Revista de Educación Matemática
Volumen 36, N° 3 (2021), páginas 29 – 38
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Artículo de Matemática

UN ENIGMA LLAMADO GRIGORI PERELMAN

Jorge Lauret

Resumen. La famosa Conjetura de Poincaré (1904), de enunciado puramente topológico, fue probada por el matemático ruso Grigori Perelman en el 2002 usando geometría y ecuaciones diferenciales. Este artículo trata sobre la matemática, los/as matemáticos/as, los premios, los millones de dólares y todo el drama alrededor de dicha prueba.

Palabras clave: Perelman, Conjetura de Poincaré, topología.

Abstract. The famous Poincaré Conjecture (1904), purely topological, was proved by the Russian mathematician Grigori Perelman in 2002 using geometry and differential equations. This paper is about the mathematics, the mathematicians, the prizes, the millions of dollars and all the drama surrounding such a proof.

Keywords: Perelman, Poincaré conjecture, topology.

§1. Madrid, agosto de 2006

En el acto inaugural del Congreso Internacional de Matemáticos/as se anuncia que el ruso Grigori Perelman es uno de los cuatro ganadores de la Medalla Fields, el premio más prestigioso en Matemática, considerado como equivalente al Nobel, aunque sólo se entrega a menores de 40 años y la parte monetaria es irrelevante. Hay bullicio y emoción. Expectativa. El Rey de España está presente en la sala para presidir la ceremonia. Perelman, no. El Presidente de la Unión Matemática Internacional (IMU), John Ball, toma la palabra para contarle al auditorio que el hombre que había resuelto uno de los siete enigmas matemáticos del milenio, la Conjetura de Poincaré, no había aceptado el reconocimiento. Que había pasado dos días en San Petesburgo intentando convencerlo de que recibiera el premio, ofreciéndole distintas opciones digamos logísticas, pero Perelman aseguró en una entrevista posterior que nunca tuvo dudas sobre aceptar o no, que a él lo único que le interesaba era que su prueba de la Conjetura de Poincaré fuese correcta. Se escucha un tibio aplauso. Raro, incómodo, como inconsciente, pero cargado de un gran simbolismo.

Fue el primer matemático/a en rechazar el premio en la historia de la Fields, que se entrega desde 1936. Simplemente no le interesó recibirlo, para perplejidad de la gran mayoría de la comunidad matemática.

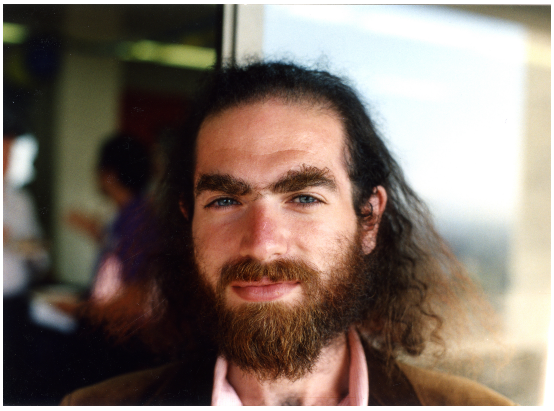

Figura 1. Grigori Perelman, 1993 (Autor de la foto: George M. Bergman, Berkeley. Cortesía de Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach).

La Conjetura de Poincaré es uno de los llamados Problemas del Milenio, que son siete y fueron elegidos en 2000 por algunos/as de los/as mejores matemáticos/as del mundo a pedido del Instituto Clay de Matemática, una fundación sin fines de lucro financiada por el millonario Landon Clay. Esta entidad, además de estar dedicada a apoyar financieramente la investigación en Matemática de múltiples maneras, ofreció un millón de dólares como premio para cada uno de los siete problemas. Más allá del aspecto monetario de la iniciativa, la real importancia de esta lista de problemas reside en su rol de guía para la Matemática, en actuar como una especie de "norte" para la disciplina por un largo tiempo, siendo su predecesora la lista de 23 problemas presentados por el famoso matemático David Hilbert durante el primer Congreso Internacional de Matemáticos/as en el año 1900 en París.

