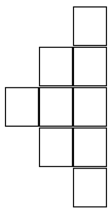
Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

En este número, tanto los problemas como las sucesiones, plantean la pregunta de si cierta construcción es posible o no. Están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

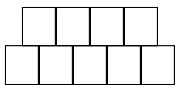
Problema 1. *Cuadrados perfectos con los primeros 9 números.*

¿Es posible ubicar los números del 1 al 9, uno en cada casillero del dibujo, de modo que en cada fila (horizontal) el número que se lea sea un cuadrado perfecto?



Problema 2. *Pirámide con los números del 1 al 9.*

¿Se pueden colocar los nueve números naturales del 1 al 9, uno en cada casillero, de modo que cada número en un casillero de arriba sea igual a la suma de los dos que tiene debajo?



Problema 3. *Cerámicos.* Un fabricante de cerámicos prueba colores hasta dar con el que le gusta. Le encarga a su empleado que haga unos 200 cerámicos como el que le da de muestra. El empleado los hace cuidadosamente iguales a pesar de lo extraño del encargo, puesto que la muestra era un cerámico roto, con forma de cuadrilátero, pero no cuadrado ni rectangular. Cuando el fabricante ve los cerámicos confeccionados, comprende el malentendido (él los quería cuadrados) y cree que no van a servir. Sin embargo, una profesora de matemática que se encontraba en el taller les dice que nos los tiren, que sirven, y ni siquiera habrá que hacerles cortes para embaldosar con un encastre perfecto.

¿Tiene razón la profesora? ¿Es posible embaldosar perfectamente un piso con cerámicos todos iguales con forma de cuadrilátero?

¡Sucesiones al toque!

- $\{a\}$: $\quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ =\ 100$
  ¿Es posible colocar tres signos más o menos entre los números para que arriba quede una igualdad?

- $\{b_n\}$: 1, 2, $,\ldots$
  La sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y crece cada vez más, es decir, $b_{n+1} - b_n > b_n - b_{n-1}$, para todo n.
  ¿Existe una sucesión así con sus primeros 99 términos menores que 5 mil?

- $\{c_n\}$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 $,\ldots$ la sucesión de Fibonacci. ¿Es posible que haya algún término de la sucesión (aparte de los dos primeros) que sea un cuadrado perfecto?
  ¿Hay algún término de la sucesión de Fibonacci que corresponda a un año del siglo XXI?

- $\{d_n\}$: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, $,\ldots$
  En esta sucesión está faltando un número ¿puedes decir cuál es?

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* Sí. Hay esencialmente una única forma (salvo permutación entre las filas que tienen uno o dos dígitos, respectivamente):

		1
	2	5
7	8	4
	3	6
		9

Una forma de resolverlo es analizando cuáles son los cuadrados perfectos, primero de un solo dígito: 1, 4 y 9; luego de dos dígitos: 16, 25, 36, 49, 64 y 81; y en estos se ve que no aparece el dígito 7, por lo que debería aparecer en el cuadrado de tres dígitos. Notamos que hay muy poquitos de estos, solo 576, 729 y 784. Un análisis rápido muestra que los dos primeros no son compatibles con las otras posibles filas, mientras que el 784 sí lo es.

Solución 2. *Respuesta:* Sí, se puede. Por ejemplo, así:

8	9	7	5	
2	6	3	4	1

Se pueden hacer algunas observaciones que simplifican la búsqueda *a mano* de una solución. Por ejemplo, el 1 y el 2 deben estar abajo. El 9 debe estar arriba y también el 8 (esto último requiere descartar el caso donde el 8 está en un extremo inferior, a su lado está el 1 y arriba de ellos el 9). También se pueden plantear algunas ecuaciones: si llamamos a_i, $1 \leq i \leq 5$, a los números de abajo y b_j, $1 \leq j \leq 4$, a los de arriba, entonces se cumple $a_1 + 2(a_2 + a_3 + a_4) + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. Por supuesto valen $b_j = a_j + a_{j+1}$, y por lo tanto $b_{j+1} - b_j = a_{j+1} - a_{j-1}$, etc.

¿Hay otras soluciones?

Solución 3. *Respuesta:* Sí, es posible, y la manera es pensar en la simetría central con respecto al punto medio de un lado del cuadrilátero. Entonces se ponen dos cerámicos juntos que sean simétricos con respecto a dicho punto y se obtienen así hexágonos cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes, que se llaman *hexaparalelogramos* y con ellos se puede embaldosar, usando solo traslaciones, como bien lo muestra el artículo en este mismo número de la Revista sobre el interesante y bello tema de los *tilings* o embaldosamientos del plano.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $\{a\}$: Sí, es posible,
  con dos signos menos y un signo más puestos así:
  $1\,2\,3 - 4\,5 - 6\,7 + 8\,9 = 100\,,$ que es una igualdad.

- $\{b_n\}$: sí, existe una sucesión así,
  por poco margen, pero tomemos la menor posible:
  1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, $,\ldots,$ va creciendo lo mínimo necesario para cumplir con la consigna, es decir que crece 1 del primer al segundo término, luego 2 del segundo al tercero, luego 3, etc. Así, el término n-ésimo c_n resulta ser $c_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$. Si planteamos $c_n < 5000$ vemos que $c_{99} = 4951$, por lo que se cumple.

- $\{c_n\}$: Sí, hay un cuadrdado perfecto, el 144,
  que es justo el siguiente término de la sucesión. Es el único que se conoce.
  Por otra parte, no hay números de Fibonacci entre 2000 y 2100, pues un término es el 1597 y el siguiente es 2584.

- $\{d_n\}$: Falta el 43.
  Es el único primo menor que 100 que no aparece.

Viene de la página anterior.