Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 2 (2018), páginas 7 – 21
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

SOBRE CARTAS, DESCARTES, Y UN PROBLEMA DE JOSEPHUS

Carlos D'Andrea y Adrián Paenza

§1. Introducción. El Problema

Muchos de los problemas de matemática que Ud. encuentra en un libro, en la contratapa de un diario, o en un desafío de esos para entretenerlo arriba del bus, metro o tren, tienen orígenes insólitos, y una etapa de elaboración que incluye a varias personas que van "degustando" y modificando el enunciado junto con sus posibles soluciones. Como si todo un equipo de cocina estuviera dedicado a la creación de un plato que Ud. degustará al final. Como suele ocurrir en la gastronomía, Ud. no puede ver lo que ocurre en la cocina (y a veces es mejor que no lo vea), pero es un proceso realmente interesante que merece la pena documentarse y en algunos casos compartirse. Aquí le presentamos uno de ellos.

A fines de marzo de 2014, Adrián le escribió el siguiente mensaje a Carlos:

> *...te escribo en este caso porque quería contarte un problema que me enviaron, cuya solución CONOZCO, pero no porque la hubiera detectado yo, sino porque fue incluida por el señor que me la presentó (Luis Crippa, un lector de Página 12).*
>
> *Me resulta muy interesante el problema y lo voy a escribir acá, pero me interesaría saber cómo pensarlo porque hasta acá, no pude llegar a la solución que él propone y que es hiper-elegante y muy interesante también... pero estoy seguro que a vos (o a Martín Sombra, o a alguno de tus amigos de la Universidad de Barcelona) se les va a ocurrir, y entonces me dará oportunidad de poder escribir sobre el problema. Acá va...*

Suponé que hay un mazo de cartas numeradas y ordenadas en forma creciente. No importa el número, digamos que están apiladas de esta forma:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, (n-1), n.$$

El proceso que se le hace a este mazo es muy sencillo: uno toma el mazo, pone la primera carta al final de la pila (es decir, la primera ahora pasa a ser la última carta en el mazo), y tira (descarta) la segunda, pone la tercera al final del mazo, y tira la cuarta, pone abajo la quinta, y descarta la sexta... etc... etc.... y así se repite esto hasta que queda una sola carta. El objetivo es encontrar la última carta en función de n, el número inicial de cartas.

Las primeras en descartarse son las pares, claramente, pero llegar hasta la que era la última carta en la formación inicial, dependerá de la paridad y otras cosas de ese tipo. De hecho, tengo soluciones parciales (y también la solución final, pero no sé cómo pensarlo)... Nada más por ahora... Si tenés tiempo y ganas... allí fue.

Le sugerimos "jugar" un rato a este juego con un mazo con pocas cartas (es decir, n pequeño) para asegurarse de haber entendido las reglas del mismo. Por ejemplo, si uno tuviera un mazo de 5 cartas ordenadas así: 1-2-3-4-5, la secuencia de cartas descartadas sería: $2, 4, 1, 5$. Así que la carta "ganadora" -la que nunca fue retirada del mazo- sería la número 3. Y si hubieran 8 cartas, se descartarían en este orden: $2, 4, 6, 8, 3, 7, 5$, y "ganaría" la carta número 1.

§2. Un problema recuerda a otro

Como en la casa de Carlos no hay mazos de cartas (y Carlos estaba en su casa), tuvo que buscarse un computadora que simulara el juego. Unos minutos más tarde, con unas líneas de código, consiguió calcular la siguiente tabla. Llamaremos f a la función que a cada n le asigna la carta "ganadora" del juego, es decir que $f(n)$ es la última carta que queda luego de realizar el descarte de todas las otras. La tabla de los primeros valores de f es esta:

n	$f(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	3
6	5
7	7
8	1
9	3
10	5

n	$f(n)$
11	7
12	9
13	11
14	13
15	15
16	1
17	3
18	5
19	7
20	9

Los números que aparecen en esta tabla en principio no dicen mucha cosa, o al menos a Carlos no le decían mucho. ¿A usted sí? Este es un buen momento para que piense, a ver si la tabla le sugiere algo, si encuentra algún patrón, fórmula, etc... Está claro (y le proponemos demostrar esto que sigue como ejercicio) que si n es una potencia de 2, la última carta que quedará en el "mazo" será la número 1, es decir $f(n) = 1$ si $n = 2^k$ para algún entero no negativo k.

