Revista de Educación Matemática
Volumen 34, N° 3 (2019), páginas 7 – 25
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

Aportes para la Enseñanza de la Matemática

UNA EXPERIENCIA DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA: EL PROBLEMA DEL BEBEDERO

Mayra Muñoz Venegas, María Laura Santori y M. del Carmen Díaz de Quintana

Resumen. En este trabajo vamos a describir y analizar una actividad de modelización matemática realizada con alumnos del último año de una escuela secundaria de la ciudad de Neuquén, Argentina. El objetivo principal de esta actividad es ofrecer a los alumnos un espacio en el que puedan tener la experiencia de producir conocimiento matemático a partir de una cuestión inicial planteada en forma abierta, en este caso extra-matemática. Este tipo de actividades en donde la modelización matemática cobra un rol protagónico, proveen una visión integrada de la matemática y permiten reconstruir en el aula una parte esencial del "quehacer" de la disciplina.

Abstract. In this paper we will describe and analyze a mathematical modeling activity carried out with students from the last year of a secondary school in the city of Neuquén, Argentina. The main objective of this activity is to offer students a space in which they can have the experience of producing mathematical knowledge from an initial open question raised in an open form, in this case extra mathematical. This type of activities in which mathematical modeling takes a leading role, provide an integrated view of mathematics and allow to reconstruct in the classroom an essential part of the "task" of discipline.

§1. Introducción

Uno de los problemas más resonantes en la educación actual, en la escuela secundaria, es la *pérdida de sentido del estudio de la matemática*. Este fenómeno se manifiesta de múltiples maneras que van desde la falta de motivación de los alumnos para estudiar matemática hasta la invisibilidad de la matemática escolar en la sociedad (Fonseca, 2004); (Otero et al., 2013).

Palabras clave: Educación Matemática, Modelización, Escuela Secundaria.
Keywords: Mathematics Education, Modeling, Secondary School.

En la enseñanza actual predomina un modelo didáctico en el cual los estudiantes se han convertido en receptores de un discurso expositor del profesor, que tienen que repetir de manera automatizada. En la clase de matemática es muy común que el estudiante solo se limite a dar respuestas a preguntas que él no se ha planteado, y además estas respuestas suelen ser acotadas y sin demasiada complejidad. Por otro lado, muchos de los objetos que se estudian en la escuela actual, hace tiempo que han perdido su razón de ser como objeto de estudio para dicha institución. Ante la crisis del modelo mencionado y convencidos del poder que le otorga a cualquier grupo de estudiantes realizar una construcción colectiva del saber a partir de la problematización, es que proponemos esta actividad, cuyo objetivo principal es ofrecer a los estudiantes un espacio en el que puedan tener la experiencia de producir conocimiento matemático a partir de un proceso de modelización. Esta propuesta surge de la certeza que es posible "hacer matemática" en el aula, y que esto es mucho más que resolver problemas, como lo expresan (Segal & Giuliani, 2008):

> *También es encontrar buenas preguntas, buscar medios para responderlas, desarrollar nuevos métodos, conjeturar propiedades, validar soluciones, interactuar con otros miembros de la comunidad matemática de pertenencia, confrontar resultados, técnicas, validaciones. Teoremas y definiciones son a la vez productos y herramientas de todo este trabajo de construcción de conocimiento matemático. (p.7)*

Para integrar la actividad de modelización en la enseñanza matemática, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) propone un dispositivo denominado recorridos de estudio e investigación (REI) (Chevallard, 2004; Gascón, 2010; Otero et al., 2013), estructurado esencialmente para hacer posible una enseñanza funcional de las matemáticas y para posibilitar su enseñanza como una actividad de modelización.

§2. Marco teórico

Aspectos generales de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El marco teórico adoptado para el desarrollo y análisis de esta actividad es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2001, 2013; Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997). Para la TAD, la modelización no es únicamente un aspecto de las matemáticas sino que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. Como lo afirman (Chevallard et al., 1997):

> *Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad que se quiere estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en ese trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización matemática. (p. 51)*

Desde esta perspectiva, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas.

Por otra parte la TAD propone describir el hacer matemático en términos de organizaciones matemáticas relativamente estructuradas llamadas praxeologías (Chevallard, 1999). Estas entidades están compuestas por cuatro elementos distintivos que se articulan permitiendo emerger el saber como fruto de la actividad realizada. Es decir, hay un tipo de tarea o problema que se quiere realizar o resolver para la cual existe alguna técnica disponible en la Institución, que permite realizarla o resolver el citado problema de manera inteligible, explicable y validada por medio de una tecnología en el marco de una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos.

Según (Chevallard, 2013), los saberes son obras (u organizaciones matemáticas). Una obra tiene siempre una o varias razones de ser, que motivaron su creación y que motivan su empleo y manifiesta que el problema en la enseñanza de la matemática actual es debido a que la epistemología escolar dominante elimina las “razones de ser” de las obras que se proponen estudiar en una institución. Este fenómeno lo relaciona con otro al que denomina monumentalización del saber, caracterizado por presentar a los objetos de estudio como obras terminadas (monumentos), como objetos ya creados, que a lo sumo se pueden visitar.

La TAD propugna la necesidad de superar el paradigma escolar de la visita de las obras, por medio de un nuevo paradigma, el del *cuestionamiento del mundo*, centrado en la necesidad de aportar respuestas a cuestiones problemáticas que surgen en la vida en sociedad y que se necesitan abordar para mejorar tanto nuestra comprensión del mundo como las formas de vivir colectivamente. En este nuevo paradigma, el estudio de obras preestablecidas no desaparece pero sí queda condicionado a la necesidad de utilizarlas para resolver problemas y cuestionar el mundo que nos rodea.

A fin de avanzar hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo, en el marco de la TAD se propuso un nuevo dispositivo didáctico, los recorridos de estudio e investigación (REI), que integra la razón de ser de los saberes escolares en el corazón del proceso de estudio (Chevallard, 2013; Barquero, Bosch, & Gascón, 2011) y favorece el desarrollo de las condiciones que se requieren para hacer posible una actividad matemática funcional. Diversos trabajos dan muestra de la investigación realizada en este sentido (Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Licera, 2017; Lucas, 2015).

