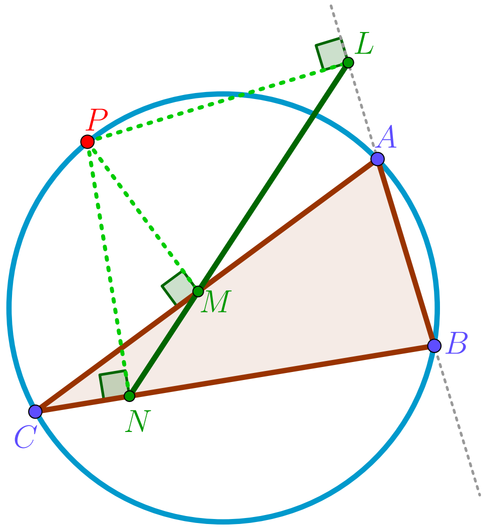
¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

dado un triángulo ABC y cualquier punto P en la circunferencia que los circunscribe, los 3 puntos más cercanos a P en la líneas AB, AC y BC son colineales?

En efecto, este es el *Teorema de Simson* (aparentemente mal atribuido a él) y la recta que une a dichos puntos se llama la recta de Simson.

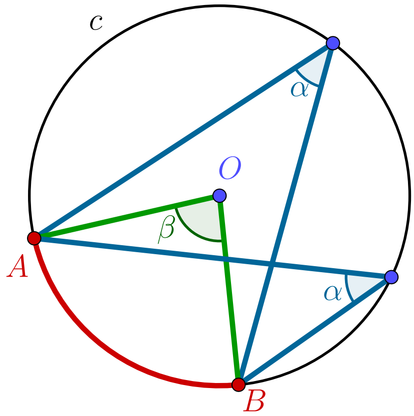


Como suele pasar, existen varias pruebas de este resultado. Veamos una demostración sintética (es decir, geométrica) del teorema, que utiliza el *Teorema del arco capaz* y algunas de sus consecuencias.

Sean L, M y N los puntos pedales de las rectas respecto de P, es decir, los pies de las perpendiculares desde P a los rectas AB, AC y BC que contienen a los lados del triángulo.

La idea es muy sencilla: para ver que L, M y N son colineales, mostraremos que los ángulos $\angle CMN$ y $\angle AML$ son congruentes.

Comencemos recordando el Teorema del arco capaz y algunas de sus consecuencias.

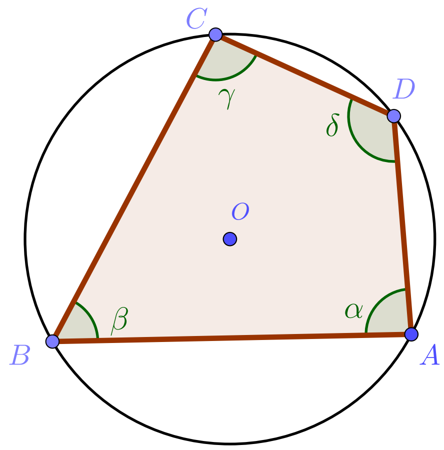


(1) **Teorema.** Dada una circunferencia c, todo ángulo α inscripto en c que subtiende un arco dado $\overset{\frown}{AB}$ es congruente a la mitad del ángulo central β correspondiente al arco $\overset{\frown}{AB}$, es decir $\beta = 2\alpha$.

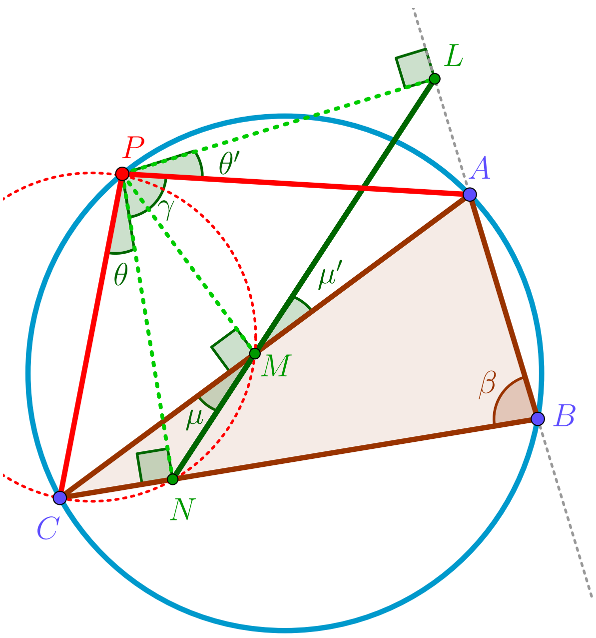
(2) En particular, si α está inscripto en c, entonces α es recto si y solo si subtiende media circunferencia. Esto es lo mismo que decir que dado un triángulo, uno de los ángulos es recto si y solo si el lado opuesto es el diámetro de la circunferencia que circunscribe al triángulo.

Una consecuencia de este teorema es el siguiente resultado:

(3) Cada uno de los pares de ángulos opuestos de un cuadrilátero inscripto en un círculo suman 2 rectos, es decir $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$.



