Los Espacios Vectoriales, los Cuadrados Mágicos y las Progresiones Aritméticas

Estela Sonia Aliendro

1. Espacios Vectoriales

1.1 Concepto de Espacio Vectorial

Un **espacio vectorial sobre el cuerpo** R de los números reales es un conjunto V, no vacío, cuyos elementos se llaman vectores, y tales que entre dos cualesquiera de ellos, **u** y **v**, está definida una ley de composición interna - suma de vectores, u + v, y entre un vector cualquiera **v** de V y un escalar $\underline{a}$ del cuerpo **R** está definida una ley de composición externa - producto de un vector por un escalar - tal que $\underline{a}$.**v** pertenece a V, y que verifica las siguientes propiedades:

- Respecto de la suma de vectores se debe satisfacer:

i) Asociatividad

Para todos los vectores **u, v, w** de V, se cumple que: **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

ii) Conmutatividad

Para todos los vectores **u, v** de **V**, se cumple que: **u** + **v** = **v** + **u**

iii) Existencia de la identidad aditiva

Existe el vector **0** en **V**, tal que para todo vector **u** de V, **u** + **0** = **u**

iv) Existencia del inverso aditivo

Para todo vector **u** de **V**, existe el vector (**-u**) en V,tal que **u** + (**-u**) = **0**

- Respecto del producto de un vector por un escalar:

i) Asociatividad para el producto de escalares

Para todos los escalares a, b de **R** y para todo vector **v** de **V**, se cumple que:

$$(ab)\,\mathbf{v} = a\,(b\mathbf{v})$$

ii) Distributividad del producto de un escalar para la suma de dos vectores

Para todo escalar a de **R** y para todos los vectores **u, v** de **V**, se cumple que:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$$

iii) Distributividad del producto de un vector para la suma de dos escalares

Para todos los escalares a, b de **R** y para todo vector **v** de **V**, se cumple que:

$$(a + b)\,\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$$

iv) Para todo vector **v** de **V**, se cumple que: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, siendo 1 la identidad en **R**.

1.2 Concepto de Combinación Lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, vectores de **V** y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, escalares de **R**. El vector:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

1.3 Concepto de Independencia lineal

Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores de **V** es **linealmente independiente,** si

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0 \quad \text{implica} \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Si un conjunto de vectores no es linealmente independiente, se denomina **linealmente dependiente**.

1.4 Concepto de Conjunto Generador

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de **V** es un **conjunto generador** de V, si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de $v_1, v_2, ..., v_n$.

1.5 Concepto de Base

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de **V** es una **base de V**, si se cumple que:

i) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es generador de V
ii) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente.

1.6 Concepto de Dimensión

El número máximo de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial **V** define la **dimensión** del espacio vectorial. Esta dimensión puede ser finita o no. Es un número que no depende del conjunto maximal escogido.

2. Situaciones para la Enseñanza

2.1 Las Progresiones Aritméticas:

Observemos la siguiente sucesión de figuras:

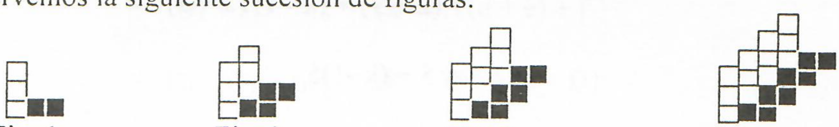


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

Los números que indican la cantidad de cuadritos negros corresponden a la sucesión $\{a_n\}$:

2, 4, 6, 8, ...

mientras que los números que conrresponden a la sucesión $\{b_n\}$ de cuadritos blancos es:

3, 6, 9, 12, ...

Ambas son dos ejemplos de progresiones aritméticas, las que responden a la fórmula:

$$s_k = s_1 + (k-1)d, \text{ donde } s_1, d \in \mathbf{R} \text{ y } k \in \mathbf{N}.$$

"Progresión aritmética de razón d y primer término s_1 ".

