Formación de Profesores y Enseñanza para la Comprensión en Matemática

Nélida H. Pérez – Magdalena Pekolj – María Amelia Mini-Alejandra Azar

nperez@unsl.edu.ar – mpekolj@unsl.edu.ar-mini@unsl.edu.ar

Universidad Nacional de San Luis – Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales –Departamento de Matemática.

RESUMEN

La formación de profesores de Matemática posee requerimientos específicos que implican una comprensión profunda de conceptos y principios de la Matemática y de las conexiones entre conceptos y procedimientos a enseñar.

Presentamos una experiencia llevada a cabo en tres materias del "Profesorado en Matemática", dos de ellas con modalidad de Taller y que fueron introducidos en el plan de estudios como motor de desarrollo de la enseñanza para la comprensión. La tercera materia es "Didáctica y Práctica Docente de la Matemática".

Abordamos las temáticas: "Las Torres de Hanoi y un modelo matemático","Semejanza como tópico generativo", y algunos conceptos que se incluyen frecuentemente en la enseñanza de la aritmética.

Las actividades propuestas forman parte del compromiso de implementar una forma de hacer matemática que permuta el tratamiento de contenidos mediante actividades que posibiliten la comprensión de conceptos matemáticos, la enculturación matemática y un enriquecimiento progresivo de los futuros profesores en la forma de plantearse la actividad docente. Es decir, que el trabajo de un contenido no se reduzca a la mera presentación de técnicas, algoritmos y repetición de demostraciones sino que, apoyándose en lo intuitivo, lo empírico para conceptualizar, se puedan expresar y manipular matemáticamente objetos y relaciones para conducir a una profunda comprensión permitiendo relacionar lo disciplinar con lo didáctico.

Formación de Profesores y Enseñanza para la Comprensión en Matemática

Convencidas de que la formación de profesores de Matemática posee requerimientos específicos, que implican entre otras habilidades, una comprensión profunda de conceptos y principios de la Matemática y de las conexiones entre conceptos y procedimientos a enseñar, propusimos desde la Comisión de Carrera del Profesorado, un cambio de plan que introduce los Laboratorios como motor de desarrollo de la enseñanza para la comprensión. La aprobación de este plan (2002) constituye un aporte importante para incorporar la Enseñanza para la Comprensión dentro de las asignaturas donde intervenía nuestro grupo. Presentaciones a congresos y publicaciones avalan nuestro trabajo en diferentes asignaturas y temas matemáticos dentro este marco. El apoyo institucional y los recursos estuvieron garantizados por los proyectos de investigación que integrábamos e integramos actualmente.

Un nuevo cambio curricular del plan de estudios del Profesorado en Matemática (en vigencia desde 2009) supera debilidades evidenciadas en el anterior. Aporta desde lo institucional el que la Enseñanza para la Comprensión se extienda a otras asignaturas, permitiendo el desarrollo de contenidos mediante actividades que posibiliten la comprensión de conceptos matemáticos, la enculturación matemática y un enriquecimiento progresivo de los futuros profesores en la forma de plantearse la actividad docente.

La evidencia se recoge cuando los futuros docentes cursan la asignatura “Didáctica y Práctica Docente en Matemática”. Se nota la influencia de esta forma de trabajar cuando los estudiantes realizan su Residencia Docente mostrando así que nuestro trabajo previo, en el marco del Enseñanza para la Comprensión, ha sido incorporado.

Marco Teórico:

¿Qué es comprender?

Resulta importante aclarar qué entendemos por *"comprender un concepto matemático"*. En nuestra concepción no quiere decir conocer la definición de determinado concepto. Adoptamos aquí la postura de Anna Sierpisnka (y otros como J. Locke, Dewey y Hoyles & Noss por ella referenciados) los cuales consideran que intervienen en la comprensión cuatro operaciones mentales fundamentales (A. Sierpisnka, 1996, pág. 56 a 71), llamadas actos de comprensión:

Identificación. En el sentido de descubrimiento o reconocimiento. El resultado de este acto es que algo lejano, oculto, súbitamente surge como el objeto principal, como algo de valor, interés y estudio. Tiene un nombre y no es del lenguaje común y del cual se tiene la intención de comprender.

Discriminación. Se refiere a traer a nivel consciente la existencia de dos objetos distintos, notando no sólo la diferencia entre ellos, sino también reconociendo sus propiedades relevantes.

Generalización. Este acto se refiere a la posibilidad de extender el rango de aplicaciones.

Síntesis. Es la percepción de enlaces entre hechos aislados: resultados, propiedades, relaciones, objetos, etc., que permite organizarlas en un todo consistente.

