

EL CENTRO GEOGRÁFICO DE UNA REGIÓN

Alejandro L. Tiraboschi

Introducción

Los juegos matemáticos son una fuente de interesantes problemas matemáticos que, sin duda, actúan como motivación para estudiantes e interesados en la matemática en general. Ahora bien, también existe la posibilidad de encontrar problemas relacionados con el mundo real que podrían ser resueltos de con un poco de ingenio y el uso de matemática elemental. Estos problemas, al brindar respuestas concretas, pueden resultar muy estimulantes, ya sea, al constatar una afirmación conocida; o bien, al descubrir nuevos y a veces, sorprendentes resultados.

Por cierto hallar un problema de estas características no es sencillo y en general nos debemos limitar a la tarea, nada despreciable, de recrear y redescubrir problemas ya estudiados. Sin embargo, la disponibilidad de nuevas tecnologías habilita múltiples posibilidades y campos relativamente nuevos desde los cuales pensar y solucionar preguntas de matemática elemental. Por ejemplo, la introducción de aplicaciones de cartografía en la internet (Google Earth, Google Maps, etc.) sumada a las posibilidades de programación actuales nos permite plantear interesantes preguntas y resolverlas con el uso de pocas herramientas matemáticas.

Ese es el camino por el que transitaremos en este trabajo, a partir de la formulación: ¿qué es o cómo se puede definir el centro de una región? y de alcanzar una respuesta satisfactoria a dicha interrogación pasar al siguiente desafío: dada una región determinada, por ejemplo, un país: ¿cuál es el centro de la región? La primera pregunta no es nueva ni mucho menos y da lugar a una interesante discusión zanjada, -conforme a mi conocimiento- por [1] y [6]. La segunda, puede ser resuelta con el diseño y la implementación de algoritmos que nos permitirán calcular ejemplos concretos.

A continuación explicaremos algunos conceptos básicos, los resultados obtenidos y los métodos utilizados a lo largo del trabajo.

La noción de distancia de un punto a un conjunto es bastante intuitiva. Por ejemplo, ¿a qué distancia está un satélite de la Tierra? La respuesta es: a la distancia que hay desde el satélite al punto más cercano en la Tierra, es decir la menor longitud entre las longitudes de todos los posibles caminos entre el satélite y la Tierra. También podemos ejemplificar con una situación más relacionada con este trabajo ¿a qué distancia está la ciudad de Santa Rosa, La Pampa de la frontera Argentina? Podemos averiguar esto en forma artesanal usando Google Maps y la herramienta de medir distancias. Comprobaremos, entonces, que la distancia de Santa Rosa a la frontera es aproximadamente de 291 km y se realiza en un punto de la costa cercano a Bahía Blanca. Este punto en la costa es el lugar de la frontera Argentina más cercano a Santa Rosa. Los dos ejemplos anteriores difieren en un asunto esencial: en el primer ejemplo la distancia es la longitud de la línea recta que une los dos puntos. En el segundo ejemplo, la distancia es la menor distancia *sobre* la Tierra, es decir es la longitud de la curva de menor longitud sobre la superficie terrestre que une los dos puntos. Más adelante, en la Sección 1, veremos la definición precisa de distancia terrestre, pero, por ahora, continuemos con nuestra noción intuitiva de “distancia sobre la Tierra”.

La distancia en línea recta y la distancia sobre la Tierra son conceptos que serán utilizados para comprender un punto geográfico de interés en este trabajo, el *centro geográfico de una región*. La definición de centro geográfico es, en cierta forma, origen de controversias y, según distintas fuentes, encontraremos distintas definiciones. La utilidad del centro geográfico es relativa. Suele utilizarse para fines turísticos, aunque en algunos documentos oficiales se lo utiliza para definir áreas de interés (ver, por ejemplo, [3]). El cálculo de centros geográficos se usa en algunos trabajos donde se estudia distribución de poblaciones. Por ejemplo, la Oficina de Censos de Estados Unidos calcula el centro geográficos de poblaciones y el centro geográfico de los EEUU ([4]). También, es utilizado en biología para dar una noción de la ubicación de ciertas especies. En [5] se determina el centro geográfico, ya no de una región, sino de la distribución geográfica de clados. Como veremos más adelante, el método utilizado en esa publicación no parece ser del todo correcto.

La forma más usual de definir el centro geográfico es como el centro de gravedad de la región dibujada en un plano. El problema es que dibujar una región del geoide terrestre en el plano requiere de una proyección y distintos métodos de proyección pueden dar distintos dibujos y, por lo tanto, distintos centros. En Wikipedia encontramos la siguiente definición: “*el centro geográfico es el centroide de la forma bidimensional de una región de la superficie de la Tierra, proyectado radialmente al nivel de mar o sobre una superficie de geoide.*” Ahora bien, esta definición, además de confusa, depende del plano donde se hace la proyección. Por ejemplo, es muy

distinta la proyección radial de la Argentina al plano determinado por el ecuador que la proyección radial al plano determinado por el meridiano 0° .

La dificultad en definir el centro geográfico de una región con geometría plana, se muestra en un trabajo del National Ocean Service de los Estados Unidos ([1]). En este trabajo se afirma directamente que no hay una definición correcta de centro geográfico. Veremos que esto es un error y se debe a que el autor solo concibe el cálculo del centro geográfico a partir de proyecciones y, como fue mencionado más arriba, distintas proyecciones nos pueden dar distintos “centros geográficos”.

Veremos en la Sección 2, es posible definir sin ambigüedad el centroide de una región en la superficie de una esfera de forma análoga a la definición en \mathbb{R}^2 . A ese centroide es lo que llamaremos el *centro geográfico* de la región. Esta definición está implícita en [4] y se hace en forma rigurosa en [6].