Para los casos anteriores, las correspondientes fórmulas son:

$$a_k = 2 + (k-1)2$$

$$b_k = 3 + (k-1)3 .$$

A partir de las sucesiones de las figuras, se obtiene también la sucesión $\{c_n\}$ que indica el total de cuadritos de cada una de las figuras:

$$5, 10, 15, 20, \ldots$$

cuya fórmula es:

$$c_k = 5 + (k-1)5$$

y que es obtenida a partir de las fórmulas de a_k y b_k:

$$\begin{aligned} a_k + b_k &= [2 + (k-1)2] + [3 + (k-1)3] \\ &= (2+3) + (k-1)(2+3) \\ &= 5 + (k-1)5 \\ &= c_k . \end{aligned}$$

Es decir, las progresiones aritméticas al ser sumadas, originan una nueva sucesión que también resulta una progresión aritmética.

Comprobemos formalmente este hecho:

La suma de dos progresiones aritméticas, es una ley de composición interna.

En efecto: Sean s y t dos progresiones aritméticas:

$$s = \{s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots\} \text{ con } s_k = s_1 + (k-1)\, d$$

$$t = \{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\} \text{ con } t_k = t_1 + (k-1)\, f$$

siendo: $s_k + t_k = [\, s_1 + (k-1)\, d\,] + [\, t_1 + (k-1)\, f\,]$

$$= (s_1 + t_1) + (k-1)(d+f)$$

expresión esta última que también corresponde a una progresión aritmética.

Ahora resulta posible averiguar qué propiedades tiene esta ley de composición interna entre progresiones aritméticas:

i) Asociatividad

Si s, r, y t son progresiones aritméticas, resulta que $(r + s) + t = r + (s + t)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
(r_k + s_k) + t_k &= \{\, [\, r_1 + (k-1)\, d\,] + [\, s_1 + (k-1)\, e\,] \,\} + [\, t_1 + (k-1)\, f\,] \\
&= [(r_1 + s_1) + (k-1)(d+e)] + [\, t_1 + (k-1)\, f\,] \\
&= [(r_1 + s_1) + t_1] + (k-1)[(d+e) + f\,] \\
&= [r_1 + (s_1 + t_1)] + (k-1)[d + (e+f)] \\
&= [\, r_1 + (k-1)\, d\,] + [\, (s_1 + t_1) + (k-1)(e+f)] \\
&= [\, r_1 + (k-1)\, d\,] + \{\, [\, s_1 + (k-1)\, e] + [\, t_1 + (k-1)\, f\,] \,\} \\
&= r_k + (s_k + t_k)\ .
\end{aligned}$$

ii) Conmutatividad

Si r, s son dos progresiones aritméticas, resulta que $r + s = s + r$

$$r_k + s_k = [\, r_1 + (k-1)\, d\,] + [\, s_1 + (k-1)\, e\,]$$

$$= (r_1 + s_1) + (k - 1)(d + e)$$

$$= (s_1 + r_1) + (k - 1)(e + d)$$

$$= [\ s_1 + (k - 1)\, e\ ] + [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ]$$

$$= s_k + r_k\ .$$

iii) Existencia de identidad aditiva:

En efecto, la progresión 0, 0, ..., es aritmética, ya que responde a la fórmula:

$$0_k = 0 + (k - 1)0.$$

Así que, para toda progresión aritmética r, r + 0 = r:

$$r_k + 0_k = [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ] + [\ 0 + (k - 1)\, 0\ ]$$

$$= (r_1 + 0) + (k - 1)(d + 0)$$

$$= r_1 + (k - 1)\, d$$

$$= r_k\ .$$

iv) Existencia del elemento inverso aditivo

En efecto: para toda progresión aritmética r, existe (-r) tal que r + (-r) = 0, siendo -r definida por:

$$-r_k = -r_1 + (k - 1)(-d)$$

luego,

$$r_k + (-r_k) = [\ r_1 + (k - 1)\, d\ ] + [\ -r_1 + (k - 1)(-d)]$$

$$= [\ r_1 + (-r_1)] + (k - 1)\ [d + (-d)]$$

$$= 0 + (k - 1)\, 0$$

$$= 0_k\ .$$

Si retornamos a la idea original - la sucesión de mosaicos de la página 3 - es posible pensar en la siguiente sucesión de figuras :

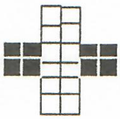


Fig. 1

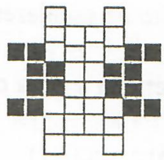
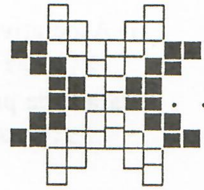


Fig. 2



. . .

Fig. 3 ...

