Sección de Problemas

por Juan Pablo Rossetti

Los primeros dos problemas son en homenaje a Julio Rey Pastor. Éstos, fueron publicados hace más de 100 años en la *Revista Trimestral de Matemáticas* de Zaragoza (España) en 1905. A pesar de su corta edad, nuestro homenajeado envió soluciones a dichos problemas, que fueron publicadas ahí mismo. El tercer problema, en cambio, es sobre "caminos mínimos", siendo las últimas preguntas un poco más avanzadas. Las soluciones (o gran parte de ellas) se encuentran en la página siguiente.

※ ※ ※

Problema 1. Números consecutivos. Para cada n natural, hallar los n números naturales consecutivos más pequeños cuya suma sea a la vez un cuadrado y un cubo perfecto.

Problema 2. Divisibilidad. Demostrar que siendo p un número primo mayor que 3, el producto $(p^2-1)(p^2-25)$ es siempre divisible por 576.

Problema 3. Caminos mínimos. Clara va siempre caminando con su hermano al colegio, que queda a 9 cuadras de su casa, 5 en una dirección y 4 en la otra. La primera mitad del año, fueron siempre por el mismo camino, el que le gustaba a su hermano (en azul en la Figura 1); pero después de las vacaciones de Julio, Clara quiso ir cada día por un camino diferente, siempre caminando solo 9 cuadras, no más.

(a) ¿Habrá podido Clara recorrer siempre caminos diferentes desde las vacaciones de Julio?

(b) ¿Cuántos caminos distintos (de 9 cuadras) hay?

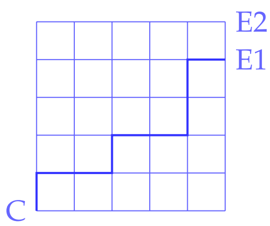

Figura 1. C = Casa de Clara, E1 = entrada vieja, E2 = entrada nueva.

Para el año que viene, el ingreso al colegio se hará por otra esquina, con lo que Clara tendrá que caminar entonces 10 cuadras (5 hacia el Este y 5 hacia el Norte) para ingresar.

(c) ¿Podrá en los 185 días de clases usar un camino diferente cada día?

Un día su abuelita le pide que pase por una farmacia que está en el mitad de una cuadra (como en la Figura 2) entre la casa y el colegio.

(d) ¿Cuántos caminos (mínimos) hay que pasan por la farmacia?

Otro día, su papá le dice en cambio que NO pase por cierta cuadra porque la están arreglando y es peligroso.

(e) ¿Cuántos caminos tiene Clara que no pasan por esa cuadra?

Ahora su mamá agrega otra cuadra en reparación que considera peligrosa (ver Figura).

(f) ¿Cuántos caminos le quedan a Clara para elegir?

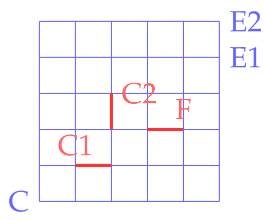

FIGURA 2. F = farmacia, C1 = corte 1, C2 = corte 2.

A Clara le gusta pensar, así que después de un buen rato –y con cierta ayuda de su profe de matemática– logra resolver todas estas cuestiones, no sólo para su recorrido de 5×5 cuadras, sino en general, si tuviera que hacer m cuadras al Este y n cuadras al Norte, con m y n números naturales cualesquiera, es decir, el caso $m \times n$.

(g) ¿Te animás a hacerlo?

Una vez resuelto totalmente cómo contar los caminos mínimos posibles, Clara se pone a imaginar cómo sería el cálculo si en lugar de tener que moverse 5 cuadras en una dirección y 5 en otra, tuviera que moverse en 3 dimensiones en lugar de dos, por ejemplo a la derecha, al frente y arriba, como en algunos juegos para niños que hay aun en las plazas. Se imaginó a una hormiga recorriendo los caños de ese gran cubo, formado por $5 \times 5 \times 5$ pequeños cubos.

(h) ¿Cuántas formas habría de ir de una esquina a la esquina opuesta por caminos que solo recorran 15 tramos, es decir, caminos mínimos?

Por último, se plantea la pregunta

(i) ¿cuántos caminos mínimos hay en un hipercubo k-dimensional, $k > 3$, yendo de un vértice del hipercubo $5 \times 5 \times \cdots \times 5$ (k-veces) a su opuesto? y también el caso general en el que en lugar de ser un hipercubo, es un politopo similar al cubo pero con longitudes de sus lados distintas entre si, del tipo $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Otra problema interesante es

(j) contar los caminos mínimos que puede recorrer Clara sin cruzar la diagonal principal que une su casa con el colegio. Es decir, si por ejemplo, comenzó yendo hacia el Este, entonces siempre deberá moverse más veces hacia el Este que hacia el Norte, salvo al final del recorrido, que tiene que completar las 5 cuadras al Este y 5 al Norte.