Basándonos en estas definiciones, se explicarán los algoritmos necesarios para el cálculo del centro geográfico de una región. Aplicando estos algoritmos calcularemos, a modo de ejemplo, los centros geográficos de diferentes países, resultando en algunos casos en los centros geográficos ya conocidos y bien calculados, como en el de EEUU o Alemania. En otros casos, como en el de Austria o Argentina, nuestros cálculos no coinciden con los centros geográficos que podemos encontrar mediante búsquedas en internet, pero en ningún caso encontramos fundamentos a estos cálculos.

§1. Distancias en la esfera

Aunque la modelización más exacta de la Tierra es como un elipsoide de revolución, para nuestros fines nos resultará útil, y más sencillo, pensar a la Tierra como una esfera de radio 6.371 km.

La distancia entre dos puntos en la Tierra viene dada por la longitud de la porción del círculo máximo que los une. Para ser más precisos necesitamos introducir algunas definiciones. Una *geodésica* es un círculo máximo. Los meridianos son los círculos máximos que pasan por los polos, pero hay otros círculos máximos. El ecuador terrestre es uno. En general dados dos puntos cualesquiera de la Tierra hay un círculo máximo que los contiene: es la intersección de la esfera con el plano determinado por los dos puntos y el centro de la esfera. Las geodésicas en la esfera juegan el rol de las rectas en el plano y ellas permiten definir triángulos esféricos, cuadrados esféricos, etc. y, en la denominada geometría esférica, se pueden demostrar propiedades análogas a las que se obtienen en la geometría del plano. Un *arco geodésico* entre dos puntos es la porción de geodésica que une los dos puntos y tiene longitud menor. La *distancia* en la Tierra entre dos puntos es la longitud del arco geodésico que une los dos puntos.

En una esfera de radio 1, la longitud l del arco geodésico que une dos puntos es igual al ángulo θ , medido en radianes. Si la esfera tiene radio r entonces esta

longitud es directamente proporcional al radio y por lo tanto $l = r \cdot \theta$. Entonces, una forma de medir la distancia entre dos puntos p_1 y p_2 en la Tierra es averiguar θ , el ángulo comprendido entre ellos, y multiplicarlo por 6,371:

$$d(p_1, p_2) = 6371 \cdot \theta.$$

Ahora, dadas las coordenadas de dos puntos en la Tierra ¿cómo calculamos el ángulo comprendido entre ellos? No es demasiado complicado hacerlo y daremos una breve explicación.

Comenzaremos con el problema, similar, de encontrar el ángulo comprendido entre dos vectores de \mathbb{R}^2 . El *producto escalar* o *producto interno canónico* en \mathbb{R}^2 se define

$$\langle v_1 | v_2 \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

donde $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$. Veremos a continuación que

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\theta)$$

donde $\|v_1\|$ y $\|v_2\|$ denotan las longitudes de v_1 y v_2 respectivamente y θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 . Si $v = (x, y)$, entonces, por el Teorema de Pitágoras, la longitud de v es igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Luego

$$\|v\|^2 = x^2 + y^2 = \langle v | v \rangle.$$

Es decir, el producto escalar de un vector consigo mismo es la longitud del vector al cuadrado.

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ en \mathbb{R}^2 y sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = \|v_1\|(\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)), \quad v_2 = \|v_2\|(\cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| (\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v | w \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, el ángulo comprendido entre v y w es $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$. Luego,

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle v | w \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} \right).$$

Es decir, el producto escalar no sólo es útil para encontrar la longitud de un vector, sino que nos permite averiguar el ángulo comprendido entre dos vectores.

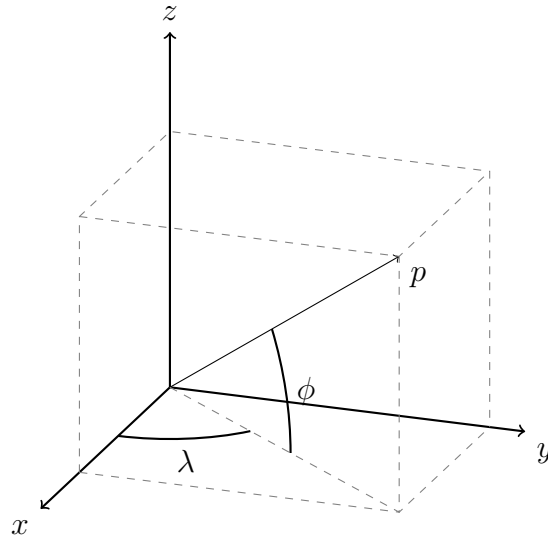


FIGURA 1. p es un punto de latitud $\phi = 32,27$ y longitud $\lambda = 41,48$, en grados.

Veamos ahora el problema en \mathbb{R}^3 . De forma análoga al caso \mathbb{R}^2 , definimos el producto escalar en \mathbb{R}^3 por

$$\langle v_1 | v_2 \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

con $v = (x_1, y_1, z_1)$ y $w = (x_2, y_2, z_2)$. Usando el Teorema de Pitágoras, también podemos demostrar que la longitud de un vector es $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$. Sean ϕ, λ la latitud y longitud geográfica en radianes de un vector v en una esfera de radio r . Las coordenadas cartesianas del punto son

$$(1.1) \quad v = r(\cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \sin \phi).$$

Como ejemplo, en la Figura 1 se muestra la ubicación de un lugar con latitud $32,27^\circ$ y longitud $41,48^\circ$.