Pero había algo en esta tabla que le sonaba familiar a Carlos, y se le vino a la cabeza el Problema 3 de la 29° Olimpíada Matemática Internacional que tuvo lugar en Canberra, Australia, en 1988, que dice así [4]:

Una función g se define sobre los enteros positivos como

$$\begin{aligned} &g(1) = 1, \\ &g(3) = 3, \\ &g(2n) = g(n), \\ &g(4n+1) = 2g(2n+1) - g(n), \\ &g(4n+3) = 3g(2n+1) - 2g(n). \end{aligned}$$

Determina todos los enteros positivos n menores o iguales que 1988 para los cuales $g(n) = n$.

Este enunciado poco tiene que ver con cartas y descartes, pero lo que en realidad recordaba Carlos no era tanto el enunciado del problema, sino la solución que encontró (no él, la que encontró escrita por ahí) del mismo y que comenzaba con algo así: "hagamos una tabla de los primeros valores de g". Y la tabla era ésta:

n	$g(n)$
1	1
2	1
3	3
4	1
5	5
6	3
7	7
8	1
9	9
10	5

n	$g(n)$
11	13
12	3
13	11
14	7
15	15
16	1
17	17
18	9
19	25
20	5

Que tampoco le decía mucho a Carlos esta tabla. Lo bueno venía en el paso siguiente de la resolución que encontró él de ese problema: "Escribamos ahora en binario esta tabla", es decir, escribamos los valores de n y $g(n)$ en base 2:

n	$g(n)$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	101
110	11
111	111
1000	1
1001	1001
1010	101

n	$g(n)$
1011	1101
1100	11
1101	1011
1110	111
1111	1111
10000	1
10001	10001
10010	1001
10011	11001
10100	101

Y acto seguido venía en esa resolución que encontró Carlos, la frase "conjeturamos inmediatamente que $g(n)$ = el número que resulta de escribir 'el reverso' de n en base 2". Observe la tabla y verá que "al dar vuelta" (es decir leer de derecha a izquierda) los dígitos de -por ejemplo- 1100, se obtiene el número 0011, que misteriosamente coincide con el valor de g de este número. Y así con todos los otros pares de la tabla. Una vez hecha esta conjetura, no es difícil demostrarla por inducción utilizando las propiedades de g que se dan en el enunciado, y el Problema 3 de la IMO se convierte en "calcular cuántos números enteros positivos menores o iguales que 1988 son capicúas en base 2", un ejercicio fácil de resolver.

§3. La Conjetura

Volviendo a nuestro problema, como a Carlos no se le ocurría ningún patrón mirando la tabla de $f(n)$ en notación decimal, hizo lo único que se le vino a la cabeza en ese momento, la pasó a binario:

n	$f(n)$
1	1
10	1
11	11
100	1
101	11
110	101
111	111
1000	1
1001	11
1010	101

n	$f(n)$
1011	111
1100	1001
1101	1011
1110	1101
1111	1111
10000	1
10001	11
10010	101
10011	111
10100	1001

Con todo el "pre-calentamiento" hecho hasta aquí, uno tendría que estar tentado a decir "conjeturamos inmediatamente que...." pero... ¿qué es lo que conjeturamos? Le sugerimos a Ud. que piense un rato estudiando esta tabla para ver si aparece alguna conjetura antes de seguir.

Ahora viene la nuestra.

Conjetura 1. *$f(n)$ es el número que resulta de "quitarle" a n -escrito en binario- el primer dígito de la izquierda, y colocarlo como último dígito (a la derecha).*

Por ejemplo, si el número es -en binario- 100111, al quitarle el dígito de la izquierda y agregarlo al final de todo, queda 001111, o sea que $f(100111)$ debería ser 11111, lo cual se puede confirmar rápidamente. Y claramente si n es una potencia de 2, en binario tendría que escribirse como 1000...000, y de allí sale rápidamente que

$$f(n) = f(1000\ldots000) = 000\ldots0001 = 1$$

que es lo que ya sabíamos.

Quizás Ud. haya llegado a alguna conjetura pero que no involucra para nada los números binarios y se sienta desanimado. No tire por la borda lo que haya pensado porque quizás está en lo cierto, o por buen camino. Hay una manera de enunciar la conjetura de más arriba sin pasar por la escritura binaria.

