Curiosidades del 2022

Todos los números tienen alguna curiosidad, aquí compartimos algunas del 2022.

Comenzamos con algunas curiosidades generales del 2022 (chequearlas). Los divisores propios de 2022 son 1, 2, 3, 6, 337, 674 y 1011 y su suma da 2034 que es más grande que 2022 y, por lo tanto, 2022 es un número *abundante*. Notar que $337 + 674 = 1011$ y que $337 + 674 + 1011 = 2022$. También es suma de dos números primos consecutivos

$$2022 = 1009 + 1013.$$

Por otra parte, 2022 es un *número de Harshad* (es un número n tal que la suma de sus dígitos divide a n); en efecto,

$$2 + 0 + 2 + 2 = 6 \qquad \text{y} \qquad 2022 = 6 \times 337.$$

No sólo esto, sino que los siguiente 3 años 2023, 2024 y 2025 también son números de Harshad. Para que se vuelva a dar el hecho de que haya 4 años consecutivos que sean números de Harshad deberíamos esperar hasta el año 3030.

Además, el reverso de 2022 es 2202 y sus cuadrados

$$2022^2 = 4088484 \qquad \text{y} \qquad 2202^2 = 4848804$$

¡también son reversos! El siguiente año con la propiedad de que el cuadrado del reverso es el reverso del cuadrado es 2101.

Expresiones con los dígitos

2022 puede ser escrito de muchas formas curiosas, por ejemplo:

- Con las operaciones elementales (incluyendo la potenciación) tanto en forma ascendente como descendente con los diez dígitos:

$$\begin{aligned} 2022 &= -(1+2) + 3^4 \times (-5+6+7+8+9) \\ &= -1 \times 2 + (3 + 4 \times 5) \times (6 - 7 + 89) \\ &= 1234 + 5 - 6 + 789 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2022 &= (9 + 8 \times (7 \times 6 - 5 + 4)) \times (3 + 2 + 1) \\ &= -9 + 87 + \tfrac{6^5}{4} \times \tfrac{3}{2+1} \\ &= 9 - 8 - 7 + 6 \times (-5 + (4+3)^{2+1}) \\ &= 9 - 876 + (5+4) \times 321. \end{aligned}$$

Se puede hacer lo mismo permitiendo también el 10 y existen expresiones de este tipo usando factoriales o raíces cuadradas o ambas ¿te animás a encontrar alguna?

- Usando sólo uno cualquiera de los dígitos:

$$\begin{aligned} 2022 &= (1+1)\times(11+(11-1)^{1+1+1}) \\ &= 2^{\frac{22}{2}} - 22 - 2 - 2 \\ &= 3+3+(3+3)\times(333+3) \\ &= 4+(4+4)\times(4^4-4)+\tfrac{4+4}{4} \\ &= (5+\tfrac{5}{5})\times(5\times 5+\tfrac{5^5-5}{5+5}) \\ &= 6+6\times 6+66\times(6\times 6-6) \\ &= (7-\tfrac{7}{7})\times(7\times 7\times 7-7+\tfrac{7}{7}) \\ &= 88\times(8+8+8)-88-\tfrac{8+8}{8} \\ &= \tfrac{9+9}{9}\times(999+\tfrac{99+9}{9})\,. \end{aligned}$$

- La misma representación (decimal) usando un único dígito a:

$$2022 = \frac{(aaaa - aaa + aa)\times(a+a)}{a\times a} = \frac{(aaaaa + aa - a)\times(a+a)}{a\times aa}$$

para cualquier $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (¿por qué funciona?).

- Usando los mismos dígitos en bases y potencias:

$$2022 = 1^3 + 3^6 - 4^1 + 6^4 = 1^2 - 2^3 + 3^6 + 4^1 + 6^4$$

y usando además dígitos consecutivos en las bases:

$$\begin{aligned} 2022 &= 0^4 + 1^7 + 2^1 + 3^6 + 4^5 + 5^0 + 6^3 + 7^2 \\ &= 0^7 - 1^8 - 2^4 + 3^6 + 4^5 + 5^1 + 6^3 + 7^0 + 8^2 \\ &= 0^6 + 1^9 + 2^8 - 3^7 + 4^4 + 5^5 + 6^0 + 7^2 + 8^3 + 9^1\,. \end{aligned}$$

- Como sumas (de potencias) distintas pero con los dígitos involucrados en el mismo orden:

$$2022 = 1^9 + 44^2 + 72^0 + 84^1 = 19 + 442 + 720 + 841.$$

- Como sumas que son iguales al reflejarlas como espejos de arriba-a-abajo o de izquierda a derecha (y recíprocamente):