La ley esférica de los cosenos nos permite demostrar una fórmula idéntica al caso \mathbb{R}^2 :

$$(1.2) \quad \langle v_1 | v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\theta)$$

con v_1 y v_2 vectores en \mathbb{R}^3 y θ el ángulo comprendido entre ellos. Si v_1 y v_2 se encuentran en la circunferencia de radio r , de la ecuación (1.2) obtenemos

$$(1.3) \quad \theta = \arccos \left(\frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{r^2} \right).$$

Sean ϕ_1, λ_1 y ϕ_2, λ_2 las latitudes y longitudes geográficas en radianes de dos vectores v_1 y v_2 en una esfera de radio r . Por (1.3), el ángulo comprendido entre los

vectores, es el arcocoseno de

$$\begin{aligned} \frac{\langle v|w \rangle}{r^2} &= \frac{\langle r(\cos \phi_1 \cdot \cos \lambda_1, \cos \phi_1 \cdot \sin \lambda_1, \sin \phi_1) | r(\cos \phi_2 \cdot \cos \lambda_2, \cos \phi_2 \cdot \sin \lambda_2, \sin \phi_2) \rangle}{r^2} \\ &= \langle (\cos \phi_1 \cdot \cos \lambda_1, \cos \phi_1 \cdot \sin \lambda_1, \sin \phi_1) | (\cos \phi_2 \cdot \cos \lambda_2, \cos \phi_2 \cdot \sin \lambda_2, \sin \phi_2) \rangle \\ &= \cos \phi_1 \cdot \cos \lambda_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos \lambda_2 + \cos \phi_1 \cdot \sin \lambda_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \sin \lambda_2 + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \\ &= \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 (\cos \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2) + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 \\ &= \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2. \end{aligned}$$

Es decir, el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$(1.4) \quad \theta = \arccos(\cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2),$$

que es una fórmula alternativa a (1.3), más útil para realizar cálculos, debido a que se expresa directamente en función de la latitud y longitud de los puntos involucrados.

Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1.1. Sean v_1 y v_2 dos puntos en la esfera de radio r con coordenadas geográficas (ϕ_1, λ_1) y (ϕ_2, λ_2) , respectivamente. Entonces, la distancia entre v_1 y v_2 , es decir la longitud del arco geodésico que une v_1 y v_2 , es

$$(1.5) \quad d(v_1, v_2) = r \arccos(\cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \cdot \cos(\lambda_1 - \lambda_2) + \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2).$$

Ejemplo 1.2. En Python podemos hacer un programa sencillo para calcular la distancia entre dos puntos de la Tierra.

DISTANCIA ENTRE v_1 Y v_2

```
from math import * # importa la librería de matemática
r = 6371 # radio terrestre en kms
def distancia(lat1, lon1, lat2, lon2):
    # pre: (lat1, lon1) y (lat2, lon2) son coordenadas de dos puntos en radianes.
    # post: devuelve la distancia entre los dos puntos en kilómetros
    return r*acos(cos(lat1)*cos(lat2)*cos(lon1-lon2)+sin(lat1)*sin(lat2))
```

Usando la función distancia dentro del programa, podemos averiguar la distancia entre Buenos Aires y Córdoba. Las coordenadas de la ciudad de Buenos Aires son: latitud: $34^\circ 36' 30''$ Sur y $58^\circ 22' 16''$ Oeste, en radianes y con lo signos correspondientes las coordenadas son $(-0,54838 - 1,12030)$. Las coordenadas de la ciudad de Córdoba, en radianes, son $(-0,60403, -1,01877)$. Si agregamos al programa la línea

```
print distancia(-0.54838, -1.12030, -0.6040, -1.01877)
```

se imprime en pantalla 647.82759, que es (una aproximación a) la distancia en km en “línea recta” entre Buenos Aires y Córdoba. Observar que en Python la coma decimal debe ser reemplazada por un punto.

§2. El centro geográfico de una región

El concepto de centro geográfico de una región en una esfera no tiene una definición claramente aceptada y dependiendo de la fuente, podemos tener diferentes interpretaciones. Antes de continuar la discusión daremos algunas definiciones y resultados que nos resultarán de utilidad.

Definición 2.1. El *centro de masa* de una distribución de masas puntuales es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.

Es decir, si v_1, \dots, v_k vectores en \mathbb{R}^n tal que v_i tiene masa m_i . Entonces el *centro de masa del sistema* $D = \{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k}$ es

$$p(D) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k m_i \cdot v_i,$$

donde $m = m_1 + \dots + m_k$.

Ejemplo 2.2. Calculemos un centro de masa en el plano. Sean los puntos $(1, 2)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ de masa 2, 1, 3 respectivamente, luego el centro de masa es

$$\frac{2 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (0, -1) + 3 \cdot (1, 0)}{2 + 1 + 3} = \frac{(2, 4) + (0, -1) + (3, 0)}{6} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right).$$

Desde un punto de vista físico, uno podría pensar que el sistema

$$\{((1, 2), 2), ((0, -1), 1), ((1, 0), 3)\}$$

es equivalente, al nivel de la dinámica, al sistema $\{((\frac{5}{6}, \frac{1}{2}), 6)\}$.

Cuando tenemos un cuerpo continuo (una superficie en el plano, un sólido en el espacio, etc.) para calcular el centro de masa subdividimos en pequeñas masas y luego hacemos el promedio ponderado. Cuando más fina es la subdivisión más nos acercamos al centro de masa del cuerpo y en el límite obtenemos el verdadero centro de masa.

Definición 2.3. El *centroide* de una distribución de puntos en \mathbb{R}^n es la media aritmética de la posición de todos los puntos.