Conjetura 2. *Si $n = 2^j + k$ con $0 \le k < 2^j$, entonces $f(n) = 2k + 1$.*

Le proponemos como ejercicio demostrar que ambas conjeturas dicen la misma cosa. Para ello es suficiente con recordar que todo entero positivo n se escribe de manera única como $n = 2^j + k$ con j, k enteros no negativos y $0 \le k < 2^j$. De hecho, 2^{j+1} es la primer potencia de 2 mayor que n, y $j + 1$ es la cantidad de dígitos que tiene n en base 2.

¿Cómo se podría demostrar cualquiera de las conjeturas de más arriba? El Problema 3 de la IMO de 1988 se resolvía rápido"porque habían algunas propiedades de la función g que uno podía utilizar luego para demostrar por inducción que esa función daba vuelta todos los dígitos en binario del número inicial, pero en nuestro juego no existen tales propiedades. ¿O sí? Quizás habría que encontrar algunas propiedades de f que también cumpla esa operación extraña de quitar un dígito en binario y trasladarlo hacia la derecha. Jugando un poco con sus propiedades, Carlos encontró las siguientes características de tal función. No es difícil de demostrar por inducción el enunciado siguiente, que también dejamos como ejercicio para el lector:

Proposición 1. *Si h se define sobre los enteros positivos como:*

- $h(1) = 1$,
- $h(2n) = 2h(n) - 1$,
- $h(2n + 1) = 2h(n) + 1$,

entonces $h(n)$ es el número que resulta de quitarle a n su dígito más significativo (el de la izquierda) cuando se lo escribe en base 2, y agregarlo como dígito de las unidades (el de la derecha), siempre en la misma base.

Obviamente que "el resto" del trabajo es mostrar que $h(n)$ y $f(n)$ -nuestra función que cuenta las cartas ganadoras- son la misma función. Está claro que $f(1) = 1 = h(1)$, y también es fácil de demostrar que $f(2n) = 2f(n) - 1$, ya que esto solamente dice que al comenzar con un mazo con un número par ($2n$) de cartas, después de la primer pasada nos quedan solamente las cartas impares. O sea que la ganadora de ambos juegos –de un mazo de $2n$ cartas numeradas de 1 a $2n$ y de un mazo de n cartas numeradas $1, 3, 5, 7, \ldots$– es la misma carta, solo que hay que "traducir" la numeración natural de la primera con respecto a la segunda, y el "diccionario" justamente es $f(2n) = 2f(n) - 1$. En la sección que sigue, se muestra con más detalle este argumento.

La que no resultaba fácil (al menos no le resultaba fácil a Carlos) de mostrar era la otra propiedad, que $f(2n + 1) = 2f(n) + 1$. Luego de varios frustrados intentos, Carlos decidió hacer caso a Adrián y llevar el problema a sus amigos de la Facultad de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, Martín Sombra -mencionado por Adrián en su mensaje inicial- uno de ellos. Martín no estaba ese día por allí, pero comparte oficina con Juan Carlos Naranjo, quien tuvo que escuchar las exploraciones, conjeturas y frustraciones de Carlos, y como era de esperarse una hora y media más tarde Juan Carlos tenía el problema resuelto.

§4. Solución de Juan Carlos Naranjo

Recordemos que $f(n)$ es la carta que queda última. Está claro que $f(1) = 1$. Vamos a demostrar estas dos igualdades:

$$f(2n) = 2f(n) - 1 \quad \text{y} \quad f(2n + 1) = 2f(n) + 1.$$

Veamos la primera de ellas. Después de la primer "pasada" con un mazo de $2n$ cartas, quedan éstas: $1, 3, 5, \ldots, 2n + 1$. Notar que obviamente hay n cartas después de la primer ronda, y que el juego comienza otra vez como si fuera desde uno, pero en lugar de tener las cartas numeradas del 1 al n, son todas impares. Luego, jugar con cualquiera de los dos mazos (el que tiene los primeros n números y el que tiene los primeros n números impares) es esencialmente lo mismo si uno hace la correspondencia:

$$\begin{aligned}
1 &\longleftrightarrow 1 \\
2 &\longleftrightarrow 3 \\
3 &\longleftrightarrow 5 \\
&\ldots \\
m &\longleftrightarrow 2m - 1 \\
&\ldots \\
n &\longleftrightarrow 2n - 1.
\end{aligned}$$