Un REI parte de una cuestión Q_0 "viva" para la comunidad de estudio, que guiará el trabajo durante todo el recorrido y oficiará de motor para la búsqueda de respuestas y nuevas cuestiones. Esta "cuestión generatriz" Q_0 debe ser considerada por la comunidad de estudio como una cuestión a resolver, en un sentido fuerte y debe ser lo suficientemente problematizadora para demandar la puesta en marcha de una verdadera investigación por parte de los estudiantes (Chevallard, 2001, 2013)).

La cuestión Q_0, junto con las diversas cuestiones que se derivarán de su estudio, van a ser en realidad el origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio. Esto no significa que Q_0 sea inmutable sino que, al contrario Q_0 evoluciona y se desarrolla a lo largo del proceso de estudio.

El proceso de modelización. Las actividades de modelización proveen una visión integrada de la matemática y permiten reconstruir en el aula una parte esencial del "quehacer" de la disciplina. Hay ciertos aspectos esenciales en un proceso de modelización que se desarrollarán de acuerdo a cuatro estadios (Bolea, 2003):

(1) Planteamiento de la situación problema y delimitación de las cuestiones a estudiar.
(2) Construcción del modelo, determinación de las variables, planteamiento de hipótesis, relaciones y formalización de dichas relaciones.
(3) Trabajo con el modelo para dar respuesta a las cuestiones planteadas.
(4) Interpretación de los resultados y planteamiento de nuevas cuestiones.

En todo el proceso, que acabamos de describir, los saberes no aparecen aislados, sino relacionados a través de una problemática, por lo tanto, la actividad de modelización permite realizar en el aula un trabajo análogo a la actividad científica, centrado en la producción matemática de los alumnos. Además, al requerir que los alumnos tomen decisiones sobre la pertinencia de los recursos que ponen en juego y se hagan responsables de sus resultados, validándolos y confrontándolos con sus pares, es decir, que realicen un trabajo de reflexión sobre los problemas le imprime a la clase de matemática un valor formativo que va más allá de la matemática.

Los momentos didácticos. La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos, esto es, dimensiones o *momentos* que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole.

La noción de *momento didáctico* fue introducida por (Chevallard, 1999) y se utiliza no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de *dimensión* de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos: *1) el momento del primer encuentro* con un determinado tipo de tareas; *2) el momento exploratorio* del tipo de tareas y la elaboración de una técnica; *3) el momento de construcción de un entorno tecnológico- teórico* (que explique y justifique las técnicas puestas en funcionamiento, así como que permita la construcción de nuevas técnicas); *4) el momento de trabajo de la técnica* (que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas técnicas); *5) el momento de la institucionalización* (que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida) y *6) el momento de la evaluación* de la praxeología construida. Ahora bien, la estructura del proceso de estudio no es lineal.

Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como sea necesario a lo largo del proceso de estudio, e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis momentos del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y existe una dinámica interna global que se manifiesta en el carácter invariante de ciertas relaciones entre dichos momentos.

§3. Metodología y desarrollo del taller

El diseño, desarrollo y análisis de esta actividad se realizó en el marco del proyecto de investigación titulado “La modelización matemática en la formación del profesorado”, financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina. El objetivo general de este proyecto de investigación es el de avanzar en la elaboración y difusión de nuevas propuestas didácticas, tanto para la enseñanza de la matemática como para la formación del profesorado, que permitan integrar la actividad de modelización y potenciar una enseñanza funcional de las matemáticas.

El taller fue pensado como una actividad de extensión del proyecto, para ser desarrollada con estudiantes del último año de la escuela secundaria. En él se aborda la resolución de un problema que surge de una situación real que los estudiantes deberán afrontar con los conocimientos que posean y crean convenientes. Para su desarrollo es primordial encontrar un modelo matemático que permita, a través de su análisis, dar respuesta a la cuestión planteada.

La cuestión generatriz que guió el recorrido realizado en el taller fue seleccionada del libro *La Modelización Matemática en el Aula. Posibilidades y Necesidades*, de Silvia Segal y Diana Giuliani (Segal & Giuliani, 2008) y rediseñada e implementada por integrantes el grupo de investigación. El problema consiste en buscar la manera de graduar una varilla que permita medir el nivel de agua en un bebedero correspondiente a un determinado volumen.

Relato de la experiencia. La experiencia del taller que desarrollamos en este trabajo se llevó a cabo con estudiantes que estaban cursando el último año (6º año) de la Escuela Provincial de Educación Técnica Nº 7 (EPET 7) de la ciudad de Neuquén. La elección del lugar para llevar a cabo el taller se debió a una solicitud realizada por una docente de Matemática de dicha institución al grupo de investigación.

Es importante destacar que debido a la modalidad de escuela técnica, durante el ciclo superior (5º y 6º año) los estudiantes no tienen ninguna materia específica de matemática. Ellos cursan su última materia con contenido matemático específico en 4º año, la materia se denomina Análisis Matemático.

La docente que nos propuso realizar el taller en la EPET 7 es Profesora en Matemática y es docente de esta institución en 1º y 3° año. Su interés estaba puesto en poder brindar a los estudiantes del último año un espacio de encuentro con miembros de la comunidad Universitaria que ayudara, de alguna manera, a retomar los contenidos matemáticos estudiados en años anteriores y a la vez sirviera de incentivo a los estudiantes para seguir estudios universitarios particularmente relacionados con las ciencias exactas, ya que muchos de ellos sentían temor e inseguridad de tomar esa decisión.

La propuesta del taller realizada desde el proyecto de investigación fue aceptada por las autoridades de la EPET 7, pero debido a lo mencionado anteriormente, los estudiantes no contaban con horas de matemática donde pueda ser desarrollado el taller, por lo que los encuentros se realizaron dentro de espacios curriculares cedidos por docentes de otras asignaturas de la escuela. Fueron cuatro encuentros, uno por semana, y el tiempo de duración de cada uno fue de 80 minutos aproximadamente. Asistieron a los encuentros entre 15 y 20 alumnos de un total de 25 alumnos que estaban cursando 6º año.