Cada una de ellas está formada por el cuádruple de elementos de los correspondientes en la sucesión original.

Nada hay ahora más natural, que pensar en las fórmulas para determinar la cantidad correspondiente a cuadritos blancos y negros o totales de la figura en cada posición, cantidades que pueden obtenerse por la cuadruplicación de las correspondientes a_k, b_k, c_k de las sucesiones generadas al principio de esta sección.

Esto sugiere la idea de una nueva operación entre una progresión aritmética y un número, que origina una nueva progresión aritmética.

Es decir, dada la progresión aritmética s, con $s_k = s_1 + (k - 1)\, d$, y un a del campo de los reales, se obtiene una nueva progresión aritmética t, cuyo término general es:

$$t_k = a\, s_k\,,$$

donde efectivamente t_k corresponde a una progresión aritmética como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} t_k &= a\ [s_1 + (k - 1)\, d] \\ &= a\, s_1 + a\, (k - 1)\, d \\ &= (a\, s_1) + (k - 1)\, (ad) \end{aligned}$$

Se ha definido así, una **ley de composición externa entre las progresiones aritméticas y los números reales**, la que cumple las siguientes propiedades:

i) Asociatividad del producto de escalares

Para cada progresión aritmética r y para cada par de números reales a y b es:

$$(ab)\, r = a\,(b\, r)\,,$$

en efecto:

$$\begin{aligned}(ab)\, r_k &= (ab)\ [r_1 + (k-1)\, d]\\ &= (ab)\, r_1 + (ab)\,(k-1)\, d\\ &= a\ [b\, r_1 + b\,(k-1)\, d]\\ &= a\,(b\, r_k)\,.\end{aligned}$$

ii) Distributividad del producto de una suma de escalares respecto de una progresión

Para cada progresión aritmética r y para cada par de números reales a y b es:

$$(a+b)\, r = a\, r + b\, s\,,$$

en efecto:

$$\begin{aligned}(a+b)\, r_k &= (a+b)\ [r_1 + (k-1)\, d]\\ &= [a\, r_1 + a\,(k-1)\, d] + [b\, r_1 + b\,(k-1)\, d]\\ &= a\,[r_1 + (k-1)\, d] + b\,[r_1 + (k-1)\, d]\\ &= a\, r_k + b\, r_k\,.\end{aligned}$$

iii) Distributividad del producto de un escalar respecto de la suma de progresiones

Para cada par de progresiones aritméticas r y s y para cada número real a es:

$$a\,(r + s) = a\,r + a\,s,$$

en efecto:

$$a\,(r_k + s_k) = a\{\,[\,r_1 + (k-1)\,d\,] + [\,s_1 + (k-1)\,e\,]\,\}$$

$$= a\,[r_1 + (k-1)\,d\,] + a\,[s_1 + (k-1)\,e\,]$$

$$= a\,r_k + a\,s_k\,.$$

iv) Para cada progresión aritmética r, se cumple que:

$1\,r = r$, donde 1 es la identidad multiplicativa en **R**,
efectivamente:

$$1 r_k = 1\,[\,r_1 + (k-1)\,d\,]$$

$$= 1\,r_1 + 1\,(k-1)\,d$$

$$= r_1 + (k-1)\,d$$

Conclusión: El conjunto de progresiones aritméticas sobre el conjunto de números reales, con las leyes de composición antes definidas, tiene la estructura de espacio vectorial.

2.1.1 Ejemplos de conjuntos linealmente independientes:

i) Conjunto con un elemento:

La progresión $\{1, 1, 1, ..., 1, ...\}$ es linealmente independiente. En efecto, si se considera la combinación lineal:

$$a\,[\,1 + (k-1)\,0\,] = 0 \quad \text{resulta} \quad a = 0$$

ii) Conjuntos con dos elementos linealmente independientes:

$$r = \{\,1, 1, 1, ..., 1, ...\} \qquad s = \{\,1, 2, 3, ..., k, ...\},$$

$\{r,s\}$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, si a y b son números reales:

$$a\,r + b\,s = 0$$
$$a\,[1 + (k - 1)\,0] + b\,[1 + (k - 1)\,1] = 0$$
$$a\,1 + a(k - 1)\,0 + b\,1 + b(k - 1)\,1 = 0$$
$$(a + b) + b(k - 1) = 0 + (k - 1)\,0, \quad \forall\, k$$

de donde: $a + b = 0$ y $b = 0$, lo que implica que $a = b = 0$.