Y bajo esta correspondencia se tiene entonces que en el mazo de n cartas quedará última en el proceso de descarte la carta m (i.e. $f(n) = m$), si y solamente si la última carta que quedará en el proceso de descarte en un mazo de $2n$ cartas es la $2m - 1$, o sea

$$f(2n) = 2m - 1 = 2f(n) - 1.$$

Para ver la segunda igualdad, es decir que $f(2n+1) = 2f(n)+1$, hacemos lo mismo que antes: en el proceso de descarte después de la primer pasada al mazo con $2n+1$ cartas quedarán: 1, 3, 5, . . ., $2n + 1$, pero notar que aquí el 1 se tacha de la lista ya que aparecerá en posición par durante la segunda pasada, con lo que en realidad es como si comenzáramos el juego con 3, 5, ... $2n + 1$ y este juego será equivalente al inicial 1, 2, ..., n vía la correspondencia $m \longleftrightarrow 2m + 1$ como arriba. De aquí se deduce entonces la segunda identidad,

$$f(2n + 1) = 2f(n) + 1$$

y esto completa la demostración.

Con la resolución de Juan Carlos, estamos en condiciones de demostrar lo que queríamos:

Demostración de la Conjetura 2: Por doble inducción, primero sobre j y luego sobre k. Para $j = 0$ es obvio ya que k solo puede valer 0, y el enunciado es trivial en este caso.

Si $j > 0$, usamos ahora inducción en $k = 0, \ldots, 2^j - 1$. Para $k = 0$, se tiene, por la primera de las propiedades demostradas de f,

$$f(2^j) = 2f(2^{j-1}) - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Y en general, si $0 < k < 2^j$, entonces hay dos opciones:

- k es par, es decir $k = 2t$ con $t < 2^{j-1}$. Aquí, usamos la primera de las propiedades de f junto con la hipótesis inductiva, calculamos

$$\begin{aligned} f(2^j + k) &= f(2^j + 2t) \\ &= f(2(2^{j-1} + t)) \\ &= 2f(2^{j-1} + t) - 1 \\ &= 2(2t + 1) - 1 \\ &= 4t + 1 \\ &= 2k + 1, \end{aligned}$$

  y la identidad vale en este caso.

- k es impar, es decir $k = 2t + 1$ con $t < 2^{j-1}$. Aquí usamos la segunda de las propiedades demostradas arriba de f junto con la hipótesis inductiva, y nos queda

$$\begin{aligned} f(2^j+k) &= f(2^j+2t+1) \\ &= f(2(2^{j-1}+t)+1) \\ &= 2f(2^{j-1}+t)+1 \\ &= 2(2t+1)+1 \\ &= 2k+1, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Carlos recopiló toda esta información y se la pasó a Adrián con el mensaje siguiente:

hola Adrian,
te escribo con copia a Juan Carlos Naranjo, quien acaba de rematar tu problema de las cartas. Yo a lo que llegué ayer fue –después de calcular varios ejemplos a mano– que la fórmula debería ser $f(2^j+k) = 2k+1$ con k entero entre 0 y menor que 2^j (todo entero positivo se puede escribir de manera unica así, y aquí $f(m)$ es la última carta que "sobrevive" al proceso en una baraja de m cartas). Estuve por un buen rato intentando una demostración por inducción pero no me salió.

Este mediodía le pasé toda esta información a JC (problemas + conjetura + ensayos de demostración), y una hora y media mas tarde, me viene él con una demostración que es relativamente fácil de hacer de estas identidades:

$$\begin{aligned} f(2m+1) &= 2f(m)+1 \\ f(2m) &= 2f(m)-1 \end{aligned}$$

(esto lo podés demostrar esencialmente mirando las dos primeras "corridas" del proceso de descarte de la baraja).
Con ésto, sale fácil por inducción que

$$f(2^j+k) = 2k+1,$$

que es lo que se nota cuando uno hace la lista de los primeros valores de f.

Ahora tenemos curiosidad por saber cuál es la solución que tenés vos. Después te paso con más cuidado una demostración de las identidades de Juan Carlos.
Un abrazo,
Carlos

Lo interesante del mensaje que envió Carlos a Adrián fue que se había omitido totalmente la escritura en base 2, como si Carlos tuviera "vergüenza" de admitir que algo así de complicado podría ocurrir. Por otro lado, Adrián decía tener "la solución" así que o iba por allí la cosa o tendría que simplificarse. El equipo Barcelona estaba intrigado. La respuesta de Adrián no tardó en llegar:

... te escribo desde el teléfono y por eso ni puedo ser extenso ni preciso pero después amplío, pero lo impactante es la solución que me mandó el lector que me apuro a contarte y ver si a ustedes se les ocurre por qué es cierta:

Si uno escribe el número de cartas en base dos, y luego hace la siguiente modificación:
Saca el uno del principio de esa escritura y la agrega al final, el nuevo número que queda escrito en base 2 es la única carta resultante.
Por ejemplo, si $(1101)_2 = 13$ *es el número inicial de cartas, saco el primer "uno" y lo agrego al final, obtengo 1011 que es 11; lo mismo con, digamos,* $24 = (11000)_2$ *lo transformo en* $(10001)_2 = 17$. *Comprobalo vos.*

Espero haber hecho bien las cuentas porque estoy a punto de tomar un subte pero esa es la idea. Vi la demostración de Juan Carlos Naranjo (agradecésela por favor). Está muy muy buena, pero es imposible que la escriba en el diario... en uno de los libros... quizás, pero ciertamente no la puedo publicar en Página 12 porque tendría que escribir un 'tratado' primero para escribir el número en binario, y después, hablar de inducción y doble inducción... transforma en virtualmente imposible para mí escribir el problema...
SIN EMBARGO, me pareció precioso el problema, la demostración y las reflexiones de ustedes...
COMO SIEMPRE, gracias!!!

§5. La solución de Alejandro de Miquel

A Carlos y a Juan Carlos también les pareció precioso el problema, y como en ese momento en la facultad estaban los dos a cargo del entrenamiento de un grupo de alumnos que iban a participar en un torneo universitario de matemáticas, les propusieron este problema como parte del entrenamiento. La idea era ver qué podían hacer, y con alguna esperanza de que existiera alguna simplificación de la resolución del problema. Pasaron varios días, y no hubo respuesta alguna por parte de los alumnos, hasta que una noche se encuentra Carlos en su bandeja de correo electrónico con un texto de unas pocas líneas escrito por uno de ellos, Alejandro de Miquel, donde en la primer mitad del mismo se demostraba cuidadosamente (por inducción) que si n es una potencia de 2, entonces $f(n) = 1$. Carlos no le prestó mucha atención a esa resolución. Seguramente Alejandro entendió mal el enunciado o estaba resolviendo casos particulares. Pero al cabo de unos días hubo algo que lo hizo volver al escrito y mirarlo más detenidamente. Lo transcribimos textualmente aquí para que Ud. pueda apreciarlo y sacar sus conclusiones.

Observemos primero que si tenemos $n = 2^m$ *cartas, entonces la carta que nos quedará al final será la número 1. Esto se puede ver por inducción: está claro que si tenemos* $n = 2^0 = 1$ *cartas, entonces la última que queda es la número 1.*

Supongamos que esto es cierto para un cierto 2^k, $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que tenemos una pila de 2^{k+1} cartas. Las primeras 2^k cartas que quitaremos serán todas las que sean de número par. Tras haber quitado la carta número 2^{k+1} nos quedará una pila de 2^k cartas cuya primera carta será la carta número 1, que, por hipótesis de inducción, será con la que nos acabaremos quedando al final de todo.

Por lo tanto, deducimos que si $n = 2^m + k$, con $k \leq 2^m - 1$, entonces la carta que nos quedará al final será la misma que esté encima de la pila justo tras haber quitado las k primeras cartas. Como quitamos una carta de cada dos, la carta que buscamos será la número $2k + 1$ (observemos que $2k + 1 \leq 2^m + k$).

Lo que Alejandro nos estaba "enseñando" en la última parte de su razonamiento era lo siguiente: si yo tengo un mazo de 2^m cartas, sé muy bien que la carta ganadora es la número 1. Si mi mazo tiene más cartas que 2^m (por ejemplo, $2^m + k$ con $k > 0$), con sacar las k primeras cartas sabré con seguridad que la carta ganadora será aquella que quede al principio del mazo (ya que en ese momento tendré un mazo con 2^m cartas, y en esos mazos siempre "gana" la primer carta). Calcular cuál es esa carta, la que queda primera luego de descartar (nunca mejor dicho) k cartas, es esencialmente hacer la operación $f(n)$ que describimos más arriba.

¿No le parece maravilloso ese razonamiento? No necesita Ud. ni pasar por binario, ni por doble inducción, ni por nada. La resolución de Alejandro fue compartida y celebrada por Carlos y Juan Carlos, y luego transmitida a Adrián:

... En nuestra facultad tenemos un grupo de alumnos (unos 4 o 5) que van a competencias de matemática universitarias, y junto con Juan Carlos nos encargamos un poco de su entrenamiento. Les propuse el problema de las cartas que me pasaste hace un par de semanas, y mirá la solución elegantísima que encontró uno de ellos (va en el archivo adjunto).