Las coordinadoras del taller fueron una docente del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional del Comahue y una estudiante del último año del Profesorado en Matemática de la misma Universidad, ambas integrantes del grupo de investigación antes mencionado.

Algunas características generales del taller son:

- El trabajo se realiza en grupos de 2 o 3 integrantes.
- Luego de cada encuentro, los estudiantes entregan en forma escrita todo lo desarrollado por el grupo durante ese día.
- La asistencia al taller no es obligatoria, es un taller dictado en forma extracurricular, aunque en horario de clases.

- El taller no cuenta con una instancia de acreditación pero sí se les otorga a los estudiantes un certificado de asistencia expedido por la Universidad Nacional del Comahue.

A continuación describiremos en forma resumida los cuatro encuentros realizados.

§4. Primer encuentro

En el primer encuentro se les pidió a los alumnos que armaran grupos de dos o tres integrantes, los cuales se mantendrían durante los demás encuentros. Se conformaron siete grupos, se le entregó a cada uno un folio con el problema a resolver y hojas en blanco en las cuales debían desarrollar su trabajo, luego esas hojas debían ser entregadas a las coordinadoras del taller al finalizar cada encuentro. Esto nos permitió realizar un análisis detallado de sus producciones.

El problema, al que denominamos **"El problema del bebedero"** se planteó de la siguiente manera:

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se muestra en la imagen (Figura 1). *Necesitamos incorporar sobre una de las caras del bebedero, en forma vertical, una varilla graduada que indique el nivel de agua correspondiente a 100, 200, 300,… litros. ¿Cómo podríamos hacer para graduar la varilla si no tenemos la posibilidad de incorporar agua al bebedero?*

Figura 1. Bebederos.

Una vez presentado el problema, los grupos comenzaron a debatir y analizar la situación planteada. En este momento del "primer encuentro" con el problema, lo que surgió como propuesta inicial es hacer un dibujo del bebedero, a continuación los grupos plantearon la necesidad de conocer las medidas por lo que las

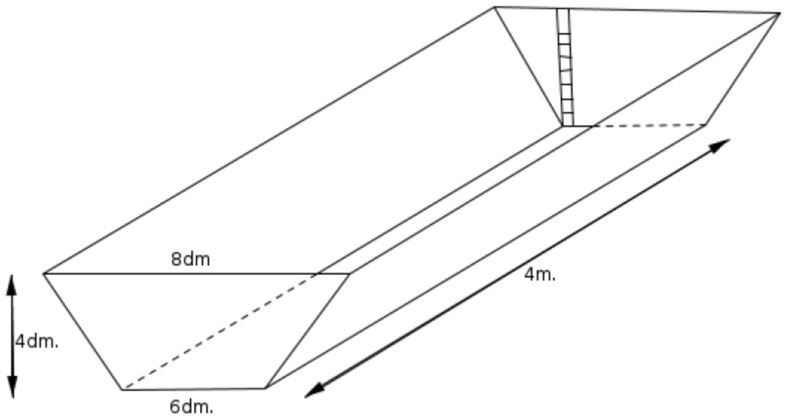


Figura 2. Dibujo del bebedero.

coordinadoras les facilitamos las medidas internas del bebedero. El dibujo con el que finalmente se trabajó en el taller se muestra en la Figura 2:

Este momento del "primer encuentro" con la cuestión a estudiar, es muy importante para que los alumnos se apropien de la situación, busquen herramientas que les permitan dar algún tipo de respuesta, se hagan nuevas preguntas y comiencen a elaborar estrategias de resolución. Es un momento de mucha libertad en el cual ponen en juego sus conocimientos y hacen uso de las diferentes herramientas matemáticas y tecnológicas que dispone cada uno de ellos.

Luego de un tiempo de exploración por parte de los estudiantes, las coordinadoras intervenimos con preguntas estratégicas para ayudar a la indagación del problema:

Si tuviéramos la posibilidad de verter 100 litros de agua y hacer una marca en la varilla, ¿dónde pondrían la marca de los 200 litros?

La respuesta de varios de los alumnos fue que pondrían la marca de los 200 litros repitiendo la marca de los 100 litros dos veces. Esto da cuenta de lo arraigada que está en los estudiantes la técnica de resolución de un problema con magnitudes a partir de la proporcionalidad. En este sentido, la investigación desarrollada por (García, 2005) permite entender esto como un claro fenómeno de desarticulación en la escuela secundaria entre el estudio de la relación de proporcionalidad y el resto de las relaciones funcionales.

Unos pocos alumnos detectaron que, por la forma del bebedero, no era correcto repetir la misma marca dos veces. Luego de debatir esta situación con toda la clase, se llegó a la conclusión de que la graduación de la varilla no sería en forma proporcional.

Para continuar, se les preguntó qué otras cuestiones habían surgido en los grupos y una de ella fue:

¿Cuántos litros de agua tiene el bebedero cuando está lleno?

A partir de esta cuestión los grupos comenzaron un trabajo exploratorio para poder hallar la capacidad del bebedero en litros. Algunos alumnos inmediatamente comenzaron a calcular el volumen del bebedero, sin embargo esta relación entre la cantidad de litros y el volumen de la figura no fue obvia para todos.

Este trabajo fue muy interesante ya que en los grupos emergieron diferentes técnicas para hallar el volumen, que fueron discutidas y validadas entre ellos. Cabe destacar que los alumnos no recordaban cómo determinar el área de la cara trapezoidal, sin embargo para sortear este obstáculo, transformaron el trapecio en figuras de área conocida como triángulos o rectángulos.