Para nosotros cualquier acto de comprensión concerniente a un concepto lo reduciremos al menos a una de estas categorías.

Este modelo comprende adicionalmente otra actividad: el *uso*. *Usar* no es un acto de comprensión, pero es ciertamente una condición *necesaria* para que un acto de comprensión ocurra.

Usar, está dentro de la categoría de actividades, donde el estudiante puede utilizar el concepto con un propósito instrumental para arribar a una meta particular, como ser, hacer una demostración o resolver un problema.

Sin embargo, hay condiciones adicionales necesarias para que se dé un acto de comprensión. Algunas de orden psicológico: atención, intención; y otras de carácter social como la comunicación.

El proceso de comprender puede considerarse como un reticulado de actos de comprensión relacionados por razonamientos. Se podría establecer que en un proceso de comprensión hay una variedad de bases para la comprensión, algunas constan de una serie de transformaciones a partir de un punto inicial.

Partimos de la concepción de que el quehacer matemático es un acto de darle sentido a las ideas matemáticas, buscar patrones y relaciones, comunicar las ideas, usar métodos empíricos, demostrar y trabajar cooperativamente. En este contexto, consideramos importante que estas ideas se vean reflejadas en el salón de clases y que el contenido matemático sea un medio para que los estudiantes participen en la construcción de ideas matemáticas y les encuentren sentido. Así, el tipo de problemas juegan un papel importante en el aprendizaje de la disciplina y con este sentido se planifican las tareas matemáticas para formar a los futuros profesores.

El marco de la Enseñanza para la Comprensión, a partir de David Perkins, viene a complementar y organizar nuestro trabajo.De acuerdo con ello el aprender para la comprensión es aprender un desempeño flexible, aunque el conocimiento y las habilidades pueden traducirse en información y desempeños, la comprensión está más allá de estas normas. Este marco de la Enseñanza para la Comprensión incluye cuatro ideas claves: Tópicos Generativos, Metas de Comprensión, Desempeños de Comprensión y Valoración Continua.

Tópicos Generativos: son tópicos de exploración y que tienen múltiples conexiones con los intereses y experiencias de los estudiantes. Son fundamentales para la disciplina.

Metas de Comprensión: son las afirmaciones o preguntas que expresan aquello que es más importante para los estudiantes durante el desarrollo de una secuencia, de una unidad, o un tema.

Desempeños de Comprensión: son las actividades que desarrollan y demuestran la comprensión de los estudiantes haciendo que utilicen lo que ya conocen en formas diferentes.

Valoración Continua: es el proceso por el cual los estudiantes obtienen retroalimentación continua sobre sus *Desempeños de Comprensión* con el fin de mejorarlos.

Las *Metas de Comprensión* más abarcadoras, se denominan *Hilos Conductores*, describen las comprensiones más importantes que deberían desarrollar los alumnos.

Dado que las actividades que realizamos dentro del marco de la Enseñanza para la Comprensión son variadas y abarcan asignaturas y temas diferentes, nos limitaremos a relatar tres experiencias, que muestran las posibles diferencias entre clases de razonamientos involucrados en un proceso de comprensión.

1) Las Torres de Hanoi y un modelo matemático.

Atendiendo a las tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática y ante la necesidad de la formación de los futuros docentes dentro de estas líneas, en la materia Didáctica y Práctica Docente en Matemática se usa al juego como un recurso muy útil para propender a la enculturación matemática y la comprensión.

Martin Gardner, experto en la presentación interesante y profunda de numerosos juegos, afirma que el mejor modo de despertar el interés a los estudiantes, es ofrecerle un juego intrigante, una paradoja o un truco de magia, todos ellos basados en la Matemática.

Desde siempre la Matemática ha tenido una componente lúdica que ha permitido generar conocimientos y resultados muy importantes. Este aspecto, sumado a su concepción como ciencia de los modelos, permite realizar actividades interesantes que permiten por un lado, mayor comprensión tanto de conceptos como de procesos y por otro, romper con concepciones culturales tales como ”la matemática es aburrida”, “la matemática es sólo para algunos”, “la matemática es fría y muy difícil”

La propuesta que se hace a los alumnos del profesorado tiene entre sus objetivos el que ellos mismos “vivan” la situación y así puedan comprender lo que sienten sus alumnos frente a una situación similar. Está probado además que se tiende a enseñar de la forma en que se aprendió. Intentamos mostrar otras formas de trabajar, y romper de alguna manera las tradicionales en las que el alumno es un mero receptor de saberes.

