Sección de Problemas

☞ *por Juan Pablo Rossetti*
con la colaboración de Mateo Carranza Velez

Los siguientes problemas están pensados para un público amplio. Las soluciones se encuentran en la página siguiente.

Problema 1. (*Platos redondos en mesa cuadrada.*) En un bar con mesas cuadradas, dos mozos ponen platos redondos sin superponerse, ni sobresalir sobre una mesa. Se les ocurre un juego: el primer mozo debe poner un plato, el segundo poner otro, y así seguir alternadamente, hasta que alguno de los dos ya no pueda poner un nuevo plato sin superponerse ni sobresalir de la mesa.

Hay uno de los dos mozos que tiene una estrategia ganadora. Decir cuál de los dos es y explicar porqué.

Pregunta adicional: ¿Sirve la estrategia ganadora propuesta si las mesas fueran enormes? Por ejemplo, tan grande como toda la manzana (cuadrada) donde se encuentar el bar. ¿Hay una estrategia ganadora si las mesas fueran rectangulares?

Problema 2. (*Distribuir números cuyas sumas dan primos.*). Queremos distribuir los números $1, 2, \ldots, n$, alrededor de una circunferencia de forma que la suma de cada par de números vecinos sea un número primo. ¿Es posible hacerlo para $n = 8$? ¿Para $n = 9$? ¿Para $n = 10$? ¿Para $n = 2021$?

¿Se sabrá la respuesta para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ejemplo. Si $n=6$, se puede, pues $(1, 6, 5, 2, 3, 4)$ forma los primos $7, 11, 7, 5, 7$ y 5.

Problema 3. (*Descifrando un número irracional*).

Hallar los primeros 2000 dígitos después de la coma del número $\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^{2000}$.

[Ayuda: a pesar de que se trata de un número irracional, que por lo tanto su desarrollo decimal no es periódico, en este caso, sí se pueden calcular las primeras cifras, por una razón particular. El $3\sqrt{7}$ es parecido a 8 y se puede trabajar con $8 - 3\sqrt{7}$]

SOLUCIONES

Solución 1. *Respuesta:* El primer mozo tiene una estrategia ganadora.

Es sorprendentemente simple: pone el primer plato en el centro de la mesa. Cuando el 2do mozo pone (si es que puede) un plato, entonces el 1er mozo pone otro en el lugar simétrico, es decir aplica una simetría central (con respecto al centro de la mesa) al plato que puso el 2do mozo y pone un plato en ese lugar. De esta manera, cada vez que el 2do mozo pueda poner un plato, el 1ero también podrá poner otro, en el lugar simétrico con respecto al centro de la mesa.

Solución 2. *Respuesta:* Para $n = 8$ se puede, por ejemplo poner $(4, 3, 8, 5, 2, 1, 6, 7)$ para $n = 10$ también, por ejemplo $(4, 3, 8, 5, 2, 1, 6, 7, 10, 9)$. En cambio para $n = 9$ no se puede, puesto que debería haber dos números impares juntos, que al sumarlos da un par distinto de 2, por lo tanto no es un primo. Esto mismo ocurre para cualquier n impar, no es posible.

Para n par, se sabe que siempre se puede para valores menores a cierta cota (como 10^{12}) y hay pruebas heurísticas y conjeturas que aseguran la validez para todo n par; siendo muy lindo el hecho que el problema involucra la *Conjetura de los 'primos gemelos´* y la *Conjetura de Goldbach*.

Vale la pena hacer notar que si se hace un grafo cuyos vértices son los números naturales de 1 a n y sus aristas las que unen dos números cuya suma es un primo, entonces el problema se traduce en hallar un *ciclo Hamiltoniano* en este grafo.

Solución 3. *Respuesta:* Son todos nueves.

Lo que sucede es que son parecidos los números 8 y $3\sqrt{7}$ y cuando a un número pequeño, menor que uno, se lo eleva a una potencia grande, se va haciendo muy chiquito, y tendrá sus primeros dígitos iguales a cero. Antes, hay que hacer varias manipulaciones algebraicas con $8 - 3\sqrt{7}$ para llegar al resultado. Veamos que

$(8 + 3\sqrt{7}) + (8 - 3\sqrt{7})$ es entero, luego $(8 + 3\sqrt{7})^2 + (8 - 3\sqrt{7})^2$ es entero, y

$(8 + 3\sqrt{7})^n + (8 - 3\sqrt{7})^n$ es entero

Para ver esto, usamos el Teorema del binomio (de Newton), que es la generalización de las fórmulas $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Tenemos que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

donde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ y lo único que necesitamos saber es que este número es entero.

$$(8+3\sqrt{7})^n + (8-3\sqrt{7})^n = \textstyle\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) 8^i(3\sqrt{7})^{n-i} + \textstyle\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) 8^i(-3\sqrt{7})^{n-i}$$

Los términos impares de esta sumas se cancelan y solo quedan los pares, en los que elevamos una raíz a una potencia par, por lo que esta suma da un número entero. Como

$$8 - 3\sqrt{7} < \frac{1}{10}, \quad \text{entonces} \quad (8-3\sqrt{7})^n < \frac{1}{10^n}.$$

Por lo tanto los primeros 2000 dígitos después de la coma de $(8-3\sqrt{7})^{2000}$ son ceros, y entonces los primeros 2000 dígitos después de la coma de $(8+3\sqrt{7})^{2000} =$ un entero $-(8-3\sqrt{7})^n$ son $999\ldots 99$.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones y por qué? ¿Te animás a encontrar más términos de estas sucesiones? ¿Y una fórmula general?

- $\{a_n\}$: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...

- $\{b_n\}$: 2, 5, 10, 17, 28, 41, 58, 77, 100, 129, 160, ...

- $\{c_n\}$: Usamos una notación abreviada: 1^9 denota nueve unos, etc.
  $1^9, 2, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 1, 2^{10}, 12^2, 3^8, 2, 1, 2^8, 3, 2^2, 3^8, 2, 3, 2, 3^7, 2, 3^2, 2, 3^6, 2, 3^6, 2, \ldots$
  $= 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, \ldots$

- $\{d_n\}$: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, ...

Podés encontrar las soluciones en la página siguiente.

Soluciones de ¡sucesiones al toque!

- $a_{11} = 39916800$.
  $a_n = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.
- $b_{12} = 197$.
  Suma de los primeros primos.
- $c_{160} = 3$.
  Cuenta la cantidad de dígitos distintos que tienen los números en la notación usual (decimal).
- $d_{20} = 1767263190$.
  números de Catalan: $\frac{1}{n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.

Viene de la página anterior.