Es decir, si v_1, \dots, v_k vectores en \mathbb{R}^n , entonces el centroide de $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ es

$$c(S) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v_i.$$

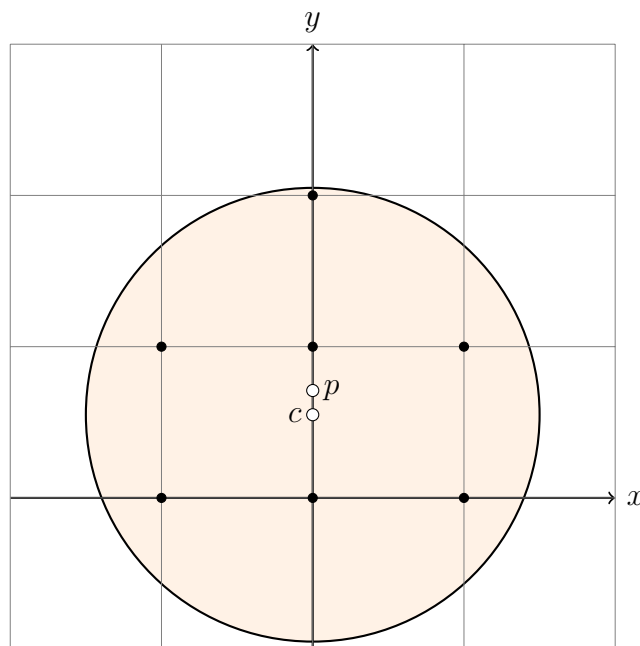


FIGURA 2. Ejemplo de aproximación del cálculo del centroide por una grilla. El punto c es el centroide del disco y el punto p se obtiene promediando los puntos de la grilla interiores al disco.

Es decir, el centroide es el centro de masa de los puntos considerando que la densidad vale 1 en todo punto, o dicho de otra forma, $c(S) = p(D)$ donde $D = \{(v_i, 1)\}_{i=1, \dots, k}$.

Como ya discutimos en el caso del centro de masa, cuando el objeto es continuo podemos averiguar el centroide por un proceso de límite. En el caso de superficies, si la superficie se encuentra en el plano, el centroide es la integral doble de los puntos pertenecientes a la superficie dividida el área total de la superficie. En el caso que la superficie se encuentre en el espacio, por ejemplo que sea una región de la esfera, el centroide es la integral de superficie de los puntos pertenecientes a la superficie dividida el área total.

Nuestra intención es calcular el centroide de superficies, pero no haremos uso de integrales y nuestros cálculos se basaran en aproximaciones por puntos: si S es una superficie, tomaremos u_1, \dots, u_k puntos convenientemente elegidos en S , entonces tendremos

$$(2.1) \quad c(S) \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_i.$$

Es decir, como parece natural, para calcular el centroide de una superficie podemos hacer una "aproximación por puntos" y luego calcular el promedio de ellos.

Ejemplo 2.4. El centroide del disco $D(c, r)$ de centro $c = (0, 0, 55)$ y radio $r = 1,5$ es el centro del disco. Calculemos una aproximación de el centroide de $D(c, r)$ con

una grilla cuadrículada de lados 1×1 con vértices en las coordenadas enteras. Hay 7 puntos de la grilla que están contenidos dentro del disco: $(0, 2)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Por la ecuación (2.1), tenemos

$$\begin{aligned} \text{Centro de masa de } D(c, r) &\approx \frac{(0, 2) + (-1, 1) + (0, 1) + (1, 1) + (-1, 0) + (0, 0) + (1, 0)}{7} \\ &= (0, 5/7) \\ &\approx (0, 0,71), \end{aligned}$$

que es un punto “cercano” al centroide, pero no igual (ver Figura 2).

Como ya mencionamos en la introducción, podemos definir, sin ambigüedad, el centroide de una región en la superficie de una esfera de forma análoga a la definición en \mathbb{R}^2 .

Denotemos $S^2(r)$ a la esfera en \mathbb{R}^3 con centro en el origen y radio r . Denotamos también $S^2 := S^2(1)$. Sea (x, y, z) en \mathbb{R}^3 , entonces (x_0, y_0, z_0) es la *proyección radial* de (x, y, z) en $S^2(r)$ si la recta determinada por $(0, 0, 0)$ e (x, y, z) se interseca con $S^2(r)$ en (x_0, y_0, z_0) . Dicho de otra forma, la proyección radial de (x, y, z) es $(x_0, y_0, z_0) := r \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|}$.

Definición 2.5. En geometría esférica, el *centro de masa esférico* de una distribución de masas en la esfera de radio r es la proyección radial del centro de masa de la distribución. El *centro geométrico* o *centro geográfico* de una superficie en la esfera es la proyección radial del centroide de la superficie.

Observación 2.6. Si v_1, \dots, v_k vectores en S^2 tal que v_i tiene masa m_i . Sea $v = \sum_{i=1}^k m_i \cdot v_i$, entonces el centro de masa esférico del sistema es $v/\|v\|$.

Volviendo al caso euclidiano, es muy sencillo demostrar el siguiente resultado: sea D una distribución de masas puntuales en \mathbb{R}^3 , entonces si dividimos la distribución de puntos en dos distribuciones D_1, D_2 se cumple que

$$(2.2) \quad p(D) = \frac{1}{m} (m_1 \cdot p(D_1) + m_2 \cdot p(D_2)),$$

donde m_1 es la masa total del sistema D_1 , m_2 es la masa total del sistema D_2 y $m = m_1 + m_2$. También se cumple lo siguiente.

Proposición 2.7 (Regla euclidiana de nivel). Sean v_1 y v_2 dos puntos en \mathbb{R}^n de masa m_1 y m_2 respectivamente, sea v el centro de masa de $(v_1, m_1), (v_2, m_2)$ y sean a_1, a_2 la distancia de v a v_1 y v_2 respectivamente, entonces

$$m_1 a_1 = m_2 a_2.$$

Demostración. Por definición,

$$v = \frac{1}{m} (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2), \quad a_1 = \|v - v_1\|, \quad a_2 = \|v - v_2\|,$$

donde $m = m_1 + m_2$. Luego,

$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= m_1 \|v - v_1\| \\
 &= m_1 \left\| \frac{1}{m} (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) - v_1 \right\| \\
 &= \frac{m_1}{m} \|m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m \cdot v_1\| \\
 &= \frac{m_1}{m} \|m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1\| \\
 &= \frac{m_1}{m} \|m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1\| \\
 &= \frac{m_1 m_2}{m} \|v_2 - v_1\|.
 \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que

$$m_2 a_2 = m_2 \|v - v_2\| = \frac{m_1 m_2}{m} \|v_1 - v_2\|,$$

y por lo tanto se satisface que $m_1 a_1 = m_2 a_2$. \square

En geometría esférica, y con el uso de un poco de trigonometría, obtenemos otra regla de nivel.