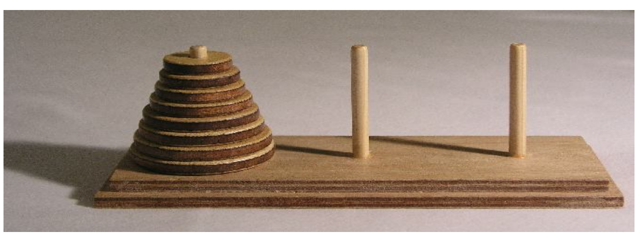
Así, se propone a los estudiantes una situación dada mediante un juego, Las Torres de Hanoi, relacionado con una leyenda hindú que fuera presentada por W.Ahrens en el libro *Mathematische Unterhaltungen un Spiele* de esta forma:

"En el gran templo de Benarés , bajo la cúpula que señala el centro del mundo, reposa una bandeja de cobre en la que están plantadas tres agujas de diamante , más finas que el cuerpo de una abeja. En el momento de la creación ,Dios colocó en una de las agujas 64 discos de oro puro , ordenados por tamaños, desde el mayor que reposa sobre la bandeja, hasta el más pequeño , en lo mas alto del montón .Es la Torre de Brahma. Incansablemente día tras día, los sacerdotes del templo mueven los discos haciéndoles pasar de una aguja a otra , de acuerdo con las leyes fijas e inmutables de Brahma que dictan que el sacerdote en ejercicio no mueva más de un disco a la vez ni lo sitúe encima de un disco de menor tamaño. El día en que los sesenta y cuatro discos hayan sido trasladados de la aguja en la que Dios los puso al crear el mundo a otra aguja, la torre, el templo y todos los brahamanes se derrumbarán, quedando reducidos a cenizas y, con gran estruendo, el mundo desaparecerá"

A partir de esta situación, la pregunta que se propone a los alumnos es:

¿Cuál es el mínimo tiempo para que los monjes logren transferir los 64 discos de una aguja a otra?

El juego se presenta como un tablero con tres clavijas como muestra la figura y una cierta cantidad de discos de distintos tamaños que se ensartan en ellas.



Las Torres de Hanoi es un juego que se ubica entre los denominados *juegos de dinamismo racional* por las capacidades intelectuales que desarrolla y es un buen ejemplo de juego/problema que permite desarrollar actividades propias del quehacer matemático.

Se trata de un juego de optimización en el que se propicia el desarrollo de estrategias de pensamiento al tener que elaborar un plan de acción para lograr el objetivo que es, si bien está implícito, obtener el mínimo número de movimientos para así poder determinar el mínimo tiempo para mover los 64 discos de la leyenda.

El juego de Las Torres de Hanoi y el modelo matemático que oculta se convierten así en el *Tópico Generativo* que motiva a los alumnos. Además el juego es accesible por las estrategias que permiten abordarlo, de una manera tal vez ingenua inicialmente, pero con la necesidad posterior de buscar la mejor, la que dé la solución óptima al problema.

El *Hilo Conductor* es Funciones, íntimamente relacionado con la modelización matemática, es decir la construcción y uso de modelos matemáticos. En este caso, los alumnos deben pensar y actuar usando lo que saben y lo que la situación los provee para construir el modelo matemático que permite contestar la pregunta propuesta.

Las *Metas de Comprensión* se proponen desde el ámbito de la Matemática y el quehacer matemático como también desde la Didáctica:

*Reconocer la importancia de las funciones para modelizar situaciones de la vida real o de ámbitos extramatemáticos.

*Valorar el lenguaje matemático, como también las acciones que intervienen y habilidades presentes en el trabajo matemático.

*Comprender que la creación matemática se produce cuando un sujeto se enfrenta a situaciones problemas.

*Reconocer la importancia de los juegos (en particular, las Torres de Hanoi), para introducir o desarrollar un tema de cierta complejidad matemática.

*Tomar conciencia de que el acercamiento lúdico tiene la potencia de mostrar a los alumnos otra forma de enfrentar los problemas matemáticos.

Los *Desempeños de Comprensión* están en íntima relación con las *Metas de Comprensión*. Tienen que ver con el "hacer matemática": particularizar, reconocer la necesidad de obtener un modelo; si es un modelo conocido, usar lo que se sabe de él para resolver la cuestión planteada; en caso de tratarse de un nuevo modelo, hacer un estudio del mismo, validarlo y en función de lo obtenido, responder a la cuestión planteada, pero también con el poder reflexionar sobre cómo producir conocimiento a través de un juego.