§2. La carrera de Perelman

Diez años antes, en 1996, a Perelman le habían concedido el EMS Prize, un premio que otorga cada cuatro años la Sociedad Matemática Europea a los/as diez mejores matemáticos/as europeos/as menores de 35 años. Y también lo había rechazado, ése fue su primer acto público de comportamiento inusual y el comienzo de la parte excéntrica de su carrera.

Grigori Perelman nació el 13 de junio de 1966 en Leningrado, URSS (actualmente San Petersburgo, Rusia). Hasta 1995, su carrera transitó por los carriles usuales, parecida en su estructura y cronología a la de cualquier matemático/a profesional. Se doctoró bastante joven a finales de los ’80, escribió artículos que envió a publicar y fueron aceptados en revistas de reconocido prestigio. También dictó conferencias en diferentes congresos sobre sus ideas y resultados, incluyendo una en el Congreso Internacional de Matemáticos/as de 1994 en Zúrich, ocupó cargos en el Instituto Steklov (San Petersburgo) y en algunas universidades de los Estados Unidos, obtuvo la Beca Miller (Berkeley) e incluso recibió un premio de la

Sociedad Matemática de San Petersburgo en 1991. Lo que estuvo lejos de lo usual fue la sobresaliente calidad científica de su trabajo, donde quedó en evidencia su gran capacidad y originalidad. Antes de 1995, ya había resuelto varios problemas de Geometría Diferencial que habían permanecido abiertos por décadas. Perelman era considerado por sus colegas un matemático brillante ya en esa época.

A mediados de 1995 se da el quiebre en su carrera. Algo lo decidió a rechazar todas las excelentes ofertas de trabajo estable que recibió de varias de las mejores universidades de Estados Unidos, incluyendo Princeton y Stanford, y regresar a su antigua posición de salario nada generoso en el Instituto Steklov, y a vivir con su madre. En ese momento comenzó su reclusión académica, la cual se extendería por casi siete años. Ahora sabemos que el deseo de Perelman era concentrarse en la Conjetura de Poincaré, lo cual, parece haber decidido, era mucho más fácil de lograr en un departamento en las afueras de San Petersburgo que en Estados Unidos como Profesor de alguna famosa universidad.

§3. Sobre la profesión de matemático/a

La habilidad de una persona de permanecer concentrada en la resolución de un problema durante largo tiempo es invaluable, incluso si es un problema común de la vida cotidiana. Sin embargo, pareciera ser una habilidad poco cultivada y no demasiado valorada, desafortunadamente. Lo cierto es que a la mente del ser humano parece agradarle la concentración, la predispone a abrir puertas de habitaciones desconocidas, encantada de recibir al único visitante permitido, que al fin encontró el tiempo para concentrarse. Que pensar cuesta e incluso a veces duele es también cierto, pero el placer de entender, cada vez un poco más, hace que valga la pena. Perelman logró concentrarse durante siete años en la Conjetura de Poincaré, hasta resolverla en 2002 y comenzar una de las historias más dramáticas de la Matemática. No es difícil imaginarse los momentos de desazón y de duda que habrá tenido que superar, los días, semanas o quizá meses sin obtener avance alguno, al menos de forma aparente o consciente.

Winston Churchill definió al éxito, en una de sus numerosas citas, como ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo. La investigación en Matemática no está muy lejos de poder describirse de esta manera. En algún momento, luego de meses o años de investigación, un/a matemático/a decide que los resultados que obtuvo sobre algún problema o tema constituyen un aporte original digno de ser anunciado y explicado. Es una decisión difícil, pues lo más probable es que hayan quedado algunas, o muchas, preguntas naturales y centrales sin respuesta. La forma final que tomará su trabajo será la de un artículo publicado en una revista especializada, luego de un proceso riguroso de revisión, corrección y aceptación que puede llevar fácilmente de seis meses a un año, e incluso mucho más en algunos casos.