Una de las técnicas desarrolladas por uno de los grupos consistió en dividir la cara trapezoidal del prisma en dos figuras, un trapecio rectangular y un triángulo rectángulo, luego desplazaron el triángulo rectángulo completando un rectángulo de base 0,7 metros y altura 0,4 metros, así mantuvieron la misma profundidad del prisma original pero su cara pasó a ser un rectángulo. Finalmente, como se muestra en la Figura 3, calcularon el volumen del bebedero como

$$V = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 4 = 1{,}12\, m^3.$$

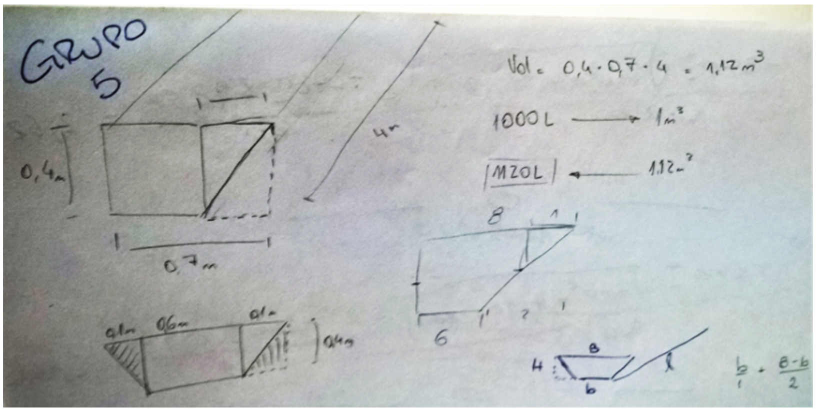


FIGURA 3. Técnica para calcular el volumen.

Otra técnica desarrollada por uno de los grupos consistió en dividir el trapecio en tres partes, en un rectángulo y en dos triángulos rectángulos. Calcularon el volumen de cada cuerpo: un prisma de base rectangular y dos prismas de base triangular, manteniendo la profundidad, finalmente sumaron los resultados obtenidos (Figura 4).

Mientras los alumnos buscaban estrategias para calcular el volumen, surgieron cuestiones en los grupos como por ejemplo: *¿Cómo calcular los litros a partir del volumen? ¿En qué unidad de medida conviene trabajar?*

Se les propuso entonces que hicieran uso de internet o que consultaran en algún libro las respuestas a esas cuestiones. Algunos grupos recordaban la equivalencia

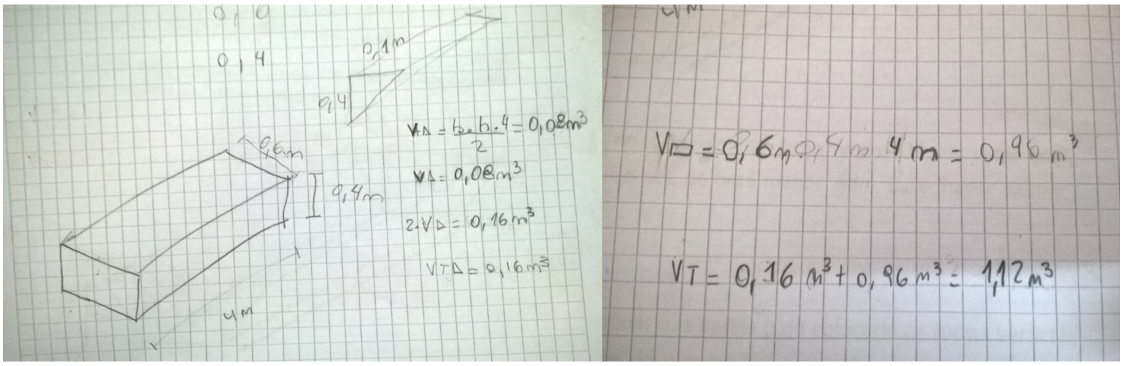


FIGURA 4. Técnica para calcular el volumen.

1 dm^3 = 1 litro, por lo cual pasaron todas las medidas a decímetros, otros grupos decidieron trabajar en centímetros ya que recordaban las unidades que tienen los envases de gaseosa (1/2 litro = 500 cm^3). Dando como resultado final que la cantidad de litros que puede contener el bebedero cuando está lleno es de 1120 litros.

En la puesta en común, al finalizar esta primera actividad, cada grupo expuso la técnica desarrollada para determinar el volumen del bebedero. Luego se buscaron similitudes y diferencias entre las distintas propuestas.

A continuación se realizó una actividad que consistió en que cada grupo determinara, con la técnica que había desarrollado anteriormente, una fórmula del volumen de un bebedero similar pero de altura H, base mayor B, base menor b. Así en la pizarra se fueron escribiendo las distintas fórmulas, dando cuenta de los diferentes modelos utilizados por cada grupo y los parámetros que determinan dicho modelo. (Figura 5)

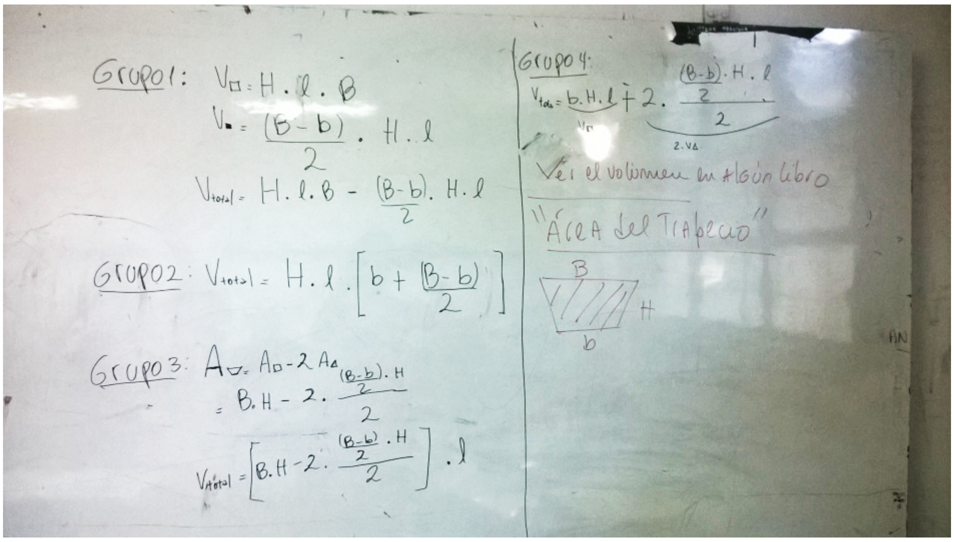


FIGURA 5. Fórmulas para el cálculo del volumen

La escritura del volumen por medio de parámetros dio lugar a la siguiente cuestión planteada a los alumnos: *¿Para determinar el volumen de un prisma rectangular con la forma del bebedero, se puede usar cualquiera de las fórmulas desarrolladas en el pizarrón? ¿Son fórmulas equivalentes?*