A partir de la experiencia realizada con estudiantes podemos hablar de las distintas fases por las que atraviesa el alumno en la búsqueda de la solución a la situación propuesta.

a) Iniciando con una actividad de familiarización con el juego y sus normas, se hace manipulación de los discos siguiendo las reglas y sin contar la cantidad de movimientos.
b) Conteo del número de movimientos en casos particulares. Construcción de tablas.

c) Comparación de resultados obtenidos con los logrados por los compañeros. Discusión en cuanto a los valores obtenidos por unos y otros.

d) Búsqueda de la estrategia ganadora. Preguntas ¿qué pasa si el número de discos es par?¿y si es impar?¿hay diferencias al jugar en un caso y en otro?

e) Reconocimiento de la necesidad de modelizar, la manipulación de más de 5 ó 6 discos se complica.

f) Detección de un padrón de comportamiento de la situación. Obtención del modelo.

El siguiente cuadro muestra el tipo de tablas que construyen los alumnos:

Nº de discos	1	2	3	4	5	6	7	8
Nºmin. de mov	1	3	7	15	31	63	127	255
	2^1-1	2^2-1	2^3-1	2^4-1	2^5-1	2^6-1	2^7-1	2^8-1

A partir de la tabla conjeturan cual es el modelo que obtienen a partir de ella:

El número mínimo de movimientos (N) para (n) discos es $N=2^n-1$ o sea $N(n)=2^n-1$

Pero hay alumnos que hacen otro tipo de relación entre los movimientos que realizan y los valores que van surgiendo, así:

Para 1 disco, 1 movimiento o sea N (1) =1

Para 2 discos, 3 movimientos o sea N (2) = 3

Para 3 discos, 7 movimientos o sea N (3) = 7 que se puede escribir como 2 N (2) + 1

Para 4 discos, 15 movimientos o sea N (4) =15 que se puede escribir como 2 N (3)+1

Continuando del mismo modo proponen que:

Para n discos, N (n) se puede escribir como 2. N (n-1) + 1

Ante la pregunta de si ambas expresiones “dicen” lo mismo, mediante inducción completa se prueba que sí, viendo además la conveniencia del uso de la forma $N(n)=2^n-1$

Con este modelo se determina que, para trasladar los 64 discos serán necesarios 18.446.744.073.709.551.615 movimientos.

A partir de este resultado y haciendo uso de equivalencias entre unidades de tiempo los alumnos afirman que, si los monjes demoran 1 segundo por cada movimiento, el traslado de todos los discos insumirá 500.000 millones de años, trabajando las 24 horas del día durante los 365 días del año. Un resultado tal vez, no esperado!

Durante el desarrollo del juego y su modelización, las interacciones entre el docente y los alumnos, como también entre los alumnos entre sí, permiten las valoraciones continuas y retoalimentaciones pertinentes.

La comprensión del modelo y de los procesos involucrados permite posteriormente que los alumnos puedan trabajar con el modelo asociado a la Leyenda del Ajedrez, que si bien, comparte el modelo con las Torres de Hanoi de alguna manera, tiene un ingrediente más que lo hace un poco más complejo.

2) Unidad de Semejanza de la asignatura Laboratorio de Geometría.

Partimos del *Tópico generativo*: Semejanza.

Considerando como temas concurrentes el paralelismo y la relación de semejanza de triángulos, en esta experiencia nos referiremos a las compresiones, habilidades o conceptos que emergen frecuentemente al planificar la enseñanza del Teorema Fundamental de las Proporciones, el Teorema de Thales y los criterios de semejanza.[1]

El hilo conductor es ¿Cómo usar lo que sabemos para calcular lo que no sabemos?

Desempeños de comprensión:

- Que los alumnos comprendan la esencia de las relaciones expresadas en los teoremas de la unidad y que puedan aplicarlas en la fundamentación de sus afirmaciones, argumentaciones, así como en la resolución de ejercicios y problemas intramatemáticos y extramatemáticos.

---

[1] Teorema Fundamental de la proporcionalidad:
Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, entonces corta a los otros dos lados en segmentos proporcionales, y recíprocamente, si una recta divide dos de los lados de un triángulo en partes proporcionales, entonces es paralela al tercer lado del triángulo.
Corolario *(Teorema de Thales): Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, entonces los segmentos que éstas determinan son proporcionales.*

- Que comprendan, reproduzcan y realicen en forma independiente demostraciones.

De acuerdo a los desempeños que pretendemos lograr, estructuramos acciones dirigidas a la comprensión de cada teorema o demostración particular y a la aplicación de los teoremas.

Los criterios que nos ayudan a estimar cuánto comprenden nuestros estudiantes radican en la selección de tareas y problemas. La práctica relacionada con la comprensión de teoremas se realiza fundamentalmente a través de la solución de problemas de demostración.

