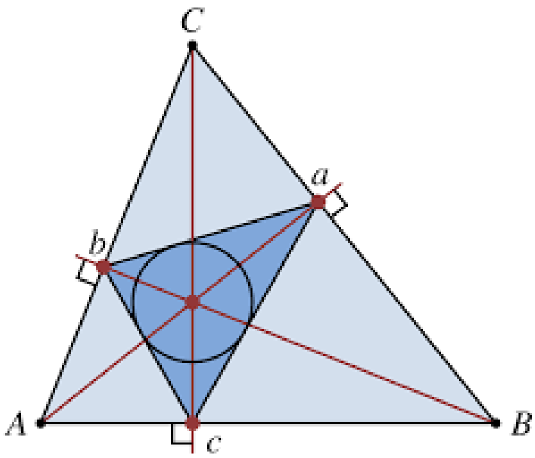
 por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

dado un triángulo acutángulo T, el triángulo inscripto en T de menor perímetro es el determinado por el cruce de las alturas de T con los lados de T?

En 1775, Giovani Fagnano planteó el problema de encontrar el triángulo de menor perímetro inscripto en un triángulo acutángulo dado T. La solución está dada por el triángulo *órtico* o *podal* P de T, que es el triángulo formado por los pies de las alturas de T, es decir, los puntos de intersección de los lados de T con las perpendiculares a los lados que pasan por los vértices de T. En la imagen, el triángulo $T = \triangle ABC$ tiene triángulo podal $P = \triangle abc$.



La solución fue hallada por el mismo Fagnano [2] usando métodos analíticos (cálculo) y un resultado intermedio debido a su padre Giulio Carlo. Luego aparecieron algunas pruebas geométricas, entre ellas las de Schwarz, Fejér, Kazarinoff, Coxeter, etc. Estas pruebas usan las propiedades geométricas de las reflexiones para determinar algún camino minimal que representa el perímetro. También existen pruebas que usan trigonometría.

La demostración geométrica que daremos a continuación se basa en la versión de la prueba de Schwarz presentada en el libro de Coxeter y Greitzer [1] la cual utiliza la siguiente propiedad del triángulo podal P, que el mismo Fagnano probó en [2] (y que omitiremos):

(1) las bisectrices de los ángulos del triángulo podal P son las alturas del triángulo original T.

• Consideramos el triángulo $T = \triangle ABC$ donde tenemos dibujado el triángulo podal P con lados a, b, c y algunos ángulos. Reflejamos T por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ obteniendo $\triangle BA'C$. En la Figura 1 se puede ver la situación.

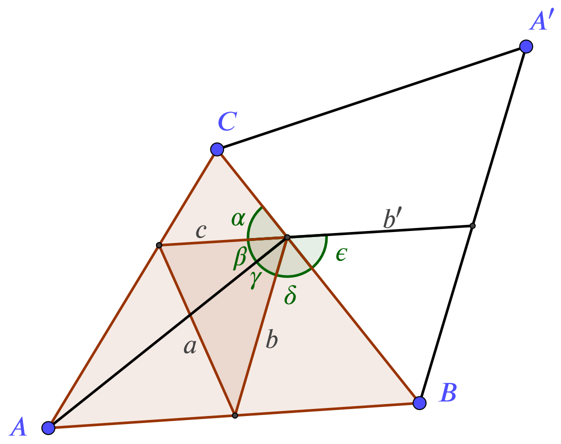


FIGURA 1. Triángulo T y su reflejado por la recta BC.

Veamos primero que si b' es el segmento reflejado de b con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, es decir $b' = S_{\overleftrightarrow{BC}}(b)$, entonces:

(2) los segmentos c y b' quedan alineados (forman un ángulo llano).

Para demostrar que c y b' están alineados basta probar que $\beta+\gamma+\delta+\epsilon = 180°$. El hecho de que P sea podal nos dice que

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 90°,$$

así que solo resta probar que $\beta + \epsilon = 90°$.

Al reflejar el segmento b con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ se forma el ángulo ϵ que, por la reflexión, es igual a δ. Además, la propiedad **(1)** implica que $\beta = \gamma$, y por lo tanto $\alpha = \delta$. De este modo $\beta + \epsilon = \beta + \delta = \beta + \alpha = 90°$, como queríamos probar.