Esta actividad tenía como objetivo que los alumnos realicen un trabajo algebraico. El trabajo realizado por los grupos fue un trabajo muy rico en cuanto a validación de fórmulas y equivalencia entre las mismas, lo que llevó a un trabajo algebraico intenso, que dejó en evidencia las dificultades de los alumnos en este tipo de tareas.

El empleo de parámetros da al álgebra elemental su pleno alcance y pone de manifiesto la función de las expresiones algebraicas, sin embargo, en la escuela las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los *parámetros están ausentes* (Bolea, 2003).

§5. Segundo encuentro

Como se incorporaron algunos estudiantes que no participaron del encuentro anterior, se retomaron cuestiones puntuales y estos nuevos alumnos se integraron a los grupos ya formados. Para continuar les preguntamos:

¿Será posible graduar la varilla ahora que conocemos la cantidad total de litros del bebedero?

En general los grupos que llegaron a responder esta pregunta lo hicieron por medio de la regla de tres simple, es decir plantearon la cantidad total de 1120 litros a una altura de 40 cm y de manera proporcional calcularon la altura correspondiente para los 100 litros, 200 litros, etc. Aquí nuevamente nos volvimos a encontrar con este obstáculo didáctico que tiene que ver con el tipo de tareas que se resuelven habitualmente en la escuela, en este caso relacionando magnitudes en forma proporcional o inversamente proporcional, y dejando de lado aquellas que tienen que ver con relaciones funcionales más complejas (García, 2005).

Es por esto que se les propone a los grupos pensar en cuántos litros de agua habría en el bebedero si el nivel de agua llega hasta la mitad. Algunos respondieron rápidamente que habría 560 litros, es decir, la mitad de la cantidad total. Sin embargo esta conjetura fue refutada por otros compañeros que daban cuenta de la forma del bebedero y la no proporcionalidad. Algunas de sus expresiones fueron: “la parte de abajo es más chica que la de arriba”, “abajo se llena más rápido que arriba, por lo tanto tiene menor cantidad de agua”.

Para tratar de responder la cuestión planteada, emergió entre los alumnos la pregunta “*¿cuál es la medida de la base mayor del trapecio isósceles que forma el agua dentro del bebedero*?”, así el problema derivó en la resolución de esta nueva cuestión.

Algunos grupos la respondieron en forma intuitiva de la siguiente manera: "si dividimos a la mitad la altura del triángulo de base 1dm y altura 4dm, aparece otro triángulo cuyas medidas son la mitad del triángulo anterior, entonces la base mide un medio, por lo que la base mayor del trapecio medirá 0,7 dm" sin poder justificarla ni dar cuenta que lo que estaban utilizando era semejanza de triángulos; otro grupo usó como técnica de resolución relaciones trigonométricas (ver Figura 6).

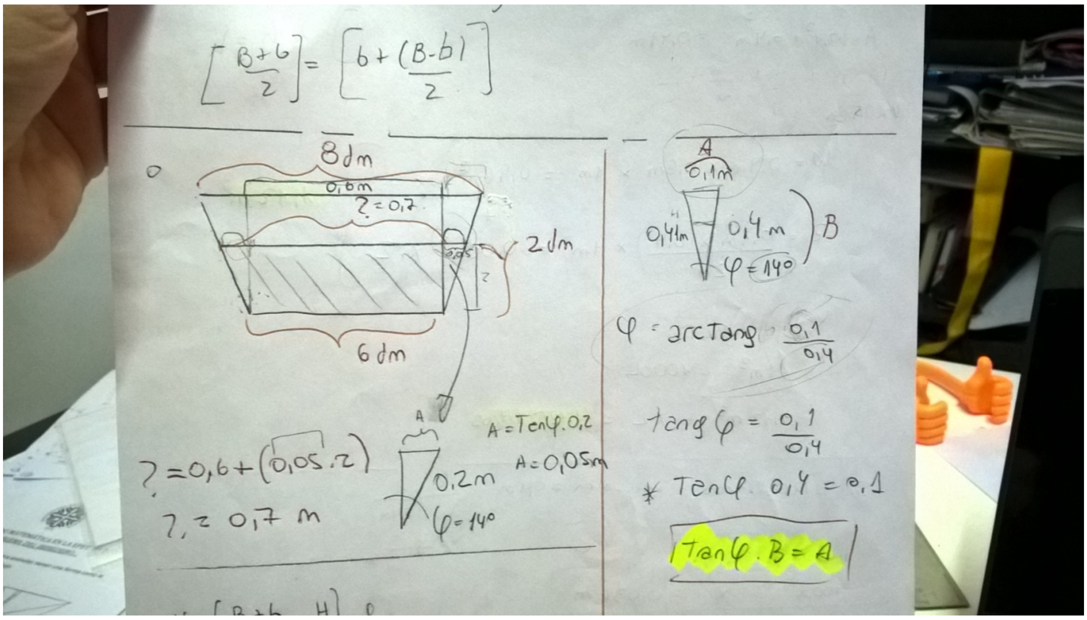


Figura 6. Uso de la tangente como herramienta.

Continuamos el recorrido con las siguientes preguntas: *¿Cuántos litros de agua habría si el nivel del agua llegara a los 10 cm? ,¿ a los 12 cm? y ¿a los 7 cm?*

Únicamente los grupos que habían llegado a justificar la respuesta anterior utilizando la tangente o semejanza de triángulos pudieron responder estas nuevas preguntas.