Identificamos los problemas o ejercicios de demostración por su carácter eminentemente deductivo. Son de diferente grado de dificultad, algunos se acompañan de gráficos, otros requieren la determinación de una magnitud, pero poseen un acentuado carácter deductivo y en general requieren el uso apropiado de un conocimiento dado por un teorema o propiedad.

Para que los futuros profesores puedan involucrarse en un trabajo de producción de demostraciones no es suficiente con presentar buenos problemas, se necesita que se apropien de recursos y técnicas propios de los procesos de demostración en geometría.

La reflexión sobre las demostraciones genera condiciones para que los alumnos vayan logrando autonomía frente a la producción de demostraciones.

Realizar una figura de análisis con cuidado puede contribuir a identificar relaciones que pudieran conducir a la demostración.

Metas de Comprensión:

- Aprender a ver, pero el ver está condicionado por el conocer, forma parte del desempeño a lograr.
- Captar la diferencia entre medir y demostrar, diferencia sustancial desde el punto de vista matemático. La respuesta de la medida a partir del establecimiento de relaciones pone en juego procedimiento anticipatorio, se infiere a partir de los datos y con el auxilio de propiedades, teoremas no explicitados en el enunciado.
- Obtener resultados independientes de la experimentación. ¿Qué recurso garantiza que se comparen segmentos sin medirlos?
- Búsqueda de relaciones equivalentes que prueben lo que se quiere demostrar ¿Cuál es la información que tenemos si sabemos que dos triángulos son semejantes?

Desempeños de comprensión del tópico SEMEJANZA.

Medir la altura de un edificio o de un árbol muy alto sin treparse al mismo.

Calcular cuántos kilómetros cuadrados tendrá en realidad una superficie que en un mapa tiene un área de 15 centímetros cuadrados, sabiendo la escala del mapa.

Sabes dividir un segmento dado en tantas partes iguales como quieras ¿con qué propiedad se justifica este método?. Demostrar que el procedimiento es correcto.

Demostrar el teorema de Pitágoras usando semejanza.

Demostrar el teorema de la altura.

Calcular medidas de segmentos.

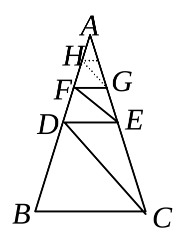
Generalizar cálculos de medida.

Ejemplos de Problemas y desafíos tendientes a lograr las metas de comprensión

1) Sea ABC un triángulo cualquiera

$DE \parallel BC,\ FE \parallel DC,\ AF = 4,\ y\ FD = 6.$

Calcular DB.



2) La medida de la base mayor de un trapecio es 97. La medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 3. Determinar la medida de la base menor del trapecio.

Desafío: Encontrar una solución general aplicable a cualquier trapecio.

3) Comprobar usando algún software (por ejemplo *Geometra* ó el *Geogebra*) que en un trapecio cualquiera siempre hay cuatro puntos que están alineados: el punto de intersección de las diagonales, los puntos medios de los lados paralelos y el punto de intersección de los lados no paralelos.

Demostrar lo verificado.

4) Exhibir una técnica para medir el ancho de un río sin necesidad de cruzarlo empleando conceptos de este capítulo.

5) Una botella de licor se 40 cm de altura se vende junto con una miniatura proporcional al envase grande, de 8 cm de altura.

Si la botella grande contiene 960 cm^3 cm de licor, ¿Cuánto contendrá la miniatura?

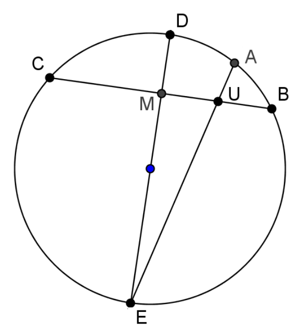
¿Se podrá establecer alguna relación entre la altura de las botellas y los volúmenes? . Justificar.

6) En un triángulo ABC, D es un punto sobre el lado BA tal que $BD : DA = 1 : 2$. E es un punto sobre el lado CB tal que $CE : EB = 1 : 4$. Los segmentos DC y AE se intersecan en el punto F. Expresar $CF : FD$ como cociente de dos enteros primos relativos.

Desafío: Demostrar que si $BD : DA = m : n$ y $CE : EB = r : s$, entonces

$$\frac{CF}{FD} = \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{m+n}{n}\right).$$

7) En la figura *BC* es una cuerda cualquiera, *ED* la mediatriz del segmento *BC*. Sea *U* un punto cualquiera sobre la cuerda *BC*, se traza la semirrecta *EU* y se prolonga hasta cortar a la circunferencia en A.