Respuestas

✓ *Solución 1.* Se puede calcular bien la suma de números consecutivos. Si sumamos los n números $m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1$, el resultado es n por el promedio entre el primer número y el último, es decir

$$\frac{n(2m+n-1)}{2}.$$

Para que este número sea un cuadrado y cubo perfecto al mismo tiempo, debe ser igual a una potencia sexta, o lo mismo, un número en cuya factorización los primos aparezcan elevados a potencias que son múltiplos de 6. Así, por ejemplo, para $n = 10$, necesitamos que $5(2m+9)$ sea una potencia sexta, por lo que tomamos $2m+9 = 5^5$, es decir $m = 1558$, de modo que para $n = 10$, los menores 10 números consecutivos que dan un cuadrado y cubo perfecto simultáneamente son $1558, 1559, \ldots, 1567$.

✓ *Solución 2.* Como $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ y p es impar, resulta que $p-1$ y $p+1$ son ambos pares y uno de ellos es divisible por 4. Por lo tanto p^2-1 es múltiplo de 8. Además, como p es primo (mayor que 3), alguno de $p-1$ ó $p+1$ tiene que ser múltiplo de 3 (porque de tres números consecutivos, uno es múltiplo de 3). Asi, tenemos que p^2-1 es múltiplo de 8 y de 3, por lo tanto lo es de 24. Análogamente, se ve que $p^2-25 = (p-5)(p+5)$ es también múltiplo de 24 y por consiguiente el número del enunciado es múltiplo de $24 \cdot 24 = 576$, como queríamos probar.

✓ *Solución 3.*

(a) Sí, puede.

(b) Son 126 caminos distintos para caminar 9 cuadras (5 y 4) hasta el colegio.

(g) Haremos primero el caso general que se plantea en (g). Para el problema general, con n cuadras en una dirección y m en otra, la respuesta es el número combinatorio $n+m$ en n, es decir, el número de combinaciones de $n+m$ elementos, tomados de a n. Se denota $\binom{n+m}{n}$ y se cumple que $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$ y que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, donde $k! = k \cdot (k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Esto es así porque se puede pensar cada camino como una serie de elecciones E o N si Clara decide en cada esquina tomar hacia el Este (E) o hacia el Norte (N). La única restricción que hay, es que hay que elegir m veces E y n veces N. De modo que los caminos mínimos se identifican completamente con las sucesiones del tipo EENENNNEE..., de longitud $m+n$ con exactamente m E's y n N´s. Esto equivale a elegir las n posiciones donde irán las letras N en nuestra sucesión, lo cual se puede hacer de exactamente $\binom{m+n}{n}$ formas distintas.

(c) Este es el caso $m = n = 5$, por lo tanto la respuesta es $\binom{5+5}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$. Hay 210 caminos diferentes, por lo tanto no le alcanzarán 185 días para recorrerlos a la ida al colegio.

(d) En este caso, podemos dividir el problema en dos, porque para pasar por la farmacia Clara tiene que ir primero desde su casa hasta la esquina correspondiente, previa a la farmacia, y luego desde la esquina posterior a la farmacia, hasta el colegio. Se calculan estos dos números y se los multiplica entre sí.

(e) Aquí conviene pensar en la cantidad total de caminos menos los que pasan por esa cuadra prohibida, así que esto es análogo al punto (d).

(f) La idea que sugerimos para este caso es usar el *principio de inclusión-exclusión* generalizado, donde una propiedad sería pasar por una de las cuadras en reparación y la otra propiedad pasar por la otra cuadra.

(h) A pesar de haber pasado de dimensión 2 a dimensión 3, la dificultad no se agranda mucho, puesto que ahora en lugar de pensar en sucesiones de 10 letras con 5 E's y 5 N's, podemos pensar en sucsiones de longitud 15 con 5 letras D (de Derecha), 5 letras F (de al Frente) y 5 A's, de Arriba. Así, la solución es elegir primero 5 lugares de los 15 posibles, y luego otros 5 de los 10 restantes, es decir, la respuesta es $\binom{15}{5}\binom{10}{5}$.

(i) Esto no es muy distinto a lo anterior. Hay que elegir n_1 posiciones primero de entre las $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, luego se eligen n_2 posiciones de las $n_2 + \cdots + n_k$ que quedan, y así sucesivamente, por lo que la respuesta es

$$\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1}\binom{n_2 + \cdots + n_k}{n_2}\binom{n_3 + \cdots + n_k}{n_3}\cdots\binom{n_{k-1} + n_k}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k}$$

que es el llamado número multinomial y se denota $\binom{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}{n_1,\ n_2,\ \ldots\ ,n_k}$.

(j) Para resolver este enunciado, aparecen los célebres números de Catalan.

¡Sucesiones al toque!

¿Cuál creés que es el próximo número en las siguientes sucesiones $\{a_n\}$ y por qué? ¿Cuál es el término general para (b)?

(a) $1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, \ldots$

(b) $1, 64, 729, 4096, 15625, 46656, 117649, \ldots$

(c) $27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, \ldots$

(d) $1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627, \ldots$

Ayuda: en (d), el número ubicado en la posición n, depende de n, y no de los números anteriores. Además, ese número cuenta algo relacionado con n. En (c), cada número depende únicamente del que le precede.

Podés encontrar las soluciones en la página 56.