Esencialmente se basa en esta idea (que me costó un rato entenderla leyendo su escrito pero porque era tan simple!): si yo sé que cuando la baraja tiene 2^m cartas la que está al principio es la que va a "ganar" (este argumento es fácil de mostrar), lo único que tengo que hacer es "sacarme tantas cartas de encima" hasta que en el mazo me quede una cantidad de cartas que sea igual a una potencia de 2, y eso es todo!

Esta solución me parece simplísima, no usa inducción ni nada por el estilo (técnicamente necesitás inducción para demostrar que $f(2^m) = 1$ para todo m, pero eso es muy fácil de ver o de creer). A mí me parece muy buena la resolución, y -como cada vez que me encuentro con algo así- me produce esa sensación mezclada de entre "júbilo" (¿suena muy papal esta palabra, no?) por ver algo tan bonito y frustración porque no se me ocurrió antes a mi :-)

La respuesta de Adrián también llegó en ese tono:

> *... recién veo la demostración que me parecio SENCILLAMENTE ESPECTACULAR, y una vez más... muestra lo increíble que es la matemática con alguien que es capaz de encontrar una solución totalmente naif, sin saber si el problema era fácil, difícil, complicado técnicamente... nada... fue y lo hizo, lo pensó y lo hizo... buenísimo!!!! Te agradezco muchisimo que me lo hubieras mandado y me gustaría en algún momento utilizar el nombre del estudiante (pero nunca lo haría si no fuera que vos le pedís y/o preguntás si me autorizaría a mencionarlo si es que escribo la historia... que te parece?)*

Obviamente Alejandro autorizó a Adrián a utilizar su nombre en lo que sea, pero el problema todavía tenía más jugo para ser exprimido: durante el mes de mayo cumplen años Carlos, Juan Carlos y otros colegas de su facultad (y también Adrián). Para celebrarlo, suelen reunirse en la casa de Juan Carlos (si Ud. pasa por Barcelona durante ese mes y nos avisa, podría recibir una invitación a la fiesta, aunque Adrián se queja de no haber sido nunca invitado). Carlos decidió llevar "el juego de las cartas" a la reunión donde habían varios matemáticos y sus familias. Para ello se imprimió "un mazo de 100 cartas" que en realidad eran tarjetas numeradas del 1 al 100, y las tenía ordenadas (del 1 al 100). Se presentó como hace "el mago en la reunión", pidió a uno de los niños allí presentes que dijeran un número del 1 al 100. Este iba a ser el número con el que íbamos a "jugar". Por ejemplo, si el número elegido era 79, el mazo con el que nos íbamos a quedar tendría las primeras 79 cartas.

Acto seguido, Carlos explicó las reglas del juego, y preguntó antes de comenzar si serían capaces de adivinar cuál sería la última carta que iba a quedar en el mazo. Mientras la gente hacía sus apuestas, Carlos comenzaba a deshojar el mazo de cartas. Obviamente que el juego consiguió atraer a buena parte de los participantes (después de todo, se trataba de una reunión de matemáticos), y tuvimos conjeturas de lo más desopilantes (como que $f(n)$ era el primo "más próximo" a n, que los expertos en teoría de números se apuraron a conjeturar con demasiado optimismo) mientras iba cambiando el número de cartas del mazo y seguíamos jugando "en vivo" al juego.

En unos pocos minutos José Ignacio Burgos, que trabaja en el ICMAT de Madrid y que también estaba presente en la fiesta (pese a cumplir años en diciembre), había conseguido encontrar la fórmula y una demostración de la misma. Esto merece ser comentado porque el contexto en donde estábamos era una reunión de esas típicas de amigos, con ruido, conversaciones, bebidas, y demás. Y aún así José Ignacio consiguió concentrarse y encontrar una demostración que era totalmente distinta de la que teníamos nosotros, que no la reproducimos aquí primero porque no la recordamos bien (no había ni papel ni lápiz para documentarla), pero también porque al contarle la que había conseguido Alejandro, él y nosotros coincidimos en que la de Alejandro era por lejos la más simple de las que habíamos visto, dimos por acabado el juego y continuamos con la juerga.

§6. ¿Epílogo o Prólogo?