8+1+1+1001+1001+1+1+8

1+1+81+18+88+818+8+818+88+81+18+1+1

Similarmente, usando el tipo de números de las viejas calculadoras identico resultado se puede obtener usando 0's, 1's, 2's y 5's

$$2022 = 2 + 1 + 5 + 1 + 1001 + 1 + 1 + 1001 + 1 + 5 + 1 + 2.$$

Suma de cuadrados y ternas Pitagóricas

- 2022 se puede escribir de 5 formas como suma de 3 cuadrados (sin importar el orden de las sumas y sin usar números negativos)

$$\begin{aligned} 2022 &= 2^2 + 13^2 + 43^2 \\ &= 5^2 + 29^2 + 34^2 \\ &= 7^2 + 23^2 + 38^2 \\ &= 11^2 + 26^2 + 35^2 \\ &= 13^2 + 22^2 + 37^2, \end{aligned}$$

de 15 formas como suma de 4 cuadrados

$$\begin{aligned} 2022 &= 1^2 + 2^2 + 9^2 + 44^2 = 1^2 + 4^2 + 18^2 + 41^2 = 1^2 + 4^2 + 22^2 + 39^2 \\ &= 1^2 + 6^2 + 7^2 + 44^2 = 1^2 + 6^2 + 31^2 + 32^2 = 1^2 + 7^2 + 26^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 9^2 + 28^2 + 34^2 = 1^2 + 10^2 + 20^2 + 39^2 = 1^2 + 10^2 + 25^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 12^2 + 14^2 + 41^2 = 1^2 + 14^2 + 15^2 + 40^2 = 1^2 + 14^2 + 23^2 + 36^2 \\ &= 1^2 + 16^2 + 26^2 + 33^2 = 1^2 + 17^2 + 24^2 + 34^2 = 1^2 + 22^2 + 24^2 + 31^2 \end{aligned}$$

y de una sola forma como suma de 5 cuadrados

$$2022 = 1^2 + 2^2 + 21^2 + 26^2 + 30^2.$$

- 2022 satisface las siguientes ternas pitagóricas: esta

$$1050^2 + 1728^2 = 2022^2$$

donde la hipotenusa mide 2022 y estas

$$\begin{aligned} 2022^2 + 2696^2 &= 3370^2 \\ 2022^2 + 340704^2 &= 340710^2 \\ 2022^2 + 113560^2 &= 113578^2 \\ 2022^2 + 1022120^2 &= 1022122^2 \end{aligned}$$

donde el cateto más corto mide 2022.

Matrices

- Hay 2022 matrices 3×3 con coeficientes $0, 1, 2$ de determinante 1. Es decir,

$$\#\big\{A \in M_{3\times 3}(\{0,1,2\}) : det(A) = 1\big\} = 2022.$$

- Hay 2022 matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes enteros positivos que suman 28 y cuyas filas y columnas suman lo mismo (notar que n solo puede ser $1, 2, 4, 7$). Por ejemplo:

$$(28), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 27 \\ 27 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 14 \end{smallmatrix}\right), \quad \begin{pmatrix} 4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3&2&1&1\\1&3&2&1\\1&1&3&2\\2&1&1&3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.$$

Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico de tamaño n es un arreglo de $n \times n$ donde se colocan los números $1, 2, \ldots, n^2$, de modo tal que todas las filas y columnas y las 2 diagonales principales tienen la misma suma. Más generalmente podemos usar n^2 números distintos consecutivos, pero no necesariamente comenzando desde el 1 sino desde cualquier $k \in \mathbb{N}$. Si además el resto de diagonales rotas (o sea las que se continúan por los bordes del cuadrado) poseen la misma suma, el cuadrado mágico se dice *pandiagonal*.

A continuación damos un cuadrado mágico pandiagonal de 12×12 cuya suma es 2022, formado por 9 bloques que también son cuadrados mágicos pandiagonales de 4×4 de igual suma (¡controlar!).

151	204	97	222	152	203	98	221	153	202	99	220
114	205	168	187	113	206	167	188	112	207	166	189
240	115	186	133	239	116	185	134	238	117	184	135
169	150	223	132	170	149	224	131	171	148	225	130
154	201	100	219	155	200	101	218	156	199	102	217
111	208	165	190	110	209	164	191	109	210	163	192
237	118	183	136	236	119	182	137	235	120	181	138
172	147	226	129	173	146	227	128	174	145	228	127
157	198	103	216	158	197	104	215	159	196	105	214
108	211	162	193	107	212	161	194	106	213	160	195
234	121	180	139	233	122	179	140	232	123	178	141
175	144	229	126	176	143	230	125	177	142	231	124

Por ejemplo, la diagonal principal del primer bloque (arriba a la izquierda) suma $151 + 205 + 186 + 132 = 774$, al igual que la diagonal rota justo debajo de ésta: $114 + 115 + 223 + 222 = 774$.

Muchas de las curiosidades de este artículo han sido obtenidas del artículo *Mathematical Beauty of 2022* de Inder Taneja disponible en https://inderjtaneja.com.