Lema 2.8. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, sea θ_1 el ángulo comprendido entre v_1 y $v_1 + v_2$ y sea θ_2 el ángulo comprendido entre v_2 y $v_1 + v_2$. Entonces

$$(2.3) \quad \|v_1 + v_2\| = \|v_1\| \cos(\theta_1) + \|v_2\| \cos(\theta_2).$$

Demostración. Observemos que

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2 | v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle + \langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle$$

y por lo tanto

$$\|v_1 + v_2\| = \|v_1\| \frac{\langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_1 + v_2\|} + \|v_2\| \frac{\langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle}{\|v_2\| \|v_1 + v_2\|}.$$

Ahora bien,

$$\frac{\langle v_1 | v_1 + v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_1 + v_2\|} = \cos(\theta_1), \quad \text{y} \quad \frac{\langle v_2 | v_1 + v_2 \rangle}{\|v_2\| \|v_1 + v_2\|} = \cos(\theta_2)$$

de donde se deduce el resultado. \square

Proposición 2.9. (Regla esférica de nivel, [6]) Sean p_1 y p_2 dos puntos en S^2 de masa m_1 y m_2 respectivamente, sea p el centro de masa esférico de (p_1, m_1) , (p_2, m_2) y sean a_1 , a_2 la distancia de p a p_1 y p_2 respectivamente, entonces

$$(2.4) \quad m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 = m \cdot p,$$

$$(2.5) \quad m_1 \operatorname{sen}(a_1) = m_2 \operatorname{sen}(a_2),$$

donde $m = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$.

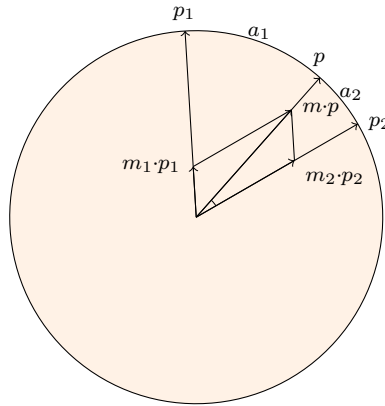


FIGURA 3. Los puntos p_1 y p_2 pertenecen a la superficie terrestre con masas m_1 y m_2 , respectivamente. p es el centro de masa esférico. El ángulo entre p_1 y p es a_1 , el ángulo entre p y p_2 es a_2 y $m = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$.

Demostración. La situación se ejemplifica en la Figura 3.

Como la circunferencia es de radio 1, entonces a_1 es el ángulo comprendido entre p_1 y p y a_2 es el ángulo comprendido entre p_2 y p . Por otro lado, el centro de masa esférico de $(p_1, m_1), (p_2, m_2)$ es

$$p = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{\|m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2\|}$$

(observación 2.6). Por el lema 2.8, tenemos que

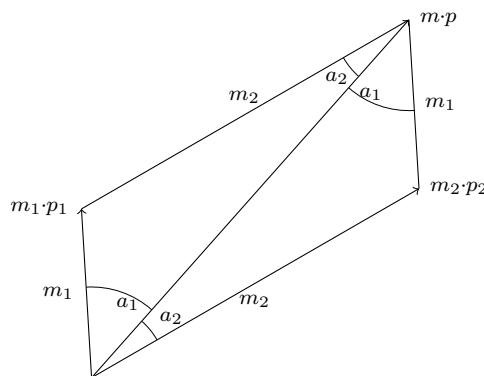
$$\|m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2\| = \|m_1 \cdot p_1\| \cos(a_1) + \|m_2 \cdot p_2\| \cos(a_2) = m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)$$

y por lo tanto

$$p = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 \cos(a_1) + m_2 \cos(a_2)}$$

de donde se deduce (2.4).

Para probar la fórmula (2.5) usaremos el Teorema de los senos, observar que nos encontramos en la siguiente situación:



Luego, por el Teorema de los senos $\frac{\text{sen}(a_1)}{m_2} = \frac{\text{sen}(a_2)}{m_1}$, de donde obtenemos $m_1 \text{sen}(a_1) = m_2 \text{sen}(a_2)$ \square

Observar que la regla esférica de nivel relaciona las distancias sobre la esfera al centro de masa esférico (a_1 y a_2) con las distancia lineales a la recta que está determinada por el centro de masa estándar y el centro de la esfera ($\text{sen}(a_1)$ y $\text{sen}(a_2)$). El centro de masa esférico además de cumplir estas propiedades, es la única aplicación que va desde el conjunto de las distribuciones de masas al conjunto de puntos en $S^2(r)$ que satisface los axiomas de centroide (ver [6]).

Ahora bien, para superficies arbitrarias en la esfera ¿existe alguna proyección tal que la proyección del centro geométrico coincide con el centroide de la superficie proyectada?. La respuesta es *no*. Una de las consecuencias directas del Theorema Egregium de Gauss (ver en [Wikipedia](#)), es que no existe una isometría entre dos superficies con distinta curvatura gaussiana. Nosotros comprendemos bien el concepto de distancia en la esfera, con el uso de geodésicas, y de distancia en el plano, basada en el Teorema de Pitágoras. Como la curvatura de una esfera de radio r es $-1/r$ y la curvatura del plano es 0, es claro que no existe ninguna isometría entre una región de la Tierra y una región plana. En particular, este teorema nos dice que nunca podremos proyectar geodésicas en rectas y por lo tanto el cálculo del centroide realizado en la proyección no está relacionado con el centroide de la superficie.

