué entendemos por comprensión en ámbitos tan específicos como la Matemática, o más particular todavía, en la Probabilidad y la Estadística? Por su parte, Perkins (2003) concibe a la comprensión como un desempeño, “la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe” (p. 70).

En este marco de ideas, se considera al intercambio dialógico como un medio propicio para indagar sobre los conocimientos previos de los alumnos, generar conflicto, promover el establecimiento de relaciones de semejanzas y diferencias, facilitar la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora, ayudar a conectar los nuevos conocimientos con los viejos. Consideramos que todas estas acciones son habilidades puntuales que contribuyen al pensamiento flexible que Perkins asocia a la comprensión.

Si bien nuestras preocupaciones se orientan a encontrar una enseñanza más contextualizada y a que los alumnos perciban el horizonte del contenido matemático al que hicimos referencia anteriormente, aún encontramos dificultades “primarias” que actúan de sostén de otras “más avanzadas”. Pretender saltearlas o ignorarlas no soluciona el problema sino que lo potencia. Al respecto, refiriéndose a los niveles de razonamiento geométrico, Corberán Salvador, Huerta Palau, Margarit Garrigues, Peñas Pascual y Ruiz Pérez (1989) sostienen “si un nivel no ha sido suficientemente consolidado antes de proceder a la instrucción en el nivel siguiente, el alumno trabajará únicamente, en el nivel más alto, de modo algorítmico” (p. 14). La Probabilidad y la Estadística no escapan a estas apreciaciones.

Retomando lo presentado en la Introducción, como docentes nos inquieta propiciar modos viables de formación de futuros profesionales para que:

- tomen decisiones bajo condiciones de incertidumbre sobre situaciones reales en las que se encuentra presente la variabilidad y
- tengan en cuenta la variabilidad y la incertidumbre como componentes importantes en el proceso de modelación de la realidad,

bajo evidencias de actuación estudiantil que reclama el fortalecimiento de habilidades básicas o prioritarias, en el sentido de previas y necesarias para estas metas más específicas.

Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.
- Behar Gutiérrez, R. y Grima Cintas, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior. ¿Formamos Pensamiento Estadístico? *Actas del Simposio de Estadística 2003, 5* (2), 84-90.
- Corberán Salvador, R., Huerta Palau, P., Margarit Garrigues, J., Peñas Pascual, A. y Ruiz Pérez, E. (1989). *Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele.* Valencia: Universidad de Valencia.
- Freire, P. (2002). *La educación como práctica de la libertad*. Madrid: Siglo Veintiuno.
- Giménez Rodríguez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.
- González, F., Morón, C. y Novak, J. (2001). *Errores conceptuales. Diagnosis, tratamiento y reflexiones*. Barcelona: Eunate.
- Loewenberg Ball, D., Hoover Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389-407.
- Moreno, A y Vallecilos, A. (2000). *La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Perkins, D. (2003). ¿Qué es la comprensión? En M. Stone Wiske (comp.). *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-92). Buenos Aires: Paidós.
- Stone Wiske, M. (2003). Importancia de la comprensión. En M. Stone Wiske (comp.). *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 21-31). Buenos Aires: Paidós.