Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

En este número, los tres problemas que se presentan están relacionados a la Copa del Mundo de Fútbol, como un pequeño homenaje a los Campeones y porque *la matemática está en todas partes*.

Las soluciones se encuentran en las páginas siguientes.

[Se agradece la colaboración de Bruno Giordano en el primer problema.]

Problema 1. *Cantidad de Mundiales posibles.* En la fase de grupos del Mundial de fútbol hay 8 grupos, de 4 equipos cada uno. Solo 2 equipos de cada grupo pasan a la siguiente fase del torneo; el que sale primero y el que sale segundo. Estos dos equipos pasan a jugar la fase eliminatoria. Se arma un cuadro y se juegan los octavos de final; que luego continúan con cuartos de final, semifinal y final, con el mismo formato que los torneos de tenis, es decir, por simple eliminación. Una vez que comienza el Mundial, pensemos en cuántos *cuadros* distintos podría haber para esta fase eliminatoria, es decir, las distintas posibilidades de que salgan un 1ero y un 2do en cada Grupo, y luego cómo pueden salir los octavos de final, los cuartos, la semi y la final. Supongamos que en el Mundial 2022, cada persona del planeta hacía su pronóstico y elegía un *cuadro* ¿podían elegir los cuadros como para asegurarse que al menos una persona fuera a acertar?

¿Y si le permitimos a cada persona que elija mil cuadros distintos?

¿Cuántos cuadros posibles hay?

Problema 2. *En el Mundial de Fútbol.*

(a) ¿Podría un equipo salir campeón sin ganar ningún partido?
(b) ¿Podría un equipo salir campeón perdiendo dos partidos?
(c) ¿Podría un equipo ganar 6 partidos, empatar uno y no salir campeón?
(d) ¿Podría un equipo empatar 4 partidos, perder dos, ganar uno, y salir campeón?
(e) ¿Podría un equipo ganar dos partidos y quedar eliminado en la fase de grupos?
(f) ¿Podría un equipo no ganar ningún partido y salir primero en su grupo?

(g) ¿Podría un equipo ganar el Mundial sin hacer ni un solo gol?
(h) ¿Podría salir campeón sin ganar ningún partido y perdiendo un partido?
(i) ¿Podría un equipo perder 3 partidos y salir campeón?
(j) Si un equipo pierde los 3 primeros partidos ¿sale último en su grupo?
(k) Si de los tres primeros partidos gana dos y empata uno ¿sale primero en su grupo?

[Aclaración: si un partido va a definición por penales se considera empatado.]

Problema 3. *¡Definición por penales!* En esta definición, Brasil (B) y Argentina (A) están muy parejos: luego del 3er penal pateado por B, quedaron arriba por un gol. A A le quedan 3 penales por patear y a B dos. Debido al gran arquero de A, la probabilidad de convertir de B es de un medio en cada penal. En cambio para A, las chances de convertir cada penal se calculan en $2/3$. En esta situación ¿quién tiene mayor probabilidad de ganar?

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones?

- $\{a_n\}$: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...
- $\{b_n\}$: 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17, 21, 27, 31, 33, ...
  que escrita en sistema binario es así:
  1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111, 100001, ...
- $\{c_n\}$: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 41, 43, 59, 61, 71, 73, 101, 103, 107, ...
- $\{d_n\}$: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 17, 25, 38, 57, 86, 129, 194, 291, 437, 656, 985, ...

Podés encontrar las soluciones en las páginas siguientes.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* No se puede asegurar que aciertan, ni siquiera eligiendo mil cuadros distintos de la fase eliminatoria del Mundial cada persona.

Un simple cálculo combinatorio nos dice que, en cada grupo, las posibilidades de obtener un primero y un segundo son $4 \times 3 = 12$. Como son 8 grupos, el cuadro de octavos de final tiene 12^8 posibilidades. A partir de allí, cada partido tiene 2 posibilidades, hay 2^8 formas distintas de que salgan los octavos. Análogamente, hay 2^4 posibles resultados en los cuartos, 2^2 en las semifinales y 2 en la final. Todos estos números se multiplican para obtener $12^8 \times 2^{15} = 14{,}089{,}640{,}214{,}528$.

Por otra parte, la población del mundo es aprox. 8 mil millones de personas, por lo que nuestro número de cuadros del Mundial es mayor que mil veces la cantidad de habitantes del planeta.

Solución 2. *Respuesta:* Todas son *sí*, excepto al final, las preguntas (i) y (k), en las que la respuesta es *no* o *no necesariamente*.