Luego de compartir el trabajo realizado por todos los grupos llegamos a la conjetura de que **hay una relación entre la altura del nivel de agua que hay en el bebedero y el volumen que determina la misma**.

Se les propone buscar dicha relación, esta es una parte del proceso de modelización a la cual los alumnos no están habituados, ya que tienen que identificar las medidas que permanecen fijas y las que no. La siguiente figura muestra como se identificaron las variables. (Figura 7)

FIGURA 7. Identificación de variables.

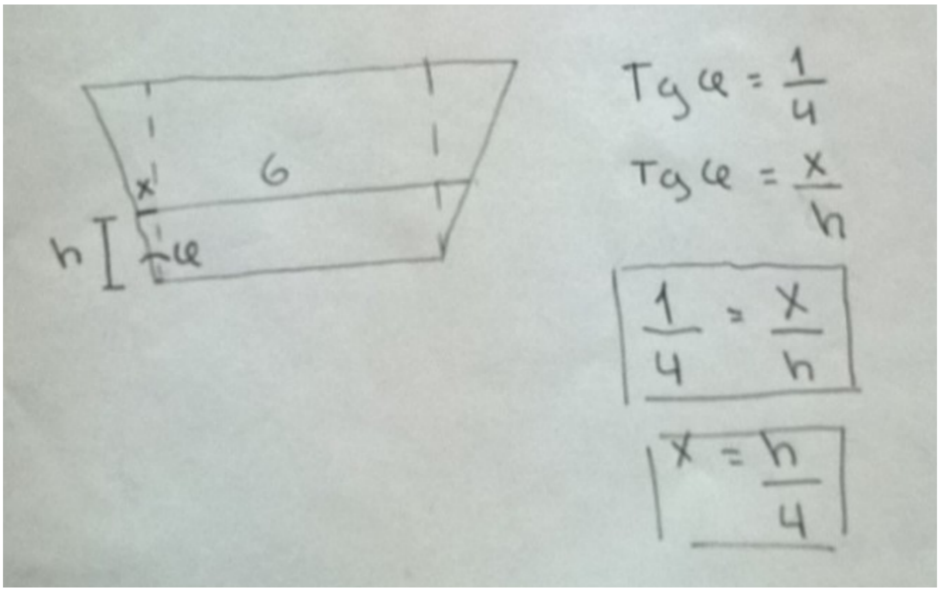


FIGURA 8. Relación entre x y h.

Si bien, en este encuentro no se llegó a justificar completamente la conjetura planteada, algunos grupos lograron determinar la relación entre h y x: $x = \frac{h}{4}$. En la Figura 8 se muestra lo desarrollado por uno de los grupos.

Este segundo encuentro finalizó con la puesta en común de lo desarrollado por cada grupo en la búsqueda de la relación entre h y x.

§6. Tercer encuentro

En este encuentro se trabajó en la búsqueda de la relación **entre el volumen y la altura del nivel de agua** a partir de la relación hallada en el encuentro anterior.

Para establecer dicha relación, cada grupo persistió en la utilización del modelo para el cálculo del volumen que habían propuesto en el comienzo del recorrido (a pesar de haber compartido con otros grupos fórmulas más simples). Esto llevó a que en algunos grupos la fórmula final a la que llegaban fuera muy extensa, y complicada de manipular, por lo que las coordinadoras les sugerimos que intentaran llegar a una fórmula simplificada. Esta tarea no fue fácil para ellos ya que nuevamente el obstáculo del trabajo algebraico se hizo presente.

En la Figura 9 se muestra como un grupo utiliza la fórmula del volumen que hallaron en el primer encuentro y la relación establecida entre x y h para escribir el volumen en función de la altura del nivel de agua. Luego por medio de un trabajo algebraico logran llegar a una fórmula simplificada.

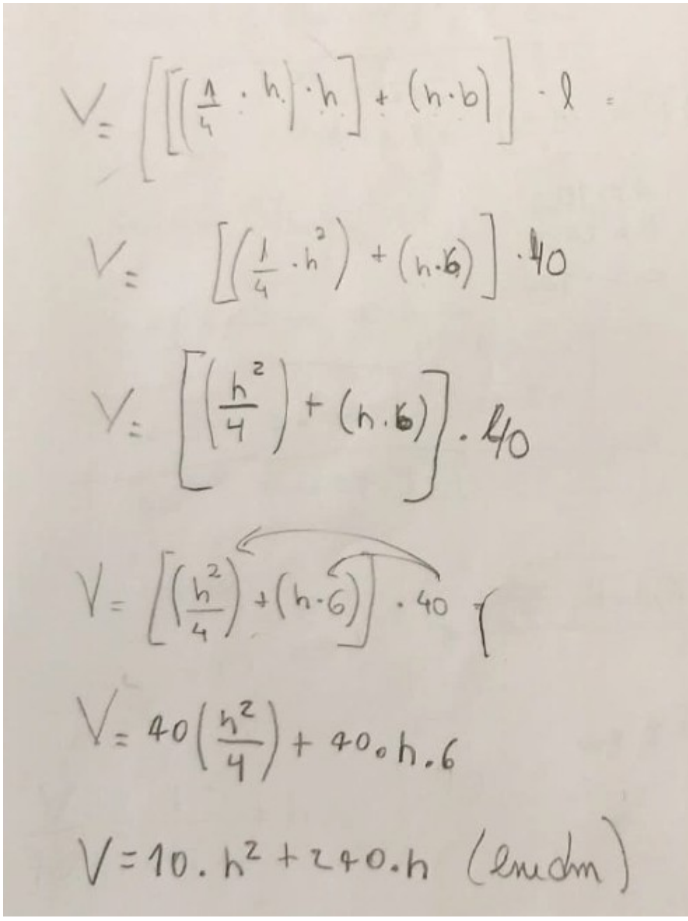


Figura 9. Volumen en función de la altura del agua.