En la Sección 3 daremos un esquema concreto de cálculo del centro geográfico de un región basándonos la definición de centroide esférico, es decir, calculando primero el centro de masa de la región y luego proyectándolo en forma radial a la esfera.

Antes de terminar la sección comentaremos algunos de los cálculos de centro geográficos que hemos encontrado en la literatura. En el documento [4], la Oficina de Censos de los Estados Unidos calcula los centros de población del país y el centro geográfico. En este documento se explica la metodología utilizada desde 1960 para realizar los cálculos y esta resulta ser equivalente a la utilizada en nuestro trabajo. Experimentalmente, en [4] se obtiene que el centro geográfico de EEUU es en latitud, longitud igual a $44,9672^\circ, -103,7715^\circ$ (ver [Geographic center of the United States](#) o su ubicación en el [mapa](#)), mientras que usando nuestros cálculos obtenemos $44,8989^\circ, -103,8191^\circ$. Los dos puntos, el calculado por la Oficina de Censos y el calculado en este trabajo, se encuentran a menos de 10 km de distancia uno del otro.

Por el contrario, la metodología utilizada en [5] para calcular el centro geográfico de clados, no es la correcta. En el trabajo se dice *“The clade distance is determined by calculating the average latitude and longitude for all observations of the clade in the sample, weighted by the local frequencies of the clade at each location. This estimates the*

geographical center for the clade.” Es decir, en ese trabajo se considera que el centro geográfico se calcula haciendo el promedio de latitudes y longitudes. Esto es incorrecto, pues como se muestra en [4], el cálculo en las longitudes debe tener un factor de corrección dependiente de las latitudes.

Finalmente, en la Wikipedia, en inglés, en [Geographical centre](#) se encuentra una lista de centros geográficos de distintos países y regiones. Según nuestros cálculos, algunos son correctos y otros no lo son. Esto lo veremos en la sección siguiente.

§3. Cálculo del centroide

Usaremos el programa Python para calcular el centroide de una región esférica dada. Python es un lenguaje de programación interpretado de alto nivel y de propósito general. Creado por Guido van Rossum y puesto a disposición de los usuarios por primera vez en 1991, Python tiene una filosofía de diseño que enfatiza la legibilidad del código. Su popularidad ha crecido enormemente en los últimos años, tanto en el ámbito académico como industrial, no solo debido a la facilidad de programación si no también por las librerías disponibles, que permiten realizar cálculos en una amplia variedad de áreas o campos de aplicación.

Nosotros explicaremos brevemente el *script* (así se llaman los programas en Python) `centroide.py` que permite calcular el punto de nuestro interés. El *script*, y ciertos archivos de datos necesarios para ejecutarlo, están disponibles en la página web del autor: <http://www.famaf.unc.edu.ar/tirabo/centroide>

Es posible utilizar el *script* para otros ejemplos además de los que daremos a continuación. Ante cualquier consulta, no dude en escribirle al autor.

Para el cálculo del centroide de una región A realizaremos una cuadrícula de la región y cuando digamos “los puntos de A ” o los “puntos de la región” nos estaremos refiriendo a los puntos de la cuadrícula que se encuentran en el interior de A . Podremos determinar en nuestro programa cuán fina es la cuadrícula y, obviamente, cuando más fina es más precisos serán los cálculos.

Paso 1. Se incorporan los datos secuenciales de la frontera como una lista de $[lon, lat]$ en radianes (los datos están en orden, como se recorre la frontera). Para hacer esto se aplica la función `obtener_poligonales(file)`, donde `file` es un archivo con los datos obtenidos de las Fusion Tables de Google ([8]).

Paso 2. Se construye una grilla donde se marca la frontera. Para construir la grilla se establecen dos parámetros, `dphi` y `dlambda` que nos dirán el tamaño de los “rectángulos” de la grilla.

La grilla es un arreglo doble $d[i][j] = ['s' \text{ o } 'n', lat, lon]$ donde ‘s’ significa que el punto pertenece a la frontera, ‘n’ que no pertenece a la frontera. Además

$d[x+1][y][1] = d[x+1][y][1] + dphi$, $d[x+1][y][2] = d[x+1][y][2]$

(avanzar a la izquierda en 1 es aumentar la latitud en $dphi$)

$d[x][y+1][1] = d[x][y+1][1]$, $d[x][y+1][2] = d[x][y+1][2] + dlambd$

(avanzar hacia arriba en 1 es aumentar la longitud en $dlambd$)

La función utilizada para calcular la grilla es

`hacer_regiones(datos, dphi, dlambd),`

donde `datos` es el output obtenido en el paso anterior.

Paso 3. Se hace flood fill (inundación) de la grilla para determinar los puntos interiores. El algoritmo utilizado es similar al que utilizan los programas de dibujo para “pintar” el interior de una región “derramando la pintura del balde”. También se utiliza en el juego Buscaminas para determinar cuales elementos de la cuadrícula deben ser cambiados. En nuestro caso, como los países suelen estar formados por varias regiones (a veces decenas de regiones), es relativamente complicado hacer flood fill desde el interior de cada región. Por lo tanto, es mucho más sencillo hacer flood fill del exterior y luego tomar el complemento. La función utilizada es `interior_flood_fill_pol(grilla)` y se obtiene una nueva grilla tal que

- $d[i][j] = ['s', lat, lon]$ significa que el punto $[lon, lat]$ es de la frontera.
- $d[i][j] = ['n', lat, lon]$ significa que el punto $[lon, lat]$ se encuentra en el interior del país.
- $d[i][j] = ['e', lat, lon]$ significa que el punto $[lon, lat]$ no pertenece al país.