Pero la vertiginosidad de las últimas décadas no perdonó ni siquiera a esta disciplina milenaria llamada Matemática. El tiempo a veces excesivo que transcurre entre la conclusión de un artículo y su publicación dio lugar en los ’90 a la popularización de arXiv, un archivo en internet de preprints de Matemática y Física, donde los/as científicos/as colocan sus trabajos usualmente antes o en el mismo momento en que los envían a publicar a alguna revista. Al carecer de revisión alguna, el valor de un preprint en arXiv como publicación científica es prácticamente nulo.

§4. Conmoción matemática

Luego de siete años de confinamiento, el 11 de noviembre de 2002, Perelman se conectó a Internet, entró justamente a ese sitio, arXiv, y luego de llenar algunos campos obligatorios se decidió a dar el último clic para subir un preprint conteniendo algunos de sus resultados (ver G. Perelman (2002)). Sólo una pequeñísima parte de la comunidad matemática se percató ese día de lo que podían llegar a significar esas 39 páginas. La conmoción que causó quedó plasmada en la desmesurada cantidad de preprints sobre el mismo tema que fueron subidos por distintos autores durante las dos semanas siguientes, para dejar constancia de hasta dónde habían llegado. En marzo de 2003, Perelman sube un segundo preprint de 22 páginas (ver G. Perelman (2003a)) y acepta algunas de las muchas invitaciones que venía recibiendo para dictar conferencias en algunos de las mejores centros de Matemática del mundo en los Estados Unidos, como Princeton, MIT y Stony Brook, durante el mes de abril. Ya de regreso en San Petesburgo, en julio de 2003, sube su tercer y último preprint (ver G. Perelman (2003b)), para luego simplemente desaparecer, de nuevo. Con esto Perelman completaba la solución de la Conjetura de Poincaré, problema que sobrevivió los embates de grandes matemáticos durante todo el siglo veinte.

Los tres preprints de Perelman nunca fueron publicados formalmente. Sin embargo, por ser ni más ni menos la Conjetura de Poincaré lo que estaba en juego, tuvieron revisiones de lujo en la forma de dos artículos largos, uno de 268 páginas de Kleiner-Lott (ver B. Kleiner and J. Lott (2008)) y el otro de Cao-Zhu de 327 páginas (ver H-D Cao and X-P Zhu (2006)), además de un libro de Morgan-Tian (ver J. Morgan and G. Tian (2007)). Todos estos son trabajos de gran calidad y precisión escritos por matemáticos/as expertos/as en el área, lo cual dejó confirmado científicamente que los resultados de Perelman son correctos y presentan una prueba de la Conjetura de Poincaré. Uno de estos artículos generó una controversia llevada a la fama en un artículo publicado en la revista The New Yorker, con repercusiones en la justicia incluidas, que no es objeto de mayor interés en este artículo.

A pesar de que el enunciado de la Conjetura de Poincaré es puramente topológico, la demostración dada por Perelman se enmarca en otras dos áreas de la Matemática. Una es el Análisis Geométrico, una mezcla de ecuaciones diferenciales y geometría que fue en efecto revolucionada por Hamilton y Yau, entre muchos otros, en pos de resolver la conjetura. La otra es la Geometría Riemanniana, que es curiosamente, o no, la misma área de la Matemática usada por Albert Einstein para desarrollar su Teoría de la Relatividad General. Así es, también en Matemática, todo tiene que ver con todo.

§5. El juego del millón

En diciembre de 2005 Perelman le lleva una manuscrita y escueta carta de renuncia a la secretaria del Instituto Steklov, la cual, consternada, le ofrece dejarla en un cajón por un tiempo por si se arrepentía. Luego le preguntó, "Grisha, ¿sabe tu mamá?". Perelman nunca volvió por la carta y quedó desempleado, como era su deseo.

Recién en marzo de 2010 el Instituto Clay decidió ofrecerle el premio de un millón de dólares a Perelman por su resolución de la Conjetura de Poincaré. Se tomaron su tiempo, casi el mismo que le llevó a Perelman resolverla. Perelman lo rechazó, como lo había hecho con la Medalla Fields, pero esta vez también para perplejidad y asombro del público en general. El rechazo del millón lo hizo famoso, muy a su pesar. Lo expuso públicamente, comenzó a ser filmado sin permiso en el supermercado y en el subte. Se publicaron incontables artículos en diarios y revistas alrededor del mundo sobre su vida, con el agregado de todo lo que puede aportar Internet. Hay incluso algunas teorías acerca de cuáles podrían ser los síndromes que padece (entre ellos, el Asperger).