Finalmente se realizó una puesta en común de las fórmulas que había obtenido cada grupo, y concluimos el tercer encuentro institucionalizando una fórmula simplificada que permite expresar el volumen (en dm^3) en función de la altura del agua: $v(h) = 10h^2 + 240h$.

§7. Cuarto encuentro

En el cuarto y último encuentro debíamos dar cuenta de la respuesta que daríamos a la pregunta inicial *¿Cómo graduamos la varilla*?. Luego de realizar entre todos un repaso de todo el recorrido realizado hasta el momento, se les propuso a los grupos que completaran la siguiente tabla:

litros	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1120	v
altura del agua													

Como ya habían trabajado con la equivalencia entre un litro de agua y un decímetro cúbico, los alumnos relacionaron en forma inmediata los litros con el volumen y usaron la fórmula de volumen en función de la altura del agua institucionalizada en el encuentro anterior para completar la tabla. Primero reemplazaron, en la fórmula mencionada, el volumen por los litros establecidos en la tabla, y a continuación el objetivo era determinar la incógnita h de la ecuación cuadrática obtenida.

La mayoría de los grupos aplicaron la técnica de "Baskara" para resolver la ecuación cuadrática, descartando uno de los resultados por ser negativo. (Figura 10)

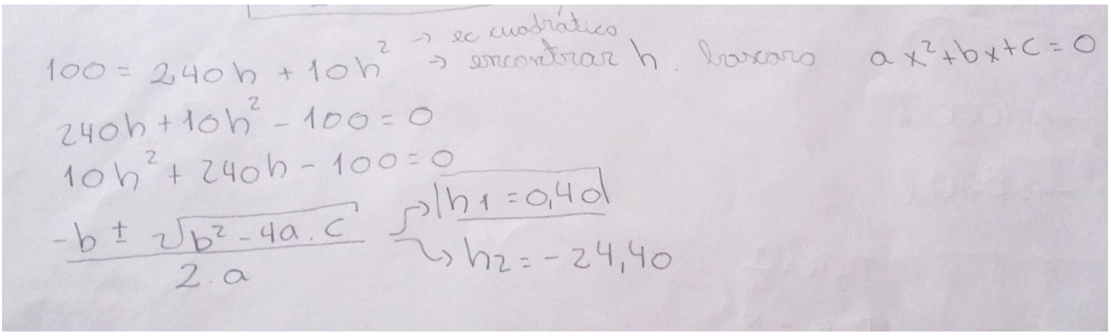


Figura 10. Resolución correcta de ecuación cuadrática.

Dos de los grupos intentaron despejar h cometiendo errores algebraicos y llegando a resultados absurdos, como lo muestra la Figura 11.

Los integrantes de estos dos grupos llegaron a observar que el resultado obtenido no era correcto, pero no supieron cómo abordar la resolución de la ecuación cuadrática de otra manera. Finalmente los demás grupos compartieron sus resoluciones y entre todos los alumnos completaron la tabla, logrando así graduar la varilla. De esta manera se dio por finalizado el recorrido.

Con respecto a la última columna de la tabla, la intención de las coordinadoras era aproximarse al estudio de la función inversa, pero por falta de tiempo no se

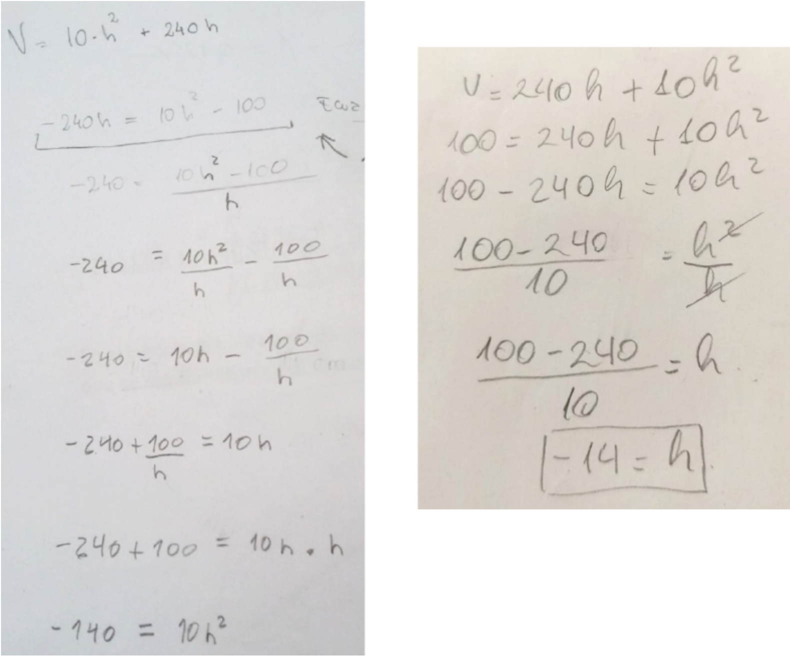


Figura 11. Resolución errónea de ecuación cuadrática.

logró este objetivo. Otra parte de la actividad que no pudo ser realizada es un trabajo con el software Excel. Se había pensado que podría surgir del propio grupo de estudiantes, como esto no fue así, simplemente al finalizar el recorrido se les mostró cómo se podría haber completado la tabla de manera muy rápida a partir de este medio tecnológico.

§8. Reflexiones finales

Mediante el desarrollo de este taller los estudiantes pusieron en juego conocimientos relacionados con la manipulación de expresiones algebraicas, con el sistema métrico decimal, con el cálculo de áreas, con la noción de semejanza de triángulos, tangente y dependencia funcional entre variables. Si bien no fue llevado a cabo en esta oportunidad, también se podría haber indagado y profundizado sobre el modelo cuadrático y sobre nuevos modelos en función de la forma del bebedero.

La elección de las herramientas necesarias para abordar la cuestión recayó en todo momento sobre los alumnos, esta actividad, realizada en grupos, los llevó a buscar diferentes estrategias de resolución, validar los resultados y reflexionar sobre lo que cada grupo desarrollaba, y a la vez les permitió descubrir algunos errores que habitualmente se cometen al realizar operaciones algebraicas.