Paso 4. En este paso calcularemos el centro de masa (aproximado) de la superficie y nos basaremos en el siguiente principio: si S es una superficie en \mathbb{R}^3 que es unión de las superficies S_1, \dots, S_k , entonces

$$(3.1) \quad c(S) = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^k a_i \cdot c(S_i),$$

donde a_i es la superficie de S_i , a es la superficie de S y c es la función centro de masa. Este resultado es una generalización de la ecuación (2.2). El paso consta de dos etapas

1. Se convierten todos los puntos obtenidos por flood fill a coordenadas cartesianas $[x, y, z]$. Los puntos tienen peso, pues según donde esté el “pixel” (en latitud) tiene diferente área.
2. Se realiza el promedio ponderado de todos los puntos (ecuación (3.1)). Así obtenemos las coordenadas cartesianas del centro de masa. Este centro de masa no va a ser parte de la superficie terrestre.

Todos los cálculos del paso 4 los realiza la función `baricentro_xyz(grilla)`, donde `grilla` es el output del paso anterior.

Paso 5. Se proyecta el centro de masa obtenido en el paso anterior a la superficie terrestre con la función `cart2latlon()`, y de esta forma se obtiene el centro geográfico.

Ahora mostraremos el resultado de calcular el centro geográfico de diferentes países y los compararemos con cálculos realizados anteriormente.

Estados Unidos. Como ya mencionamos el centro geográfico de EEUU calculado por nuestro programa y el calculado por la Oficina de Censos de EEUU esencialmente coinciden. El centro geográfico de los EEUU se encuentra en el norte de Belle Fourche, Dakota del Sur en coordenadas con latitud, longitud igual a $44,9672^\circ, -103,7715^\circ$.

Austria. Según la Wikipedia en alemán (ver [aquí](#)) el centro geográfico de Austria se encuentra en el punto de latitud y longitud $47,696528^\circ, 13,345694^\circ$, y no se citan referencias. Según nuestros cálculos, el centro geográfico de Austria se encuentra en $47,591813^\circ, 14,100926^\circ$. La distancia entre ambos puntos es de aproximadamente 60 km, es decir, dado el tamaño del país, hay una gran diferencia entre ambos puntos.

Australia. Utilizando nuestros métodos obtenemos que el centro geográfico de Australia continental es el punto con coordenadas $-25,625^\circ, 134,206^\circ$. De acuerdo a Geoscience Australia, dependiente del Gobierno de Australia, el “centro de gravedad” de Australia continental es el punto con coordenadas $-23,117^\circ, 132,133^\circ$ ([7]), bastante lejano, a 350 km, del que resulta de nuestro cálculo. Sin embargo, en ese mismo artículo se señala que también hay un “Centro de Gravedad Lambert” calculado en el año 1988 por la Geographical Society of Australia y que tiene coordenadas $-25,610^\circ, 134,355^\circ$. Este punto sí se sitúa cercano al de nuestros cálculos, a alrededor de 12 km.

Alemania. Según la Wikipedia en alemán (ver [aquí](#)) el centro geográfico de Alemania se encuentra en el punto de latitud y longitud $51,1333^\circ, 10,4166^\circ$. Según nuestro cálculo, el centro geográfico de Alemania se encuentra en $51,0618^\circ, 10,3632^\circ$. La distancia entre ambos puntos es aproximadamente de 8 km.

Argentina. Con respecto a Argentina, no hay al momento cálculos confiables del centro geográfico. Podemos encontrar en internet que la localidad de Puelches, La Pampa, con coordenadas $-38,15^\circ, -65,92^\circ$, ha sido declarada por “*decreto del gobierno nacional*” como el centro geográfico de la República Argentina (ver [aquí](#) y [aquí](#)). Sin embargo, ya a simple vista, no parece ser el centro geográfico de Argentina. No hemos podido encontrar en el Boletín Oficial el mencionado decreto y, por lo tanto, desconocemos sus fundamentos. Quizás para ese cálculo se incluyó

la parte de la Antártida reclamada por Argentina, la cual no hemos incluido en nuestros cálculos pues no deja de ser un territorio reclamado.

Por otro lado, si realizamos la búsqueda en internet “centro geográfico de Argentina” encontraremos que la Plaza Federal, a la vera del lago San Roque, en Punilla, Córdoba, con coordenadas $-31,3446^\circ$, $-64,4624^\circ$, es mencionada en algunas páginas dedicadas al turismo como el centro geográfico de Argentina. No encontramos ningún fundamento a dicha afirmación.

Finalmente, usando nuestros procedimientos, hemos determinado que el centro geográfico de la Argentina se encontraría aproximadamente en coordenadas $-34,6989^\circ$, $-64,7597^\circ$, paraje ubicado al sur de la provincia de Córdoba, a 10 km al noroeste de Villa Huidobro. Es decir, según nuestros cálculos, si algún centro poblado merece llamarse centro geográfico de la Argentina, ese centro es la ciudad de Villa Huidobro.

Apéndice. Otra definición de centro de masa

En [6] se da una definición de centroide diferente a la que es utilizada en forma estándar. Nosotros daremos esa definición con el nombre de “centro de masa euclidiano” y demostraremos que es equivalente a la definición de centro de masa. La nueva definición se basa en la regla euclidiana de nivel que vimos en la Sección 2.

Lema A.1. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $m_1, m_2 > 0$, entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v = t_0(v_2 - v_1) + v_1$ para algún $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\|v_1 - v\|m_1 = \|v_2 - v\|m_2$.

Demostración. Sea $v(t) = t(v_2 - v_1) + v_1$ y $\phi(t) = \|v_1 - v\|m_1 - \|v_2 - v\|m_2$. Entonces $\phi(0) = -m_2 < 0$ y $\phi(1) = m_1 > 0$, como ϕ es una función continua, por el Teorema de los valores intermedios obtenemos que existe t_0 tal que $\phi(t_0) = 0$ y por lo tanto $v = v(t_0)$ satisface $\|v_1 - v\|m_1 = \|v_2 - v\|m_2$. \square

El centro de masa euclidiano se obtiene vía un proceso inductivo.