En la actualidad, nada nuevo se sabe de Grigori Perelman. Sólo algún que otro rumor circula de vez en cuando por alguna cena en algún congreso. ¿Por qué nos asombra, o incluso incomoda, que no haya querido jugar ninguno de nuestros juegos? Ni el de las publicaciones en las revistas más prestigiosas, ni el de las posiciones en las universidades más conocidas, ni el de los más famosos premios, ni siquiera el juego del millón. ¿Por qué nos cuesta entender que el único juego que le interesa a Grigori Perelman es la Matemática? Cuál será nuestro síndrome.

§6. La Conjetura de Poincaré

Corría el año 1904 cuando el famoso matemático francés Henri Poincaré se hizo una pregunta muy natural que se convertiría en la llamada Conjetura de Poincaré, mal llamada así pues Poincaré en realidad nunca conjeturó que la respuesta sería afirmativa. La pregunta se encuadra dentro de la Topología, un área relativamente nueva de la Matemática de la cual Poincaré es considerado uno de sus creadores, o descubridores, según se prefiera. Como otra curiosa nota interdisciplinar, cabe mencionar que la Topología fue usada por Lacan para intentar formalizar lo inconsciente.

El enunciado técnico de la conjetura es el siguiente:

Figura 2. Primer Congreso Solvay, Bruselas, 1911. Mientras, muy concentrados, Marie Curie y Henri Poincaré charlan y Jean Perrin lee un libro, el resto posa para la foto, entre los cuales se encuentran Max Planck, Hendrick Lorentz y el segundo más joven de todos/as los/as presentes, Albert Einstein.

Conjetura de Poincaré. Toda 3-variedad compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera.

Entender el significado preciso de esta corta sentencia lleva años de estudios avanzados. En cuanto a la demostración presentada por Perelman, ya estaríamos hablando de al menos un año de estudio para la gran mayoría de los/as matemáticos/as profesionales. A continuación, se dará una definición matemáticamente rigurosa de cada una de las palabras en la conjetura, incluyendo esa parte igualmente importante de la Matemática que es la intuición. Con suerte, esto nos dará una idea más clara acerca de qué es eso que le pareció interesante preguntar a Henri Poincaré.

6.1. Espacios topológicos. Sea X un conjunto cualquiera. Una *topología* en X es una colección de subconjuntos de X llamados *abiertos* tal que el vacío y X son abiertos, la unión arbitraria de abiertos es abierta y la intersección finita de abiertos es abierta. X adquiere el rango de *espacio topológico* cuando se lo provee de una topología. Es una definición un tanto cruda, el nivel de abstracción es abrumante, notemos que X podría ser desde un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ al espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, desde el conjunto de todos los estados del sistema solar a un conjunto de pájaros. Quizá una manera más natural de ver a una topología es definiendo la convergencia de sucesiones, donde los abiertos reemplazan al bien conocido $\epsilon > 0$ que usamos en $\mathbb{R}^k$: una sucesión $x_n \in X$ *converge* a $x \in X$ si para todo abierto U que contiene a x existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Notar que si por ejemplo el semi-intervalo $(-1, 0]$ es abierto, entonces la sucesión $\frac{1}{n}$ no converge a 0 en esa topología de $\mathbb{R}$.

Observación 6.1. *Cuando la topología satisface una propiedad llamada N_1 (i.e., todo punto admite una base numerable de entornos), la cual asumiremos de ahora en más, vale la recíproca: tener una noción de convergencia de sucesiones es equivalente a tener una topología. Las variedades y los espacios métricos son N_1.*

Los abiertos también pueden usarse para reemplazar el famosísimo $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ en la definición de continuidad de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y obtener así uno de los conceptos más importantes de la Matemática: una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es *continua* en $x \in X$ si para todo abierto V que contiene a $f(x)$ existe un abierto U que contiene a x tal que $f(U) \subset V$. No es difícil ver que f es continua en x si y sólo si respeta la convergencia de sucesiones, i.e., $f(x_n) \to f(x)$ para toda $x_n \to x$, y que f es continua en todo punto si y sólo si la preimagen de abiertos es siempre abierta.