Como también se afirma en (Barquero, 2009), destacamos la importancia que ha tenido el momento exploratorio y el del trabajo de la técnica en la evolución del taller. Potenciar la "vivencia" de estos momentos permitió a los alumnos responsabilizarse de muchas tareas que en la cultura más "tradicional" están completamente ausentes, como son la formulación de hipótesis, el planteo de cuestiones problemáticas a tratar, la elección de las herramientas matemáticas adecuadas, etc.

La mayoría de los alumnos demostró muchísimo interés por llegar a resolver los diferentes desafíos que les fueron propuestos en cada encuentro, y a pesar de que no todos pudieron estar en los cuatro encuentros realizados, ante la ausencia intentaban acoplarse a la actividad que se estaba realizando y así poder trabajar junto a los demás compañeros, esto dejó en claro el interés que generó la actividad planteada.

En la elaboración de secuencias de enseñanza y aprendizaje a partir de REI, aparece en todo momento la necesidad de elaborar un nuevo contrato didáctico, que provoca cambios en las responsabilidades del profesor y el alumno y también en el modelo epistemológico actual de la actividad matemática. Si bien esta no es una tarea sencilla dentro de una institución escolar, en este caso no se tuvo mayores dificultades por tratarse de un taller extra curricular y con docentes ajenos a la institución.

Un aspecto negativo que se destaca en esta implementación se refiere al poco tiempo del que se dispuso para realizar el recorrido. Al no conformar parte de ningún espacio curricular, las horas debían ser cedidas por los docentes y esto no fue bien recibido por algunos colegas de otras disciplinas.

Para finalizar, queremos agregar que estamos convencidos de que la manera de aprender matemática es "haciendo matemática", que debemos darle a los estudiantes esta oportunidad maravillosa de descubrir el potencial del saber matemático, sin embargo sabemos que llevar este tipo de dispositivos al aula conlleva un proceso de cambio en las diferentes concepciones de la matemática que puedan tener los docentes, por esto es fundamental contar con espacios y tiempo para que los docentes puedan interactuar entre pares y con colegas de otras disciplinas para repensar sus proyectos de enseñanza.

Bibliografía

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas (Tesis doctoral)*. España: Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias, Revista de investigación y experiencias didácticas*, *29*(3), 339-352.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares (Tesis doctoral)*. España: Monografías del Seminario Matemático 'García de

Galdeano' nº 29. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente [en linea]. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca*. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. *Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Retrieved from http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires. Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemática: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE. Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Vigo.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. de la proporcionalidad a las relaciones funcionales (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Jaen.

Gascón, J. (2010). Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación: Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. *Unión. Revista Iberoamericana de educación Matemática*, *22*, 9-35.

Licera, M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado (Tesis doctoral)*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial y elemental en el ámbito de la modelización funcional (Tesis doctoral)*. España: Universidad de Vigo.

Otero, M., Fanaro, M., Córica, A., Llanos, V., Sureda, P., & Parra, V. (2013). *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. (Tesis doctoral)*. Barcelona. España: Departamento de Matemática, Universidad Autónoma de Barcelona.

Segal, S., & Giuliani, D. (2008). *La Modelización Matemática en el Aula. Posibilidades y Necesidades*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

MAYRA MUÑOZ VENEGAS
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *mayramuoz@hotmail.com*

María Laura Santori
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *mlausantori@yahoo.com.ar*
M. del Carmen Díaz de Quintana
Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Argentina.
(✉) *diazdequintana@yahoo.com.ar*

Recibido: *18 de diciembre de 2018*.
Aceptado: *18 de agosto de 2019*.
Publicado en línea: *14 de dciembre de 2019*.

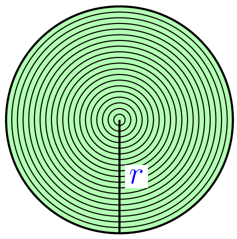
¿Sabías que...

por Leandro Cagliero y Ricardo Podestá

se puede obtener el área de un círculo a partir del área de un triángulo?

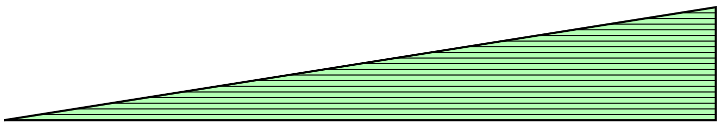
Es decir, ¿sabías que, se puede deducir la fórmula del área de un círculo conociendo la fórmula del área del triángulo y que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro? Se hace así: Supongamos que tenemos un circunferencia C de radio r. ¿Cómo obtenemos el área dentro de C a partir de un triángulo? Pues, *¡desenrollando el círculo!*

Podemos pensar que el círculo C está formado por infinitos círculos concéntricos C_t todos con el mismo centro y radios t que van de 0 a r, donde $C_r = C$.



Si desenrollamos los círculos (pensemos que son hilos) obtenemos segmentos de longitudes $2\pi t$ con $0 \leq t \leq r$. Como resultado obtenemos un triángulo rectángulo T con base b igual a la longitud de la circunferencia y altura h igual al radio de C, por construcción.

Sabiendo que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, obtenemos que $b = 2\pi r$.



De esta manera, obtenemos la conocida fórmula para el área del círculo

$$\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(T) = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}(2\pi r) \cdot r = \pi r^2.$$

El área del círculo fue estudiada por los antiguos griegos. Eudoxo de Cnidos, en el siglo V a.c., halló que el área del círculo es proporcional al cuadrado del radio. Arquímedes usó la geometría Euclídea para demostrar que el área del círculo es igual al área de un triángulo rectángulo cuya base es la circunferencia del círculo y cuya altura es el radio de la misma. Previo a Arquímedes, Hipócrates de Quíos fue el primero en demostrar que el área de un disco es proporcional al cuadrado de su diámetro, como parte de la cuadratura de la lúnula de Hipócrates (ver *¿Sabías que...?* del Vol. 33, No. 3, 2018), pero no identificó la constante de proporcionalidad.