Los cuadriláteros inscriptos en un círculo reciben el nombre de cuadriláteros *cíclicos* y tienen propiedades muy interesantes. El lector curioso sabrá buscarlas por su cuenta.



Veamos la demostración del Teorema de Simson, recordemos que debemos demostrar que $\mu = \mu'$.

Primero, notemos que si P fuera uno de los vértices del triángulo el resultado resulta trivial (¿por qué?). Luego, podemos suponer que $P \neq A, B, C$. Por el resultado (3), los lados opuestos del cuadrilátero $PABC$ suman 2 rectos, de donde

$$\beta + (\theta + \gamma) = \pi.$$

Ahora, como los ángulos de cualquier cuadrilátero suman 2π y los ángulos $\angle PLB$ y $\angle PNB$ son rectos por construcción, mirando el cuadrilátero $BNPL$, obtenemos que

$$\beta + (\theta' + \gamma) = \pi.$$

De estas dos igualdades, deducimos que $\theta = \theta'$. Nuestro objetivo ahora es demostrar que $\theta = \mu$ y $\theta' = \mu'$.

Los ángulos $\angle PMC$ y $\angle PNC$ son rectos por construcción. Luego, por el resultado (2), obtenemos que los puntos P, C, M y N están en una misma circunferencia (de diámetro PC) que llamamos c (es decir que $PMNC$ es un cuadrilátero cíclico). Luego, como θ y μ subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{CN}$

en c obtenemos $\theta = \mu$. Del mismo modo, pero usando el cuadrilátero cíclico $PLAM$ sale que $\theta' = \mu'$.

De todo lo dicho, se deduce que $\mu = \mu'$ como queríamos demostrar.

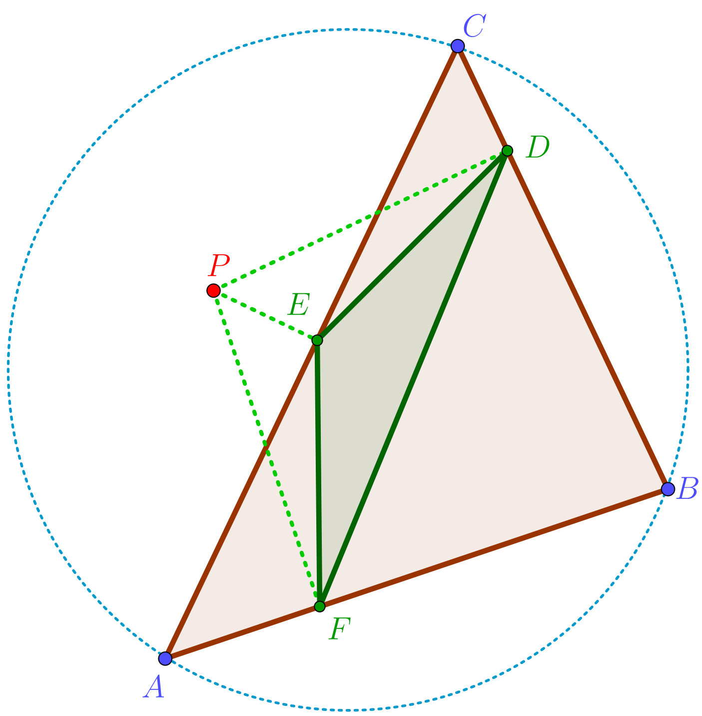
Comentarios finales: para concluir, dejamos unos comentarios sobre el teorema en cuestión que nos parecen sumamente interesantes.

(a) Es verdadera la recíproca del Teorema de Simson. Es decir, si los 3 puntos más cercanos a un punto P en 3 rectas son colineales y ningún par de éstas son colineales, entonces P yace en la circunsferencia que inscribe al triángulo formado por las 3 rectas.

(b) Segundo, que dado un triángulo culaquiera $T = \triangle ABC$ y un punto P del plano, uno puede construir el ***triángulo pedal***

$$\text{Pedal}(T, P) = \triangle DEF$$

asociado a T y P donde D, E, F son los pies de las perpendiculares a los lados de T por P. El Teorema de Simson y su recíproca dicen simplemente que el triángulo pedal $\text{Pedal}(T, P)$ degenera en una recta si y solo si el punto P yace en la circunferencia que inscribe a T.



(c) El resultado solo vale en la geometría Euclídea, ya que hace uso (aunque enmascaradamente) del postulado de las paralelas. Por ejemplo, el lector puede intentar algunos triángulos en la esfera o en el plano hiperbólico y ver qué pasa.

Robert Simson (14/10/1687 – 1/10/1768) fue un matemático escocés, profesor de matemáticas en la Universidad de Glasgow. Sus contribuciones principales fueron las recopilaciones y traducciones al inglés de 'Los Elementos' de Euclides y reconstrucciones de trabajos perdidos de Euclides y Apolonio. Algunos estudios sugieren que en realidad el teorema en cuestión se debe a William Wallace (23/9/1768 – 28/4/1843) matemático y astónomo escocés, inventor del eidógrafo (pantógrafo mejorado).