iii) Conjuntos de tres elementos linealmente independientes:

Entre las progresiones aritméticas, no existen estos conjuntos. En efecto, el espacio vectorial de ellas es de dimensión dos. Para comprobarlo, basta tomar una base, la que puede estar formada por las dos progresiones r y s del ejemplo anterior. Ya se sabe que el conjunto $\{r,s\}$ es linealmente independiente. Basta probar entonces, que es *generador* de cualquier progresión aritmética, como se muestra a continuación:

Para r, el término general es: $r_k = 1 + (k - 1)\,0$

y para s, el término general es: $s_k = 1 + (k - 1)\,1$.

Sea t la sucesión cuyo término general es $t_k = t_1 + (k - 1)\,f$. Entonces hay que resolver, para a y b reales, el sistema generado a partir de:

$$a\,r_k + b\,s_k = t_k$$
$$a\,[1 + (k - 1)\,0] + b\,[1 + (k - 1)\,1] = t_1 + (k - 1)\,f$$

de donde: $a + b = t_1$ y $b = f$

por lo tanto: $a = t_1 - f$ y $b = f$.

Ello prueba que cualquier progresión aritmética puede ser expresada como combinación lineal de r y s.

Es decir, el conjunto $\{r,s\}$ es una base de dicho espacio vectorial y por lo tanto, la dimensión del espacio vectorial de las progresiones aritméticas es dos.

2.1.2 Ejemplos de conjuntos linealmente dependientes:

i) de un elemento:

La progresión $\{0, 0, \ldots 0, \ldots\}$ es linealmente dependiente, ya que:

$$a[0 + (k - 1)\,0] = 0 \text{ es válida para cualquier número real } a .$$

ii) de dos elementos:

Las progresiones $\{1, 1, \ldots 1, \ldots\}$ y $\{2, 2, \ldots 2, \ldots\}$, cuyos respectivos términos generales son:

$$r_k = 1 + (k - 1)\,0 \quad y \quad s_k = 2 + (k - 1)\,0$$

son linealmente dependientes, ya que: $a\, r_k = s_k$ implica $a = 2$.

iii) de más de dos elementos:

Cualquier conjunto de tres elementos o más, es linealmente dependiente, ya que la dimensión del espacio vectorial de las progresiones aritméticas es dos.

2.1.3 Ejemplos de bases

a) El conjunto $\{r, s\}$, donde $r_k = 1 + (k - 1)\,0$ y $s_k = 1 + (k - 1)\,1$.

b) El conjunto $\{r, t\}$, donde $r_k = 1 + (k - 1)\,0$ y $t_k = 1 + (k - 1)\,2$.

2.2 Los Cuadrados Mágicos

Un **cuadrado mágico** es una matriz cuadrada que tiene la característica de que la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es constante. El orden de la matriz es el orden del cuadrado mágico.

Según refiere Malba Tahan en *El Hombre que Calculaba*, "los antiguos Magos de Persia, que también eran médicos, pretendían curar enfermedades aplicando a la parte enferma un cuadrado mágico, siguiendo el conocido principio de medicina *primun non nocére*, o sea, primer principio: no dañar".

2.2.1 El Espacio Vectorial de los Cuadrados Mágicos

Los cuadrados mágicos de orden tres constituyen un ejemplo de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, donde la ley de composición interna está dada por la suma de matrices y la ley de composición externa corresponde al producto de una matriz por un escalar. En efecto, probemos que:

i) La suma de dos cuadrados mágicos es otro cuadrado mágico.

ii) El producto de un cuadrado mágico por un escalar es otro cuadrado mágico.

Pero antes es necesario definir formalmente cuadrado mágico.

Definición: Una matriz de orden tres es un cuadrado mágico si y sólo si:

$$A=(a_{ik})_{3\times 3} \text{ tal que } \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a \quad \forall \text{ r,p}$$

Demostremos i):

Dadas las matrices A y B, cuadrados mágicos, la matriz suma A + B es también cuadrado mágico.

