Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. *Tiempo para armar un rompecabezas.* Si te lleva una hora armar un rompecabezas de 100 piezas, ¿cuánto tiempo te llevará armar uno de 200 piezas?

En general: si lleva x horas armar un rompecabezas de N piezas, ¿cuántas horas llevará, aproximadamente, armar uno de $2N$ piezas?

[Aclaración: para precisar más matemáticamente el problema, pensemos que en lugar de ser un rompecabezas de 100 piezas, es uno de miles de piezas en el que solo te falta colocar 100 piezas en 100 huequitos que quedaron, y que ni los colores ni las formas te ayudan, sino que hay que "ir probando" de a una pieza hasta dar con la que encaja perfectamente.

La pregunta sería: si te llevó una hora colocar las últimas 100 piezas de este rompecabezas, ¿cuánto tiempo, aproximadamente, te hubiera llevado colocar las últimas 200 piezas?]

Problema 2. *Jugando al ping pong.* Tres amigos pasan un buen rato jugando al ping pong. Se enfrentan dos y cuando uno pierde, le deja su lugar al que está afuera, y así sucesivamente, juegan muchos partidos.

Cuando terminan, se dan cuenta que uno jugó 17 partidos, otro 15 y otro 10. ¿Quién perdió el 6to partido?

Problema 3. *Suma de diferencias.* A los números $1, 2, 3, \dots, 2n$, los partimos en dos conjuntos, digamos A y B, de n números cada uno y vamos a sumar las diferencias (en valor absoluto) entre el número menor de A y el mayor de B, con la diferencia entre el 2do menor de A y el 2do mayor de B y así sucesivamente hasta la diferencia entre el mayor de A y el menor de B. Calcular cuánto da esta suma y justificar porqué.

En símbolos, si ordenamos A de menor a mayor (es decir, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$) y ordenamos B de mayor a menor (es decir, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$), calcular

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|,$$

con demostración.

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* 4 horas. Y en general: $4x$ horas.

En el modelo propuesto en la Aclaración, el tiempo aproximado que lleva colocar la primera de N piezas varía entre 1, si justo acertamos, y N, si fuimos probando con todas y la última era la correcta (en unidades de tiempo). Esto nos da un promedio de $\frac{1+N}{2}$ para la primera de N piezas. Para llenar el 2do hueco, hacemos lo mismo y nos da un promedio de $\frac{1+(N-1)}{2}$. Así seguimos hasta que la última pieza nos lleva solo 1 tiempo. Al sumar queda:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1+k}{2} = \frac{1}{2}\frac{(N+3)N}{2} = \frac{1}{4}(N^2+3N).$$

Haciendo una fuerte simplificación podemos pensar que el crecimiento del tiempo en función de N, el número de piezas, es cuadrático en N. Por lo tanto, colocar 200 piezas demoraría, aproximadamente, $2^2 = 4$ horas.

En general, armar algo de $2N$ piezas llevará aproximadamente 4 veces el tiempo que lleva armar algo de N piezas.

Solución 2. *Respuesta:* Perdió el 6to partido el amigo que jugó solo 10 partidos.

Si contamos, hubo $\frac{17+15+10}{2} = \frac{42}{2} = 21$ partidos. Un jugador nunca queda afuera en dos partidos consecutivos, de modo que el que solo jugó 10 partidos, jugó necesariamente el 2do partido, el 4to, el 6to, etc, hasta el vigésimo partido, es decir, todos los partidos pares y ninguno impar. Entonces perdió los 10 partidos que jugó, por lo tanto él perdió el 6to partido.

Solución 3. *Respuesta:* Da $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

Esto es así porque si, por ejemplo, $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $B = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, entonces $|a_1 - b_1| = |1 - 2n| = 2n - 1$, $|a_2 - b_2| = |2 - (2n-1)| = 2n - 3$,…,$|a_n - b_n| = |n - (n+1)| = 1$.

Lo notable ahora es que la suma da siempre igual, sin importar cómo sean los conjuntos A y B. Para ver esto, supongamos que tenemos $b_j = a_i + 1$ y que queremos intercambiar estos dos elementos de conjuntos, es decir, que el b_j pase a A y el a_i pase a B. Veamos que la suma del enunciado no se modifica al hacer este intercambio. Notemos que los únicos valores que cambiarían en la suma serían $|a_i - b_i|$ y $|a_j - b_j|$.

Hay 3 casos: si $i = j$, entonces en lugar de tener dos términos donde hay cambios, habría uno solo, el $|a_i - b_i|$, que por tener valor absoluto, no cambiaría.

Si $i < j$, entonces $|a_i - b_i|$ baja uno, pues el nuevo a_i es ahora el viejo a_i más uno, mientras que b_i permanece igual y es mayor a estos. Pero el término $|a_j - b_j|$ sube uno pues el nuevo b_j es ahora menor por uno al viejo b_j y se alejó un lugar de a_j, que es mayor. Por lo tanto, el cambio se compensa y la suma total permanece igual.

Si $i > n + 1 - j$, sucede algo similar, pues $|a_i - b_i|$ sube uno mientras que $|a_j - b_j|$ baja uno.

Con esto, queda demostrada la invariancia de la suma del enunciado, pues se puede lograr armar cualquier par de conjuntos A y B a partir del ejemplo y una sucesión de intercambios como el analizado entre a_i y b_j contiguos.

Vale la pena mencionar que hay diversas demostraciones de esta invariancia.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 2, 6, 15, 31, 56, 92, 141, 205, 286 , . . .
- $\{b_n\}$: 1, 10, 12, 21, 100, 102, 111, 120, 122, 201, 210, 212, 221, 1000, 1002, 1011, 1020, 1022 , . . .
- $\{c_n\}$: 1, 5, 14, 33, 72, 151, 310, 629, 1268, 2547, 5106, 10225, 20464, 40943, 81902, 163821 , . . .
- $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 3, 7, 16, 65, 321, 4546, 107587, 20773703, 11595736272 , . . .

[Ayuda para $\{d_n\}$: cada término tiene en cuenta los dos términos anteriores.]

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 386$.
  $a_{n+1} = a_n + n^2$.

- $b_{19} = 1101$.
  Son los números impares escritos en base 3. O lo mismo, los números ordenados, salteados, usando solo los dígitos 0, 1 y 2.

- $c_{17} = 327660$.
  $c_n = 2c_{n-1} + (n+1)$. También $c_{n+2} = 3c_{n+1} - 2c_n + 1$.

- $d_{13} = 431558332068481$.
  $d_{n+1} = d_{n-1}^2 + d_n$.

Viene de la página anterior.