• Ahora vamos a probar que P es el triángulo inscripto en T de perímetro menor. Para ello, dibujamos otro triángulo inscripto arbitrario Q con lados u, v, w y queremos probar que el perímetro de P es menor que el de Q.

Reflejamos el triángulo T y los triángulos inscriptos P y Q sucesivamente a lo largo de los lados BC, AB, AC, BC y AB, obteniendo la Figura 2. De este modo obtenemos 6 triángulos grandes (5 nuevos congruentes a T). Aclaramos que, para no recargar la notación en la Figura 2, llamamos de igual modo a los puntos o segmentos que van resultado a partir de los originales a través de las 5 reflexiones realizadas.

Lo primero que observamos en la Figura 2 es que, la poligonal punteada roja, que va desde S_0 hasta S_5, está formada por el segmento w original, el 1er reflejado v, el 2do reflejado u, el 3er reflejado w, el 4to reflejado v y el 5to reflejado u. Así concluimos que:

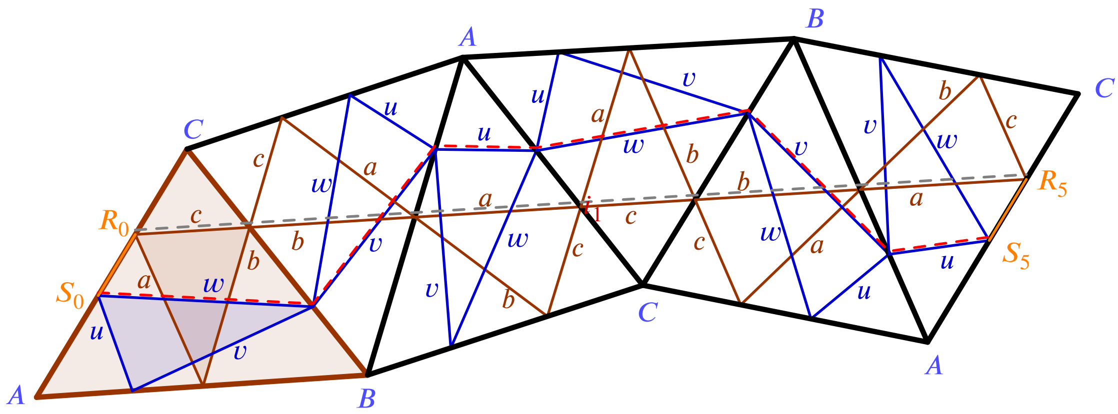


FIGURA 2. Triángulos T y P y sus sucesivas reflexiones.

(3) la longitud de la poligonal roja $\widetilde{S_0S_5}$ es igual al doble del perímetro de Q.

De igual modo, la poligonal punteada gris, que va desde R_0 hasta R_5, está formada por el segmento c original, el 1er reflejado b, el 2do reflejado a, el 3er reflejado c, el 4to reflejado b y el 5to reflejado a. Pero en este caso, aplicando repetidas veces la propiedad **(2)**, vemos que esta poligonal gris es en realidad igual al segmento $\overline{R_0R_5}$.

Resumiendo lo observado, concluimos que:

(4) la longitud del segmento gris $\overline{R_0R_5}$ es el doble del perímetro de P.

Afirmamos ahora que el segmento original $\overline{AC}$ y el segmento final $\overline{AC}$ son paralelos. Para ello miremos la sucesión de segmentos

$$\overline{AC} \to 1\text{er } \overline{AC} \to 2\text{do } \overline{AC} = 3\text{er } \overline{AC} \to 4\text{to } \overline{AC} \to 5\text{to } \overline{AC}$$

que fueron construidos a partir del original $\overline{AC}$ (el 2do y 3er $\overline{AC}$ coinciden pues ahí se reflejó con respecto a $\overline{AC}$). Resulta que si bien los segmentos fueron construidos reflejando, también podemos pensar que fueron construidos rotando el doble del ángulo que cada segmento forma con el eje de reflexión. Así, si consideramos la orientación antihoraria como positiva, la sucesión puede ser construida así:

$$\overline{AC} \xrightarrow{R_{C,2\hat{C}}} 1\text{er } \overline{AC} \xrightarrow{R_{A,2\hat{A}}} 2\text{do } \overline{AC} = 3\text{er } \overline{AC} \xrightarrow{R_{C,-2\hat{C}}} 4\text{to } \overline{AC} \xrightarrow{R_{A,-2\hat{A}}} 5\text{to } \overline{AC}$$