6.2. Homeomorfismo. Ya estamos en condiciones de definir una de las palabras que aparecen en la Conjetura de Poincaré. Dos espacios topológicos X e Y se dicen *homeomorfos* (o topológicamente equivalentes) si existe una función biyectiva y continua $f : X \to Y$ cuya inversa es también continua. Dos espacios homeomorfos pueden ser muy diferentes, pueden provenir de distantes áreas de la Matemática o la Matemática aplicada, pero son indistinguibles desde el punto de vista de la Topología. Una posible visualización de un homeomorfismo es como una deformación continua, como si los espacios fueran de plastilina, es así como una pelota de fútbol es homeomorfa a una guinda de rugby, y una dona (o cámara de auto o salvavidas) es homeomorfa a una taza.

6.3. 3-variedad. Es un espacio topológico X en el cual un/a observador/a, situado/a en cualquier punto de X, cree que está en $\mathbb{R}^3$, es decir, el espacio luce localmente como un abierto usual de $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, para todo $x \in X$ existe un abierto que contiene a x y es homeomorfo a un abierto usual de $\mathbb{R}^3$. El concepto de k-variedad se define análogamente considerando $\mathbb{R}^k$. Es así como una curva es una 1-variedad, una superficie es una 2-variedad, pero imaginarse una 3-variedad que no sea simplemente un abierto usual de $\mathbb{R}^3$ no parece tan fácil.

6.4. Compacidad. Un espacio topológico X se dice *compacto* si para todo cubrimiento de X por abiertos existe una cantidad finita de dichos abiertos que siguen cubriendo a X. Una consecuencia más intuitiva y fácil de demostrar de la compacidad es que toda sucesión admite una subsucesión convergente, i.e., se acumula en al menos un punto. La recíproca vale para espacios métricos, lo cual ya requiere de una prueba más elaborada. Según el Teorema de Heine-Borel, los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^k$ son precisamente los cerrados y acotados.

Menos precisamente, la compacidad sugiere que es un espacio finito en algún sentido, que se cierra. Si por ejemplo el universo en el que vivimos, que es una 3-variedad (al menos aparentemente), fuese compacto, cosa que parece tener chances de ser cierta según la Relatividad General, sería factible despegar en un cohete desde la Tierra y siguiendo siempre en línea recta durante la suficiente cantidad de tiempo arribar de regreso a nuestro planeta. No quedan dudas de que intentar visualizar una 3-variedad compacta, es decir los objetos en cuestión de la conjetura, genera algo de vértigo, es todo un desafío lograr hacerlo desde $\mathbb{R}^3$. Pero sigamos, que no falta mucho.

6.5. 3-esfera. Como definición formal podemos tomar, simplemente,

$$S^3 := \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^4,$$

y dotarla, naturalmente, de la topología determinada por todas las intersecciones de abiertos usuales de $\mathbb{R}^4$ con S^3. Visualizar la 3-esfera es otro cantar. Intentemos. ¿Cómo le explicamos a alguien que vivió toda su vida en un plano, qué es una pelota de fútbol, es decir, una 2-esfera? Una manera ingeniosa sería pedirle que dibuje un disco en su plano y que imagine que todo el borde del disco es un único punto. De forma análoga, un ser que vive en $\mathbb{R}^4$, donde es posible sacar un pájaro de una jaula cerrada sin tocar la jaula, nos puede ayudar a visualizar la 3-esfera. Nos indica que tomemos una bola de billar e imaginemos que toda su cáscara exterior está reducida y pegada en un único punto, que si caminamos dentro de la bola y llegamos a alguno de los puntos del borde, entonces tenemos la libertad de aparecer en cualquier otro punto del borde, y seguir.