Sea $A+B=C=(c_{ik})_{3\times 3}$ donde $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$,

$$A=(a_{ik})_{3\times 3} \text{ con } \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a$$

$$\text{y } B=(b_{ik})_{3\times 3} \text{ con } \sum_{j=1}^{3} b_{jp} = \sum_{k=1}^{3} b_{rk} = \sum_{i=1}^{3} b_{ii} = \sum_{i+k=4} b_{ik} = b$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{3} c_{jp} = \sum_{j=1}^{3} (a_{jp}+b_{jp}) = \sum_{j=1}^{3} a_{jp} + \sum_{j=1}^{3} b_{jp} = a+b$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_{rk} = \sum_{k=1}^{3} (a_{rk}+b_{rk}) = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} + \sum_{k=1}^{3} b_{rk} = a+b$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} + \sum_{i=1}^{3} b_{ii} = a + b$$

$$\sum_{i+k=4} c_{ik} = \sum_{i+k=4} (a_{ik} + b_{ik}) = \sum_{i+k=4} a_{ik} + \sum_{i+k=4} b_{ik} = a + b\,.$$

Lo anterior prueba que la suma de dos cuadrados mágicos es otro cuadrado mágico.

Ahora demostremos ii):

Sea $C = \alpha A$ donde α es un escalar (número real en este caso) y A un cuadrado mágico de orden tres. Entonces, si $A = (a_{ik})_{3\times 3}$ y $C = (c_{ik})_{3\times 3}$, se tiene que:

$c_{ik} = \alpha a_{ik}$ y $A = (a_{ik})_{3\times 3}$ con $\sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{i+k=4} a_{ik} = a$,∀r, p

Entonces: $$\sum_{j=1}^{3} c_{jp} = \sum_{j=1}^{3} \alpha a_{jp} = \alpha \sum_{j=1}^{3} a_{jp} = \alpha a$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_{rk} = \sum_{k=1}^{3} \alpha a_{rk} = \alpha \sum_{k=1}^{3} a_{rk} = \alpha a$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \alpha a$$

$$\sum_{i+k=4} c_{ik} = \sum_{i+k=4} \alpha a_{ik} = \alpha \sum_{i+k=4} a_{ik} = \alpha a$$

lo que muestra que la matriz *C* resulta un cuadrado mágico.

La matriz nula es un cuadrado mágico, ya que todas sus filas, columnas y diagonales suman cero.

Si la matriz A es un cuadrado mágico, la matriz (-A) también lo es, ya que sus filas, columnas y diagonales tienen como suma la opuesta de la respectiva suma de filas, columnas o diagonales de A.

Como los cuadrados mágicos de orden tres corresponden a un subconjunto de matrices de orden tres, y el conjunto de matrices de orden tres es un espacio vectorial sobre el cuerpo de números reales, también lo son los cuadrados mágicos con respecto a dicho cuerpo numérico, ya que se cumplen las leyes de composición correspondientes.

2.2.2 Ejemplos de conjuntos linealmente independientes:

a) de un solo elemento

$\{A_1\}$

$$\text{donde } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto: $a\,A_1 = 0$ implica $a = 0$; puesto que:

$$a\,A_1 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & a & 2a \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ de donde } a = 0$$

b) de dos elementos

$\{A_1, A_2\}$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

En efecto: $a A_1 + b A_2 = 0$ implica $a = b = 0$, puesto que

$$a A_1 + b A_2 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a A_1 + b A_2 = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ 0 & a & 2a \\ 2a & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & 0 & b \\ 0 & b & 2b \\ b & 2b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + 2b & 2a & b \\ 0 & a + b & 2a + 2b \\ 2a + b & 2b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $a = b = 0$

c) de tres elementos

$\{A_1, A_2, A_3\}$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En efecto: $a A_1 + b A_2 + c A_3 = 0$ implica $a = b = c = 0$:

$$a A_1 + b A_2 + c A_3 = a \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a + 2b + c & 2a & b + 2c \\ 2c & a + b + c & 2a + 2b \\ 2a + b & 2b + 2c & a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $\qquad 2a = 0 \quad a = 0$