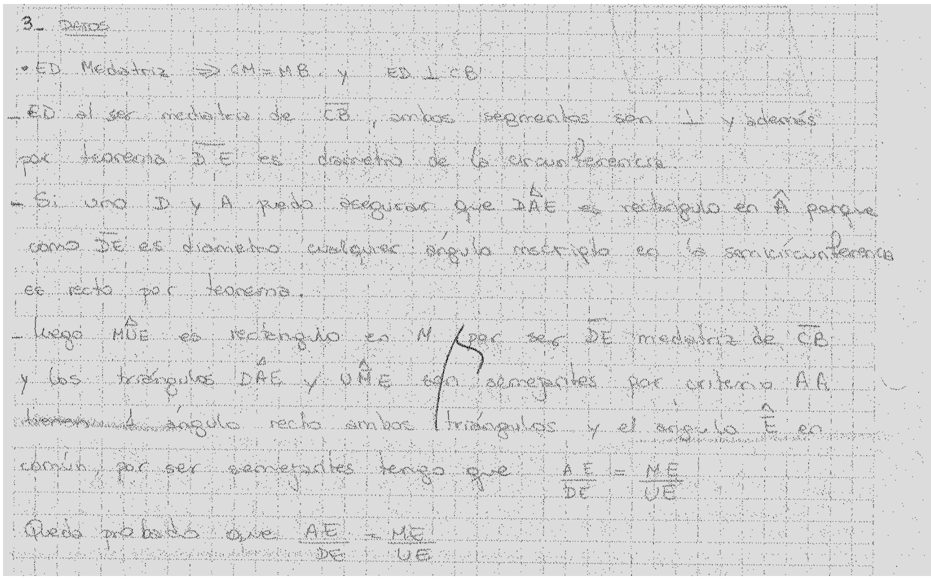
Demostrar que $\frac{AE}{DE} = \frac{ME}{UE}$

Comentarios sobre Producciones de los estudiantes:

Sobre el ejemplo 2: uno de los obstáculos que manifestaron los alumnos para abordar la solución de este problema, y otros del tipo, fue la presencia de datos numéricos, estos los orientó hacia procedimientos calculatorios, les costó ver la necesidad del uso de teoremas para determinar las medidas pedidas.

Sobre el ejemplo 7: presentamos las soluciones de dos estudiantes, en situación de evaluación individual. El buen uso de un criterio de semejanza y de los conceptos les permite establecer la validez de la proporción.

Solución de Gisella



3_ Datos

• ED Mediatriz $\Rightarrow$ CM = MB y ED $\perp$ CB

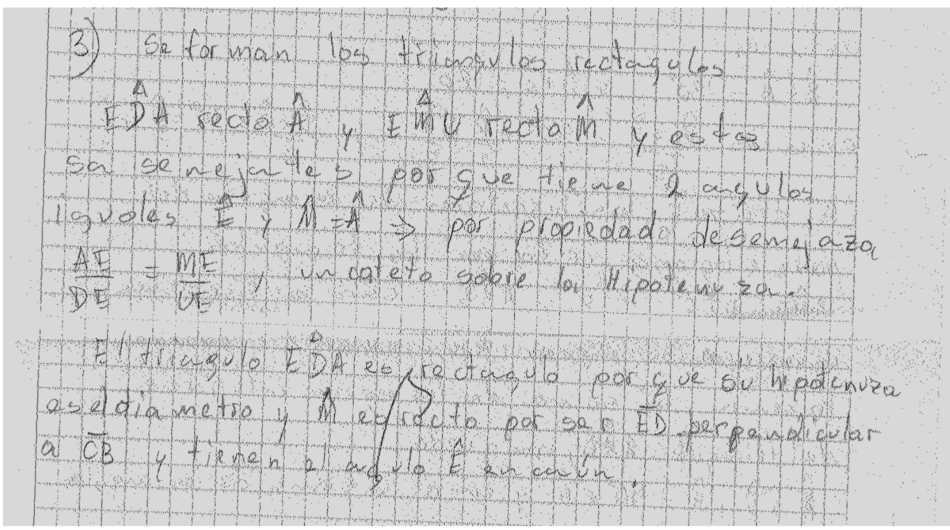
\- ED al ser mediatriz de $\overline{CB}$, ambos segmentos son $\perp$ y además por teorema $\overline{DE}$ es diámetro de la circunferencia.

\- Si uno D y A puedo asegurar que $\overset{\triangle}{DAE}$ es rectángulo en $\hat{A}$ porque como $\overline{DE}$ es diámetro cualquier ángulo inscripto en la semicircunferencia es recto por teorema.