El "disparador" de toda esta aventura no fue ni Carlos ni Adrián, sino un email enviado por Luis Crippa a Adrián a principios de 2014, que transcribimos a continuación. El motivo por el cual no comenzamos con esta carta al principio de este relato es que no solamente ese texto contiene el problema que nos tuvo entretenidos por varios meses, sino también la solución del mismo que Adrián muy generosamente la ocultó al principio para no arruinarles la diversión (que fue abundante) a los otros. Aquí va:

> *Don Adrián, me tomo la libertad de enviarle un problema que me mantuvo entretenido durante unos días, espero que le guste:*
> *Tengo un mazo de cartones del tamaño y forma de cartas, numerados del 1 al 1997 y ordenados en forma consecutiva de menor a mayor, de forma tal que el cartón 1 está en la parte de arriba del mazo, mientras que el número 1997 está al final. Voy a hacer una selección de esos cartones empleando la siguiente metodología:*
>
> *Tomo el primer cartón (con el número 1) y lo coloco debajo (al final) del mazo. El cartón que sigue (con el número 2), lo descarto. El próximo cartón, con el número 3, también lo coloco debajo del mazo y el siguiente (con el número 4) lo descarto. Obviamente, con este procedimiento, en la primera "vuelta"solo nos quedan los cartones que tienen números impares.*
> *Continúo con este procedimiento de pasar un cartón al fondo del mazo y descartar el siguiente, hasta que al final me quedo con un solo cartón.*
>
> *La pregunta es: Qué número tiene ese cartón?*
> *Lo interesante es encontrar una fórmula general que permita determinar el nro. del cartón que queda al final, en función sólo del nro. de cartones.*
> *Pero una forma totalmente insólita (por lo menos para mí) fue la que vi publicada en una columna de problemas matemáticos en una revista de divulgación:*
>
> *Escribo el n° de cartones en base 2:*
> *(1997): 11111001101*
> *Permuto el dígito correspondiente a la potencia más alta de 2 (en este caso es 1) y lo coloco en la posición de la potencia cero:*
> *Con este procedimiento, el número 11111001101 pasa a ser: 11110011011 y este último número resulta ser la representación en base 2 del número que figura en el cartón que nos queda al final, que en base 10 es: 1947.*

Excelente sus columnas en Página 12!
Saludos!
Luis

Además del "nodo Barcelona", hay un equipo muy grande de personas con profesiones de lo más diversas que piensan, se divierten, y trabajan con Adrián este tipo de problemas y entretenimientos matemáticos. Otro de los involucrados en la resolución de este enunciado fue Juan Sabia, matemático de la Universidad de Buenos Aires, quien escribió lo siguiente a Adrián en esos días:

Hola, Adrián. Qué tal?
Creo que resolví el problema, pero usando algo de matemática (principio de inducción, por ejemplo...)
Te cuento: Si hay n cartas, llamo $f(n)$ a la última carta. Se puede ver que

$$f(1) = 1, \quad f(2k) = 2f(k) - 1 \quad y \quad f(2k+1) = 2f(k) + 1$$

(esto sale analizando si el número es impar o par, y viendo que uno hace lo mismo con las cartas impares que le quedan).

Ahora bien, si $n = 2^h + r$, con $0 \leq r < 2^h$ (es decir, escribo a n como la potencia de 2 más alta menor que n y veo el r que sobra), resulta que por inducción la función anterior es $f(n) = 2r + 1$.
Entonces, si me das un número cualquiera (37), lo escribo como la potencia de 2 más cerca y veo qué sobra ($37 = 32 + 5$) y resulta que la última carta va a ser $2 \cdot 5 + 1 = 11$.
Hay una forma linda de calcular este número en binario. Al desarrollo en binario de n le tachás el primer uno y le agregás un uno al final! Traté de pensar si se me ocurría algo con esto (para que sea más accesible la solución) pero por ahora, nada...
Si se me ocurre algo mejor, chiflo.
Beso,
Juan

Si Ud. es fan incondicional de los libros y artículos de Adrián se estará preguntando ahora que dónde y cuándo apareció este artículo con el juego de las cartas. He aquí el desenlace: tres años después, en junio de 2017, Carlos estaba leyendo la versión preliminar del libro de Adrián que acabó publicándose a fines de ese año [1], y se encuentra con "El problema de Josephus" que es lo suficientemente famoso como para merecer una página en Wikipedia [2], y bastante macabro también: esencialmente hay una rueda de personas que se van matando "alternadamente" (el primero mata al segundo, el tercero al cuarto, etc, etc, etc.) hasta que sobrevive una sola persona. ¿Y quién es esta persona? En la presentación que hace Adrián de ese problema (que Ud. puede encontrar también gratis en [3]), había un análisis exhaustivo de casos y heurísticas bastante interesantes y también complejas, que hizo que Carlos llevara la situación a la hora del café con sus colegas del departamento. Y fue José Ignacio Burgos -que justo ese día estaba de paso por Barcelona tomando café con el resto- quien nuevamente luego de pensar un rato dijo "¿No habíamos resuelto ya este problema hace tiempo?" Y ahí caímos todos -y mas tarde caería Adrián- que estábamos esencialmente ante la misma situación que la del mazo de cartas, solo que "el modelo" era distinto: Ud. cambia "cartas" por "prisioneros", "descartar" por "matar", y "una baraja" por "una rueda" y obtiene el mismo problema!