$\qquad 2c = 0 \quad c = 0$

$\qquad a + b + c = 0 \quad b = 0$

d) de cuatro elementos

No existen, en el conjunto de cuadrados mágicos de orden tres, conjuntos de cuatro cuadrados mágicos linealmente independientes. En efecto, si se considera el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, X\}$, donde A_1, A_2, A_3 son las cuadrados mágicos linealmente independientes del ejemplo anterior y X es un cuadrado mágico arbitrario, cuyos elementos no son todos nulos, se busca probar que $a A_1 + b A_2 + c A_3 + 1 X = 0$ tiene solución. Veámoslo:

$$a\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ \hline\end{array} + b\begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ \hline\end{array} + c\begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ \hline\end{array} + \begin{array}{|ccc|}\hline x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\\ \hline\end{array} = \mathbf{0}$$

donde **0** es la matriz nula.

$$\begin{array}{|ccc|}\hline a+2b+c+x_{11} & 2a+x_{12} & b+2c+x_{13}\\ 2c+x_{21} & a+b+c+x_{22} & 2a+2b+x_{23}\\ 2a+b+x_{31} & 2b+2c+x_{32} & a+c+x_{33}\\ \hline\end{array} = \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hline\end{array}$$

En consecuencia:

$$2a + x_{12} = 0 \qquad 2\,a = -\,x_{12} \qquad a = -\frac{x_{12}}{2}$$

$$2c + x_{21} = 0 \qquad 2\,c = -\,x_{21} \qquad c = -\frac{x_{21}}{2}$$

$$b + 2c + x_{13} = 0$$
$$2b + 2c + x_{32} = 0 \qquad b + (x_{32} - x_{13}) = 0 \qquad b = -\,(x_{32} - x_{13})$$

Usando el hecho que $d = x_{11} + x_{12} + x_{13} = x_{21} + x_{22} + x_{23} = \ldots$ un cálculo "sencillo" muestra que a,b,c resuelven el sistema del recuadro. Por ejemplo, $b+2c+x_{13} = -\,x_{32} + 2x_{13} - x_{21} = x_{13} + x_{13} - d + x_{11} + x_{31} - d + x_{12} + x_{22} = x_{13} + x_{31} - d + x_{22} = 0$. Esto prueba que el conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ es *generador* de cualquier cuadrado mágico de orden tres. A la vez queda implicado que la **dimensión del espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden tres, es tres.**

2.2.3 Ejemplos de conjuntos linealmente dependientes

a) de un elemento:

La matriz nula, **0**, es un conjunto linealmente dependiente, ya que a **0** = **0** se verifica también para $a \neq 0$.

b) de dos elementos:

El conjunto $\{A_1, A_2\}$

$$\text{donde } A_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}, \quad A_2 = \boxed{\begin{matrix} \pi & 2\pi & 0 \\ 0 & \pi & 2\pi \\ 2\pi & 0 & \pi \end{matrix}}$$

En efecto, si a y b son escalares, se tiene:

$$a \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} + b \boxed{\begin{matrix} \pi & 2\pi & 0 \\ 0 & \pi & 2\pi \\ 2\pi & 0 & \pi \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

de donde resulta que: $a + b\pi = 0$, lo que implica $a = -b\pi$, ecuación que admite infinitas soluciones.

c) de tres elementos:

$\{A_1, A_2, A_3\}$

$$\text{donde } A_1 = \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}, A_2 = \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}}, A_3 = \boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}}$$

En efecto, $A_1 + A_2 + (-1)\, A_3 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es la matriz nula.

d) de cuatro elementos:

Como tres es la dimensión del espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden tres, cualquier conjunto de cuatro o más elementos resulta linealmente dependiente.

2.2.4 Ejemplos de bases

El conjunto $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una base, donde:

$$A_1 = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{|ccc|}\hline 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline\end{array}, \quad A_3 = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

El conjunto $\{B_1, B_2, B_3\}$ es una base, donde:

$$B_1 = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}, \quad B_2 = \begin{array}{|ccc|}\hline -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ \hline\end{array}, \quad B_3 = \begin{array}{|ccc|}\hline 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ \hline\end{array}$$

3. Bibliografía:

Birkhoff y Mac Lane: Álgebra Moderna. Ed. Vicens Vives. 1963

Colera y Guzmán: Matemática I, II, III. Ed. Anaya. 1994.

Colera y Guzmán: Matemática I, II. Ed. Anaya. 1989

Fletcher: Álgebra Lineal por sus Aplicaciones. Ed. Cedic. 1972

Paige y Swift: Elementos de Álgebra Lineal. Ed. Reverté. 1967

Tahan: El Hombre que Calculaba. Panamericana Editorial. 1994.

Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad Nacional de Salta.