Definición A.2. Sean v_1, \dots, v_k vectores en \mathbb{R}^n tal que v_i tiene masa m_i .

[$k = 1$] v_1 es el centro de masa euclidiano del sistema $\{(v_1, m_1)\}$.

[$k > 1$] Supongamos que el vector v' es el centro de masa euclidiano del sistema

$\{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k-1}$ y $m' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$, entonces el centro de masa euclidiano del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k}$ es el vector v tal que $\|v' - v\|m' = \|v_k - v\|m_k$ (la existencia de v está garantizada por el lema anterior).

Ejemplo A.3. Sean $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ puntos en \mathbb{R} con masas $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$. Entonces el centro de masa euclidiano del sistema $\{(x_1, m_1), (x_2, m_2)\}$ es 0 y $m_1 + m_2 = 2$. Ahora bien, el centro de masa euclidiano de $\{(0, 2), (2, 3)\}$ es $2/3$. Es decir el centro de masa euclidiano del sistema total es $2/3$

No es claro por definición que el centro de masa euclidiano de un sistema no dependa del orden de los puntos, sin embargo el siguiente teorema despeja toda ambigüedad.

Teorema A.4. Sean v_1, \dots, v_k vectores en \mathbb{R}^n tal que v_i tiene masa m_i . Entonces el centro de masa del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k}$ es igual a su centro de masa euclidiano.

Demostración. Para $k = 1$ es claro que ambas definiciones coinciden.

Si $k > 1$, supongamos que el resultado vale para $k - 1$, es decir si v' es el centro de masa euclidiano del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k-1}$, entonces

$$v' = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot v_i}{m'}$$

donde $m' = \sum_{i=1}^{k-1} m_i$. Sea v el centro de masa del sistema $\{(v_i, m_i)\}_{i=1, \dots, k}$, el resultado quedará probado si demostramos que

$$(A.1) \quad \|v' - v\|m' = \|v_k - v\|m_k.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \|v' - v\|m' &= \|m'v' - m' \frac{\sum_{i=1}^k m_i v_i}{m}\| = \|\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - m' \frac{\sum_{i=1}^k m_i v_i}{m}\| \\ &= \frac{1}{m} \|m \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - m' \sum_{i=1}^k m_i v_i\| \\ &= \frac{1}{m} \|\sum_{j=1}^k m_j \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j \sum_{i=1}^k m_i v_i\| \\ &= \frac{1}{m} \|\sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} m_j m_i v_i + m_k \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} m_j m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j m_k v_k\| \\ &= \frac{1}{m} \|m_k \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{j=1}^{k-1} m_j m_k v_k\| \end{aligned}$$

es decir

$$\|v' - v\|m' = \frac{m_k}{m} \|\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_j v_k\|.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|v_k - v\|m_k &= \|v_k - \frac{\sum_{i=1}^k m_i v_i}{m}\|m_k \\ &= \|\sum_{i=1}^k m_i v_k - \sum_{i=1}^k m_i v_i\| \frac{m_k}{m} \\ &= \|\sum_{i=1}^{k-1} m_i v_k - \sum_{i=1}^{k-1} m_i v_i\| \frac{m_k}{m}. \end{aligned}$$

Luego la ecuación (A.1) se satisface y eso demuestra el teorema. □

Agradecimientos

Deseo agradecer a Eduardo Hulett y Marcos Salvai, ambos de FAMAF, por sus útiles comentarios y sugerencias para el presente artículo. En particular, Marcos me acercó el artículo de Galperín, en el cual se basa una parte importante del trabajo.

También deseo agradecer al comité editorial de la Revista de Educación Matemática de la UMA, y muy especialmente a Leandro Cagliero, por revisar y sugerir cambios en el trabajo que resultaron, a mi entender, en una mejora del mismo.

Referencias

- [1] U.S. NATIONAL OCEAN SERVICE, *Geographical Center of the United States*, U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Survey, 3 pp. (1960).
- [2] U.S. NATIONAL OCEAN SERVICE. *Geographical Center of the United States*. U.S. Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Survey, 3 pp. (1960).
- [3] U.S. GENERAL SERVICES ADMINISTRATION, NATIONAL ARCHIVES AND RECORDS SERVICE. *Code of Federal Regulations. Title 14, Aeronautics and space*. Washington, D.C. : Office of the Federal Register, (1961).
- [4] U.S. CENSUS BUREAU, GEOGRAPHY DIVISION . *Centers of Population for the United States 1950 - 2010* Washington, D.C. : U.S. Department of Commerce, (2011).
- [5] A. J. GHARRETT, R. G. GUSTAFSON ET AL. *Genetics of Subpolar Fish and Invertebrates*. Springer Science & Business Media, 471 pp. (2012).
- [6] G.A. GALPERIN. *A Concept of the Mass Center of a System of Material Points in the Constant Curvature Spaces*. Commun. Math. Phys. 154, 63-84 (1993).
- [7] AUSTRALIAN GOVERNMENT, GEOSCIENCE AUSTRALIA. *Centre of Australia, States and Territories*. Accedido en <http://www.ga.gov.au> el 8 de mayo de 2018.
- [8] FUSION TABLES. *Natural Earth*. Accedido en <https://fusiontables.google.com/DataSource?dsrclid=419167> el 11 de mayo de 2018.

ALEJANDRO L. TIRABOSCHI

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF) – Universidad Nacional de Córdoba (UNC) / Centro de Investigación y Estudios en Matemática (CIEMF).

Av. Medina Allende s/n , Ciudad Universitaria (X5000HUA) Córdoba, Argentina.,

(✉) alejandro.tiraboschi@unc.edu.ar

Recibido: 22 de mayo de 2018.

Aceptado: 25 de julio de 2018.

Publicado en línea: 30 de agosto de 2018.