\- Luego $\overset{\triangle}{MUE}$ es rectángulo en M por ser $\overline{DE}$ mediatriz de $\overline{CB}$ y los triángulos $\overset{\triangle}{DAE}$ y $\overset{\triangle}{UME}$ son semejantes por criterio AA ~~tienen~~ ángulo recto ambos triángulos y el ángulo $\hat{E}$ en común, por ser semejantes tengo que $\frac{AE}{DE} = \frac{ME}{UE}$

Queda probado que $\frac{AE}{DE} = \frac{ME}{UE}$

Solución de Cristian



3) Se forman los triangulos rectagulos $\overset{\triangle}{EDA}$ recto $\hat{A}$ y $\overset{\triangle}{EMU}$ recto $\hat{M}$ y estos son semejantes porque tiene 2 angulos iguales $\hat{E}$ y $\hat{M} = \hat{A}$ $\Rightarrow$ por propiedad de semejaza $\frac{AE}{DE} = \frac{ME}{UE}$, un cateto sobre la Hipotenuza.

El triangulo $\overset{\triangle}{EDA}$ es rectangulo porque su hipotenuza es el diametro y $\hat{M}$ es recto por ser $\overline{ED}$ perpendicular a $\overline{CB}$ y tienen el angulo $\hat{E}$ en comun.

3) Ejemplos en el ámbito de la Aritmética

A) Aprender matemática involucra *hacer matemática* incluyendo la solución de problemas y la construcción de demostraciones.

Las propiedades conocidas de los números han sido descubiertas por observación y mucho antes que su validez fuese confirmada por una demostración. Además, muchas afirmaciones no han sido demostradas.

La teoría de números ó aritmética provee elementos para ejercitar el razonamiento inductivo, el razonamiento plausible. Es decir aporta elementos para **comprender procesos típicos del hacer matemática**.

Los ***hilos conductores*** de una de las unidades de la asignatura denominada Laboratorio de Aritmética y Álgebra son: Formular generalizaciones y conjeturas acerca de regularidades observadas al examinar patrones y estructuras y elaborar argumentos convincentes.

La meta de comprensión es desarrollar con alguna maestría el arte de conjeturar inteligentemente e inquisitivamente, ya que ser inquisidor forma parte del espíritu matemático.

Ejemplo de actividad de desempeño:

Hay numerosas propiedades muy elegantes que pueden descubrirse fácilmente escudriñando ejemplos, elegimos la famosa sucesión de Fibonacci (propuesta por el matemático italiano L. de Pisa 1170-1250) y la sucesión de Lucas (de E. Lucas matemático francés 1842-1891)

$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo $n \geq 1$

$L_1 = 1, \quad L_2 = 3, \qquad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para todo $n \geq 1$

A cada uno los términos se le llaman números de Fibonacci y de Lucas, según el caso.

Completar en la tabla siguiente, los primeros 20 términos de la sucesión de Fibonacci y de la sucesión de Lucas.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n										
L_n										

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_n										
L_n										

Identificar regularidades y patrón de formación, formular alguna conjetura que vincule ambas sucesiones.

Por ejemplo podemos observar que:

a) $1+2=3; 1+3=4; 2+5=7; 3+8=11; 5+13=18...$ y se llega a conjeturar que $F_n + F_{n+2} = L_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

b) $1+4=5; 3+7=10; 4+11=15; 7+18=25; 11+29=40$ … ¿qué fórmula conjetura?

c) $1-1=0; 4-1=3; 9-4=5; 25-9=16; 64-25=39$ … ¿qué fórmula conjetura?

d) La última observación sugiere que es necesario definir $F_0 = 0$.

¿Es consistente con la definición dada de los números de Fibonacci?

Defina F_{-1} , F_{-2} , F_{-3} , F_{-4} y F_{-5} , de manera tal, que sea consistente con la definición.

¿Se podrá establecer una relación entre F_n y F_{-n}? En caso afirmativo, encontrarla.

e) Dadas unas relaciones particulares es posible sugerir una fórmula y demostrarla.

$1=1$

$1+1=2$

$1+1+2=4$ ¿Qué fórmula le sugiere, usando sucesiones de Fibonacci?

$1+1+2+3=7$

Use la notación de sumatoria para expresar la conjetura.