Este fenómeno puede parecer extraño, pero es algo muy habitual que ocurre en matemática y con seguridad en otros aspectos de la vida: resolvemos un problema determinado y luego nos volvemos a encontrar con la misma situación pero en un contexto totalmente diferente. Y en ese caso, "resolver" el problema consistirá esencialmente en mostrar que ambas situaciones son equivalentes, y que la resolución de uno también sirve para el otro. A veces incluso ocurre que nos encontramos con exactamente el mismo enunciado unos años después y sin recordar que ya "lo teníamos resuelto", ¡producimos una nueva resolución totalmente distinta del mismo! Esto nos ha pasado, mucho, y si bien puede ser preocupante que cuanto más mayor es uno más le pasan estas cosas (Adrián afirma que no solamente es el mayor de todos en edad, sino aún sumando las edades de todos los matemáticos involucrados en este artículo), lo bueno de estos "olvidos" es que nos obligan a pensar de nuevo, y a veces conseguir incluso mejores soluciones o soluciones alternativas a un mismo problema que jamás las habríamos encontrado de no haber sido por este olvido.

En el caso de nuestro problema de cartas/Josephus, todavía no hemos encontrado nada que nos guste más que la resolución de Alejandro de Miquel, y por eso decidimos escribir esta nota, para poder compartirla con Ud. y con la seguridad de que nuevas y bellas resoluciones de este enunciado, así como generalizaciones en direcciones de las más diversas aparecerán a partir de aquí. El mazo queda en sus manos ahora, y a Ud. le toca barajar...

§7. Agradecimientos

Agradecemos al comité editorial de la Revista de Educación Matemática de la UMA por haber revisado nuestro escrito y darnos la oportunidad de compartirlo aquí. En particular, agradecemos a Leandro Cagliero por sus muchas y útiles sugerencias sobre la presentación de esta nota.

Carlos trabaja en el Departamento de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, donde tiene el privilegio de interactuar a diario no solamente con alumnos brillantes como Alejandro de Miquel, sino también con colegas y amigos -también brillantes- quienes no solamente han contribuido a que parte esta historia haya ocurrido tal como la hemos contado aquí, sino que además leen todos sus escritos (como éste) y le hacen muy útiles comentarios. Entre ellos están: José Ignacio Burgos (que en realidad pertenece al ICMAT de Madrid pero por suerte sigue apareciendo por Barcelona cada tanto), Teresa Cortadellas, Luis Dieulefait, Eulàlia Montoro, Juan Carlos Naranjo, Joaquim Ortega, y Martín Sombra.

Adrián por su parte, quiere agradecerle primero, a Luis Crippa, porque sin él, toda esta historia no hubiera existido, o habría sido bien diferente. Segundo, porque le agradecemos a una persona que no conocemos. Nunca tuve trato ni personal (en 3D) ni a través de correos electrónicos con él hasta ahora, pero también mi gratitud a los 'homeomorfos' argentinos que andan dando vuelta por el mundo, como Juan Sabia, Carlos Sarraute, Alicia Dickenstein y Gerry Garbulsky. En definitiva, esto muestra que estamos geográficamente 'distantes' pero 'afectiva e intelectualmente', muy cercanos. A todos… ¡gracias!

Referencias

[1] Adrián Paenza. *La Matemática del Futuro*. Editorial Sudamericana, 2017.
[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Flavio_Josefo
[3] https://www.elcohetealaluna.com/el-problema-de-josephus/
[4] https://www.imo-official.org/problems.aspx

Carlos D'Andrea
Universitat de Barcelona,
(✉) cdandrea@ub.edu

Adrián Paenza
(✉) paenza@elosoproducciones.com.ar

Recibido: *29 de mayo de 2018*.
Aceptado: *5 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *30 de agosto de 2018*.