(aquí $R_{X,\hat{\theta}}$ indica la rotación de centro X y ángulo orientado $\hat{\theta}$). Vemos que la suma de los ángulos orientados que fueron utilizados para ir desde el AC original hasta el quinto $\overline{AC}$ da cero. Esto implica que el $\overline{AC}$ original y el quinto $\overline{AC}$ son paralelos (uno es el trasladado del otro).

De este modo, el segmento $\overline{R_0S_0}$ en el primer $\overline{AC}$ es congruente y paralelo al segmento $\overline{R_5S_5}$ en el quinto $\overline{AC}$ y, por lo tanto, los vértices R_0, R_5, S_5, S_0 forman un paralelogramo $\square R_0R_5S_5S_0$. Esto implica que $\overline{R_0R_5} \equiv \overline{S_0S_5}$. Combinando esto con (4) obtenemos:

(5) la longitud del segmento $\overline{S_0S_5}$ es el doble del perímetro de P.

Ahora, por (3), sabemos que el doble del perímetro de Q es la longitud de la poligonal roja, que es más extensa que el segmento $\overline{S_0S_5}$ que cuya longitud es el el doble del perímetro de P, de donde es inmediato deducir que el perímetro de P es menor que el perímetro de Q, como queríamos ver.

Referencias

[1] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer, *Geometry revisited*, (MAA) Random House, 1967. Disponible electrónicamente en https://www.math.unipd.it/~legovini/Coxeter_Greitzer_Geometry_revisited.pdf

[2] G.F. Fagnano, *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia*, Nova Acta Eruditorum: 281–303. Disponible electrónicamente en http://www.izwtalt.uni-wuppertal.de/Acta/NAE1775.pdf

Giovanni Francesco Fagnano dei Toschi (31-1-1715 – 14-5-1797) fue un matemático y sacerdote italiano nacido en Senigallia, hijo de Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, también matemático. En 1752 se convirtió en canónigo, y en 1755 fue designado como archidiácono. Es conocido por el problema que lleva su nombre (¡el de este artículo!), aunque también resolvió parcialmente el problema de encontrar la mediana geométrica de conjuntos de cuatro puntos en el plano. Éste es el punto que minimiza la suma de sus distancias a cuatro puntos dados. Como demostró Fagnano, cuando los cuatro puntos forman los vértices de un cuadrilátero convexo, la mediana geométrica es el punto donde las dos diagonales del cuadrilátero se cruzan. En el otro caso posible, que no fue considerado por Fagnano, un punto se encuentra dentro del triángulo formado por los otros tres, y este punto interno es la mediana geométrica.

Acta Eruditorum fue la primer revista científica alemana, publicada mensualmente y en latín entre 1682 y 1782, fundada en Leipzig por Otto Mencke por iniciativa de Gottfried Leibniz y con el apoyo del duque de Sajonia. Acta Eruditorum comprendía resúmenes de textos nuevos, críticas, ensayos cortos y notas, esencialmente sobre ciencias naturales y matemáticas, pero también cubría temas de teología y filosofía. Tras la muerte de Otto Mencke, las Acta fueron retomadas por su hijo, Johann Burckhardt Mencke hasta su propio fallecimiento en 1732. Él también fue reemplazado por su hijo Friedrich Otto Mencke, y entonces la revista cambió de nombre para pasar a ser la *Nova Acta Eruditorum*.

Karl Hermann Amandus Schwarz (25-1-1843 – 30-11-1921) fue un matemático alemán, conocido por sus trabajos en análisis complejo. En 1868 se casó con Marie Kummer, la hija del conocido matemático Ernst Kummer. Schwarz estudió originalmente química en Berlin pero Ernst Kummer y Karl Weierstrass lo convencieron de que se dedique a la matemática. Recibió su doctorado (Ph.D.) por la Universidad de Berlín en 1864 bajo la supervisión de Kummer y Weierstrass.