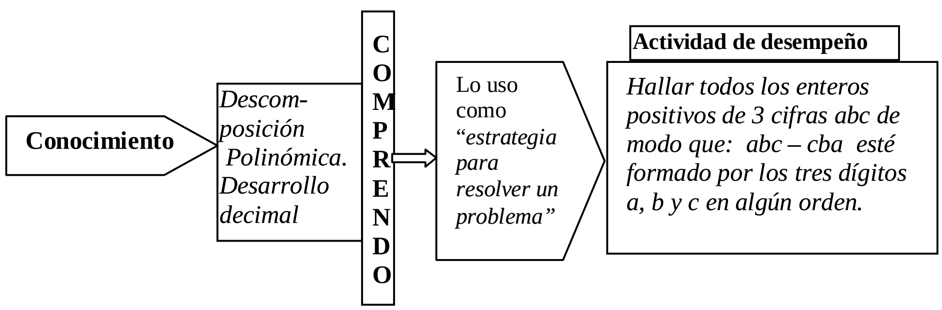
Demuestre usando el método de inducción matemática.

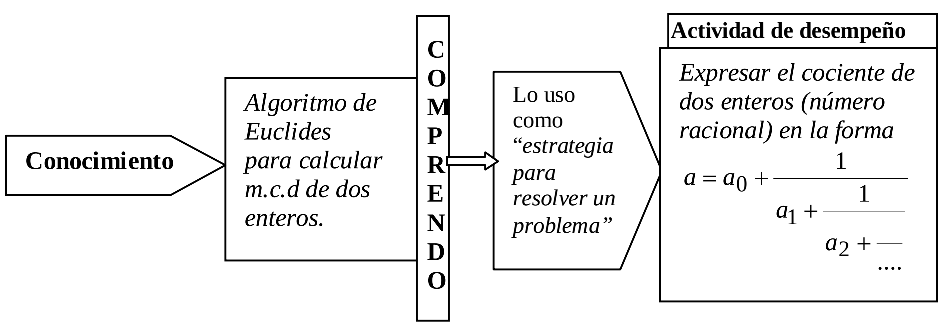
f) Podemos hacer conjeturas sobre el máximo común divisor entre términos de la sucesión de Fibonacci.

$\left(F_n, F_{n+1}\right) = ?\,; \quad \left(F_n, F_{n+3}\right) = ?$

B) El conocimiento de un tema específico o de una propiedad puede resultar una condición absolutamente esencial para poder tener acceso a la resolución de un cierto problema. El conocimiento puntual de propiedades del campo de la aritmética no se pueden sustituir por estrategias generales de pensamiento, ***la meta de comprensión*** la constituyen algunas propiedades y resultados específicos que establecen estrategias casi obligadas a la hora de resolver cierto tipo de problemas.

La elección de actividades tiene por objetivo lograr desempeños de comprensión de estos resultados.





Conclusiones:

Concluimos que este tipo de actividades forman parte del compromiso de implementar un nuevo currículum para la formación del Profesor de Matemáticas que abarca, entre *otros aspectos: la integración de los contenidos con otras áreas, determinación de los campos donde se aplican, competencia en relación a esos saberes. En resumen, que el trabajo de un contenido no se reduzca a presentación de técnicas, algoritmos y repetición de demostraciones sino que, apoyándose en lo intuitivo, lo empírico para conceptualizar, expresar y manipular matemáticamente objetos y relaciones conduzca a una profunda comprensión que permita relacionar lo disciplinar con lo didáctico.*

Referencias Bibliográficas:

- Cerizola N. - Pérez N. - Pekolj M. (2006). *"El laboratorio de geometría y la resolución de problemas"*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 19 (2006).
- Cerizola N. - Pérez N. (1999).*La Resolución de Problemas, su relación con las prácticas docentes, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* RELME 14.
- Cerizola N. - Pérez N. "Estrategias de pensamiento y actos de comprensión". Reunión de Educación Matemática, UMA (2005).
- Blythe Tina, **"***¿Cuál es el marco teórico de la Enseñanza para la Comprensión?"*, Blog de INTERNET "eleducador.com"
- Gascón J. (2001): "Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes". *Revista RELIME*, Vol 4, Nº 2, pag. 129-159.
- Pérez N. – Pekolj M ,"Los laboratorios de Geometría y Aritmética ¿Estimulan la pasión por hacer matemática?. Libro Electrónico "Innovando la Enseñanza de las Matemáticas" ISBN: 978-607-422-013-1- México (2008) (pág. 21-32).
- Pérez N.- Pekolj M. "Propuesta de diseño curricular para la formación del profesor en Matemática", Congreso internacional de Educación: Construcciones y perspectivas, miradas desde y hacia América Latina. Ponencia. Santa Fe, Univ. Nac. del Litoral, 2009.
- Sierpisnka Anna, Understanding in Mathematics, The Falmer Press,1996.
- Stone Wiske M. La enseñanza para la Comprensión. Paidós. 2005.