Quizás lo más sorprendente sea que un equipo podría salir campeón sin hacer ni siquiera un gol. Esto podría ocurrir si en su grupo los 6 partidos terminan 0 a 0 y por tener menos tarjetas rojas y amarillas que los demás (o por sorteo) el equipo avanza a los octavos de final, donde termina sus partidos 0 a 0 pero gana en la definición por penales.

Otra situación notable se da cuando un equipo, con solo 2 puntos, clasifica a la siguiente fase. Esto puede ocurrir si en ese grupo hay un equipo que gana los 3 partidos y los otros tres partidos son empates. esto responde la pregunta (h).

Para responder (b) hay que pensar en un grupo en el que un equipo gana sus 3 partidos y los otros tres equipos se van ganando uno a otro en forma cíclica, por ejemplo: A gana sus tres partidos, B le gana a C, C le gana a D y D le gana a B. Así terminan A con 9 puntos y los otros tres con 3 puntos cada uno.

Solución 3. *Respuesta:* Son muy parejas las chances. De hecho, si pensamos que B va a convertir aprox. 1 penal de cada 2, entonces se espera que sume un gol en los dos penales que le quedan, mientras que A convierte 2 de cada 3, entonces se espera que convierta 2 de los 3 que le quedan en cuyo caso terminarían igualados esta serie.

Uno podría tentarse a decir que las probabilidades de ganar de los dos equipos son las mismas. Pero esto no es así. Como veremos, en este problema, hay una ligera diferencia en favor A, que aparece al desarrollar el modelo de probabilidad adecuado para este ejemplo.

Notemos que $p(B=0)=(\frac{1}{2})^2$, es decir, la probabilidad de que B convierta cero goles en los 2 penales que le quedan es de un cuarto. Análogamente $p(B=2)=(\frac{1}{2})^2$. También, $p(B=1)=2\,(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$. Por otro lado, $p(A=0)=(\frac{1}{3})^3$ es la probabilidad que A no convierta goles en los 3 penales que pateará. Análogamente, calculamos $p(A=1)=3\,(\frac{2}{3})\,(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{3^2}$, $p(A=2)=3\,(\frac{2}{3})^2\,(\frac{1}{3})=(\frac{2}{3})^2$ y $p(A=3)=(\frac{2}{3})^3$. Consideramos como independientes los eventos de B y de A, por lo que la probabilidad de combinar dos de ellos es el producto de las probabilidades. Así, realizamos una tabla con todos estos valores.

	$p(A=0)=(\frac{1}{3})^3$	$p(A=1)=\frac{2}{3^2}$	$p(A=2)=(\frac{2}{3})^2$	$p(A=3)=(\frac{2}{3})^3$
$p(B=0)=(\frac{1}{2})^2$	$1/(2^2\cdot 3^3)$	$1/(2\cdot 3^2)$	$1/3^2$	$2/(3^3)$
$p(B=1)=\frac{1}{2}$	$1/(2\cdot 3^3)$	$1/(3^2)$	$2/(3^2)$	$2^2/3^3$
$p(B=2)=(\frac{1}{2})^2$	$1/(2^2\cdot 3^3)$	$1/(2\cdot 3^2)$	$1/3^2$	$2/3^3$

Con el cuadro, ahora es fácil hacer la cuentas.

La probabilidad de ganar de A es la suma de tres entradas del cuadro, la que corresponden a cuando A supera por 2 ó 3 a B (ya que A está uno abajo de B). Es decir, la probabilidad de ganar de A es

$$p(A=3\wedge B=0)+p(A=3\wedge B=1)+p(A=2\wedge B=0)=\frac{2}{3^3}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{1}{3^2}=\frac{2+4+3}{3^3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar de A es $\frac{9}{23}=\frac{1}{3}=\frac{18}{54}$.

La probabilidad de empatar es la suma de 3 entrads en diagonal del cuadro, donde A suma uno más que B, que arroja el resultado $\frac{19}{54}$.

Mientras que la probabilidad de ganar de B es igual a $p(B\geq A)$, puesto que B ya tenía un gol más que A. Esta se calcula sumando los 6 entradas del cuadro donde B es mayor o igual que A, cuya resultado es $\frac{17}{54}$.

Por lo tanto, A tiene mayor probabilidad de ganar.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_9 = 82$,
  en general $a_n = n^2 + 1$.
- $b_{12} = 45$, o mejor $b_{12} = (101101)_2$.
  Son los números que escritos en sistema binario son palindrómicos (capicúa).
- $c_{19} = 109$.
  Son los llamados *primos gemelos* (*twin primes*).
- $d_{18} = 1477$.
  d_n es la parte entera de $1{,}5^n = \lfloor (\frac{3}{2})^n \rfloor$.

Viene de páginas anteriores.