La 3-esfera es claramente un ejemplo de 3-variedad. Además, se puede probar fácilmente que la 3-esfera es además compacta, aunque usando que el intervalo $[0,1]$ es compacto, lo cual lleva algo de trabajo demostrar.

6.6. Simple conexidad. Un espacio topológico es llamado *simplemente conexo* si es *conexo* (i.e., no es la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, o en el caso de variedades, todo par de puntos puede unirse con una curva continua) y toda curva cerrada puede deformarse continuamente en un punto. Más rigurosamente, para toda curva continua $\alpha : [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = \alpha(1) = x \in X$, existe una función continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que cada una de las curvas $\alpha_t(s) := F(s,t)$ va de x en x y se satisface que $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_1(s) \equiv x$, i.e., α_t es en definitiva una *curva continua de curvas continuas* uniendo α con la curva constante x. Es fácil convencerse de que la 2-esfera y la 3-esfera son simplemente conexas.

Una 3-variedad compacta distinta de la 3-esfera es el 3-toro $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, que se puede visualizar imaginando una habitación cúbica donde cada punto en alguna de las caras está identificado con el punto en idéntica posición en la cara opuesta, cual pantalla tridimensional de Pac-Man. En otras palabras, es el análogo tridimensional del 2-toro $T^2 = S^1 \times S^1$ (i.e., un círculo de círculos!). La diferencia topológica del 3-toro con la 3-esfera es que el 3-toro no es simplemente conexo, es decir, que contiene curvas cerradas que no pueden ser deformadas continuamente en un punto, que se traban cuando queremos colapsarlas. Es la misma diferencia que hay entre una dona y una pelota de fútbol.

Otra 3-variedad compacta distinta de la 3-esfera, y del 3-toro, es $X = S^1 \times S^2$. Una forma muy divertida de visualizarla es como el espacio entre dos esferas concéntricas, identificando cada punto de una de las esferas con el proyectado sobre la otra usando el radio (i.e., un círculo de esferas!). Ese mismo segmento uniendo tales puntos, que es en realidad un círculo, es una curva continuamente indeformable a un punto, i.e., esta 3-variedad tampoco es simplemente conexa.

6.7. Conclusión. Ya tenemos una idea, bastante rigurosa, de qué significa cada palabra en el enunciado de la Conjetura de Poincaré, vale la pena ahora leerla varias veces más. En resumen, y a grandes rasgos, lo que predecía la conjetura y ahora asegura el Teorema del gran Grigori Perelman, es que la 3-esfera es el único objeto compacto 3-dimensional donde toda curva cerrada puede deformarse en un punto sin cortarse. ¿Será nuestro universo una 3-esfera?

Agradecimientos. Estoy muy agradecido con las siguientes personas por sus invaluables comentarios y sugerencias sobre una primera versión de este artículo: Leandro Cagliero, Marco Farinati, Ramiro Lafuente, Emilio Lauret, Camilla Molina, Juan Pablo Rossetti, David Webb y Cynthia Will.

Bibliografía

B. Kleiner and J. Lott. (2008). Notes on Perelman's papers. *Geom. Topol.*, *12*, 2587–2855.

G. Perelman. (2002). The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. Descargado de `arXiv:math.DG/0211159`

G. Perelman. (2003a). Ricci flow with surgery on three-manifolds. Descargado de `arXiv:math.DG/0303109`

G. Perelman. (2003b). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three manifolds. Descargado de arXiv:math.DG/0307245

H-D Cao and X-P Zhu. (2006). A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow. *Asian J. Math.*, *10*, 165-492.

J. Morgan and G. Tian. (2007). Ricci flow and the Poincaré conjecture. *Clay Math. Monographs 3, Amer. Math. Soc.*.

Jorge Lauret
FaMAF, UNC / CIEM, CONICET
(✉) *jorgelauret@unc.edu.ar*

Recibido: *7 de agosto de 2021*.
Aceptado: *15 de octubre de 2021*.
Publicado en línea: *14 de diciembre de 2021*.